
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 32 卷 第 2 號 1995年 5月
 Transactions of the Society of
 Naval Architecture of Korea
 Vol. 32, No. 2, May 1995

쌍곡면 패널에의 다이폴 분포

이창섭*, 서정천**

Dipole Distributions on a Hyperboloidal Panel

by

Chang-Sup Lee* and Jung-Chun Suh**

요 약

프로펠러 뒷날과 같이 두께가 아주 얇아지는 경우, 또는 선미에서와 같이 물체 표면의 곡률이 급격하게 변하는 경우 등에서는 기존의 평균평면 패널로 물체의 표면을 대치하여 경계적분 문제를 다루면, leakage 문제를 야기하거나 유동장점이 패널에서 아주 가까이 있을 경우에는 유기속도 포텐셜이 부정확해 지는 등의 문제가 있다. 쌍곡면 패널은 그위에 분포된 다이폴에 의해 유기되는 포텐셜을 근사화하지 않고 정확하게 계산할 수 있도록 한다. 본 연구는 쌍곡면에 분포된 균일 밀도의 다이폴에 의해 유기되는 포텐셜을 표현하는 적분식을 수치적으로 계산하기에 유용한 2가지 서로 다른 방법, 즉, Gauss-Bonnet 정리를 이용하여 증명하는 방법과 면적분을 선적분으로 치환하는 방법, 을 유도하고 그 정확성을 소개한다.

Abstract

When the thickness becomes so small as in the case of the trailing edge of the propeller blade or when the curvature of the surface varies rapidly as in ship stern, the existing panel method employing a flat-surface panel, obtained by collapsing the original non-planar surface into its mean location, suffers the leakage problem and also gives inaccurate induction upon the field point very close to the panel. The hyperboloidal panel deals with the induction from the dipole distributed on the non-planar surface

접수일자: 1994년 8월 12일, 재접수일자: 1995년 5월 16일

*정회원, 충남대학교 선박해양공학과

**정회원, 서울대학교 조선해양공학과

without approximation, overcoming the defects of the flat-surface panel. This paper introduces two distinct derivations of the formulae to compute the integral for the potential induced by a dipole of uniform density distributed on a non-planar hyperboloidal surface element. One method is based on the Gauss-Bonnet theorem and the other is based on the transformation of the surface integral into a line integral.

1. 서 언

이상 유체중에서 운동중인 물체표면에 작용하는 유체력을 계산하기 위하여, Hess & Smith[1]이래로 물체표면에 쏘오스와 보오텍스(또는 다이폴)를 분포하여 경계치 문제를 해석하는 경계적분법(Boundary Integral Method)이 고속 대용량 컴퓨터의 보급과 함께 널리 보급되어 사용되어 왔다.

Hess & Smith의 방법은 선박 또는 항공기의 표면을 유한한 크기의 4각형(또는 3각형)판요소의 집합으로 대치한 후에, 각 판요소내에 쏘오스 또는 보오텍스와 같은 특이함수를 분포하고, 물체표면에서의 경계조건을 만족하도록 경계적분 방정식을 형성한 후에 특이함수의 세기를 결정하고, 이로부터 물체표면에서의 압력분포 또는 전체 힘을 구하는 과정으로 요약될 수 있다.

Hess & Smith의 원래의 방법은 판요소를 평균 평판으로 치환하고 판요소내의 특이함수의 세기를 일정하다고 가정하고 해석하는 것이었다. 그러나 복잡한 형상을 갖는 선박 또는 항공기 주위의 유동현상의 계산정도를 향상시키기 위하여, 물체표면을 대치하는 판요소의 비평면성 또는 판요소내 특이함수 세기 분포의 변화를 고려하기 위한 방법들이 제안되어 활용되기도 하고 있다(Hess[2]).

프로펠러 유체역학 문제 해석을 위하여 Lee[3]는, Newman[4]에 의해 발표된 Panel code를 활용하여, 포텐셜을 기저로 한 양력판 이론을 발표한 바 있다. Lee는 4각형 판요소내에서의 다이폴의 세기를 일정하게 가정하고 프로펠러 경계치 문제를 해석하였으나, 그후 Hsin[5]은 Lee에 의해 채택되어 사용되고 있는 저차 패널법(low order panel method)이 프로펠러 뒷날과 같이 두께가 아주 얇아지는 경우등에 문제를 야기시킴을 발견하였다. 이를 해결하기 위하여 Hsin은 판요소의 비평면성이 고려된 쌍곡면 판요소(hyperboloidal panel)를 사용하여야 한다는 결론을 얻었으며, 실제로 스쿠가 큰 프로펠러에 성공적으로 적용하여 이를 입증하여 보여주었다.

쌍곡면 요소는 Morino 등[6]에 의하여 발표된 후에 항공기 유동해석에 사용되어 오다가 최근에는 Hoshino[7]에 의해 채택된 바 있다. 일반적으로 판요소내에서 다이폴의 세기가 일정하면 다이폴 판요소의 영향이 다이폴을 둘러싸고 있는 변에서의 선적분으로 표시되거나 (Hess[2]), 다이폴 판요소의 각 꼭지점에서의 내각의 특성에 의해 결정될 수 있다 (Newman[4]). 쌍곡면 요소를 사용하는 가장 큰 이유는 프로펠러 날개의 뒷날과 같이 그 두께가 아주 작은 경우에, 기존의 평균평면으로 치환하는 판요소가 올바른 유기속도를 주지 못하는 데 반하여, 쌍곡면 요소의 경우는 이러한 경우 상당히 신뢰할 만한 값을 준다는 데 있다. 특히 기존의 판요소를 사용할 경우에는 날개 뒷날 부근의 흡입면과 압력면에서의 influence coefficient가 서로 비슷하게 나타나, 행렬식의 성질이 나빠진다는(ill-conditioned) 사실이 Hsin에 의해 보고된 바 있다. 쌍곡면 판요소를 사용할 경우에는 자기 자신에 의해 유기되는 포텐셜 값이 $\pm \frac{1}{2}$ 이 아니고 $\pm \frac{1}{4}$ 근처의 값을 갖는 것이 특징이며, 비평면성을 그대로 유지하여 주기 때문에 이웃하는 판요소 사이의 leakage 문제가 발생하지 않는다는 큰 잇점이 있다.

본 논문에서는 이와 같은 쌍곡면 판요소에 분포된 균일세기의 다이폴에 의해 유기되는 포텐셜을 계산하는 간단한 2가지 방법을 소개하고, 유도한 관계식을 포텐셜 유동 해석에 적용가능함을 보이고자 한다. 제1방법은 Gauss-Bonnet정리를 이용하는 방법으로 각 꼭지점에서의 내각을 구하는 과정을 벡터 관계식을 사용하여 구함으로써 계산하고자하는 물리량을 시각적으로 이해하기 쉬운 유도방법이며, 제2방법은 포텐셜을 표현하는 적분을 Stokes정리를 이용하여 선적분으로 치환한 후에 수학적으로 보다 엄밀하게 유도한 방법이다. 최종 표현식의 형태가 서로 다르지만, 예제계산을 통하여 두 방법 모두 쌍곡면에 분포된 다이폴에 의해 유기되는 포텐셜 값을 정확하게 계산할 수 있음을 보였다.

2. Gauss-Bonnet 정리를 이용하는 방법 (방법 1)

2.1 법선 다이폴에 의해 유기되는 포텐셜

평면상에 있지 않은 4각형 판요소에 일정 세기의 법선 다이폴을 분포하고, 유동장 점 $P(x,y,z)$ 에서의 포텐셜을 구하면,

$$\phi^D = \iint_s \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad G = -\frac{1}{4\pi R} \quad (1)$$

여기에서 $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi}(\xi, \eta, \zeta)$ 는 판요소 위의 점좌표이다.

이를 계산하기 위하여 미분기하학의 Gauss-Bonnet 정리(O'Neill[8])를 적용하자. 즉, 유동장점 P에 중심을 가진 단위길이 반경의 구표면에 4각형 판요소를 투영하면(4각형 경계선분 위의 점과 P점을 이으면), 투영된 경계선의 궤적에 의해 둘러싸인 면적 A는,

$$A = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - 2\pi \quad (2)$$

여기에서 β_n 은 구면상에 있는 각 꼭지점의 내각을 표시한다(Fig. 1 참조).

꼭지점의 내각은 구면상에서 꼭지점에 접하는 평면에서나, 유동장점과 꼭지점을 잇는 벡터에 수직하는 평면위에서도 측정될 수 있다.

4각형 판요소에 분포된 법선 다이폴에 의해 유기되는 유기 포텐셜은 다음과 같이 표현될 수 있다 (Newman[4]).

$$\phi^D = \left(\sum_{n=1}^4 \beta_n - 2\pi \right) / (-4\pi) \quad (3)$$

내각 β_n 을 Fig. 2의 각 꼭지점의 sector에 대응하는 각 θ_n^D 으로 치환하면, $-4\pi\phi^D$ 는

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \theta_1^D, & \beta_2 &= \pi - \theta_1^D, \\ \beta_3 &= \theta_3^D, & \beta_4 &= \pi - \theta_4^D \end{aligned} \quad (4)$$

로부터

$$-4\pi\phi^D = \theta_1^D - \theta_2^D + \theta_3^D - \theta_4^D \quad (5)$$

로 표현될 수 있다.

3각형 판요소에 대하여는 (Fig. 3)

$$-4\pi\phi^D = \sum_{n=1}^3 \beta_n - \pi \quad (6)$$

로부터,

$$-4\pi\phi^D = \theta_1^D - \theta_2^D + \theta_3^D \quad (7)$$

를 얻는다.

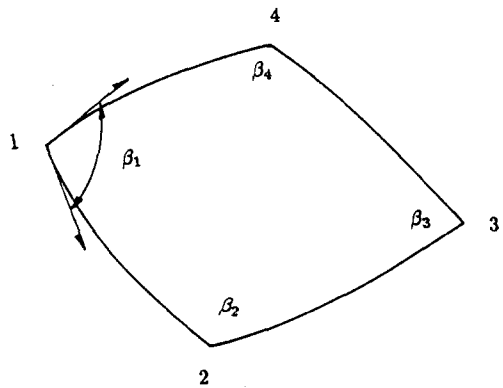


Fig. 1 Included angle β_n at n-th vertex on surface of a sphere with unit radius

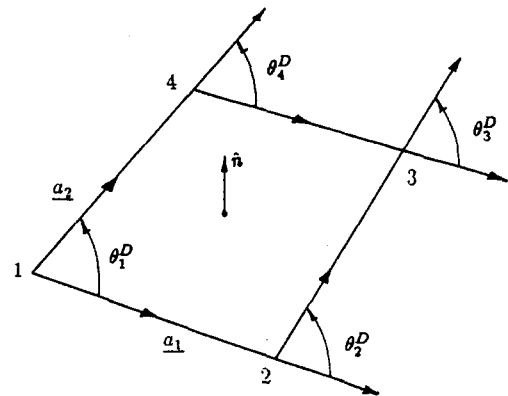


Fig. 2 Definition sketch of θ_n^D for a quadrilateral panel

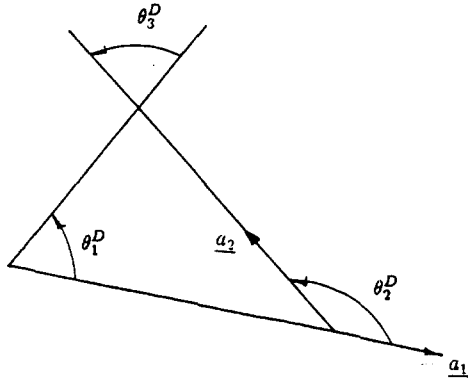


Fig. 3 Definition sketch of θ_n^D for a triangular panel

2.2 꼭지점에서의 내각공식 유도

식(5) 또는 식(7)을 사용하여 4각형 또는 3각형 판요소에 분포되어 있는 법선 다이플에 의해 유기되는 포텐셜을 구하기 위하여는 임의의 꼭지점에 포함되는 각 θ_n^D 를 미리 계산할 수 있어야 한다. 여기에서의 꼭지점 내각 β_n 및 꼭지점 각 θ_n^D 는 유동장점 P와 임의의 sector의 꼭지점을 잇는 직선에 수직인 평면내에서 정의된 각임을 유의하여야 한다. 여기서는 임의의 꼭지점을 선택하더라도 일반성을 잃지 않으므로 Fig. 2의 1번 꼭지점에 대하여 θ_1 을 구하는 과정을 예로 들어 설명하기로 한다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 꼭지점의 번호를 면적요소가 왼쪽에 보이도록(반시계 방향으로) 각변을 따라 매길 때, 1번 모서리에서 2번 모서리로 진행하는 변의 단위 벡터를 a_1 , 그리고 1번 모서리에서 맨끝 4번 모서리를 가리키는 단위 벡터를 a_2 로 하면 θ_1^D 는 a_1 에서 a_2 방향으로 회전하는 각으로 정의된다.

Fig. 4에 다시 보인 것처럼, Fig. 2의 1번 꼭지점 (Fig. 4에서는 A점으로 명명됨)과 유동장점 P를 잇는 벡터 r 과 a_1 단위 벡터는 한 평면을 이룬다.

a_1 을 동일 평면에서 r 방향과 r 에 수직인 성분 즉, \hat{e}_r 및 \hat{e}_u 성분으로 분해하면

$$a_1 = a_1^r \hat{e}_r + a_1^u \hat{e}_u \tag{8}$$

으로 표현된다. 다시 r 과의 벡터적을 구하면,

$$\begin{aligned} r \times a_1 &= r \hat{e}_r \times (a_1^r \hat{e}_r + a_1^u \hat{e}_u) \\ &= r a_1^u (\hat{e}_r \times \hat{e}_u) \\ &\equiv r a_1^u \hat{e}_\theta \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)의 벡터를 \hat{e}_u 쪽으로 90° 회전 시키면 \hat{e}_u 방향 벡터인 A_1 을 얻는다. 즉,

$$A_1 \equiv r a_1^u \hat{e}_u \tag{10}$$

a_2 벡터에 대하여도 위의 식 (8)-(10)과 비슷한 과정을 따라, a_2 와 r 로써 이루어 지는 평면위의 두 벡터 성분으로 나누기로 한다. 즉

$$a_2 = a_2^r \hat{e}_r + a_2^v \hat{e}_v \tag{11}$$

여기서 \hat{e}_v 는 a_2 와 r 로 이루어 지는 평면에서 \hat{e}_r 에 수직인 벡터가 된다. 위의 식(9)-(10)과 마찬가지로 a_2 와 r 의 벡터적을 구한후 다시 원래 평면에 있는 \hat{e}_v 로 90° 회전하여 다음과 같이 A_2 벡터를 얻는다. 즉,

$$A_2 = r a_2^v \hat{e}_v \tag{12}$$

여기에서 A_1 및 A_2 는 각각 \hat{e}_u 에 수직하며 \hat{e}_u 및 \hat{e}_v 방향으로 정의되는 벡터이므로 두 벡터의 내적과 꼭지점의 내각 θ 를 관련지을 수 있다. 왜냐하면, $P-r-A-a_1-\hat{e}_u$ 는 한 평면에 위치하며, $P-r-A-a_2-\hat{e}_v$ 도 한 평면에 위치하므로 두 면사이의 내각은 \hat{e}_u 와 \hat{e}_v 에 이루어지는 내각과 같아지기 때문이다. 즉,

$$A_1 \cdot A_2 = (r^2 a_1^u a_2^v) \cos \theta \tag{13}$$

식 (13)의 θ 가 식 (5) 및 (7)에서 필요로 하는 각 꼭지점의 내각에 해당하는 물리량이 된다. Fig. 5는 양의 θ 가 정의되는 방향을 보여준다.

\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 벡터의 외적을 구하면, Fig. 5로부터,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 &= r^2 a_1^u a_2^v (\hat{e}_u \times \hat{e}_v) \\ &= r^2 a_1^u a_2^v (\hat{e}_r \sin \theta)\end{aligned}\quad (14)$$

식 (14)로 표현된 벡터와 \hat{e}_r 사이의 내적을 구하면,

$$\hat{e}_r \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) = r^2 a_1^u a_2^v \sin \theta \quad (15)$$

식 (13)과 (15)로부터 $\tan \theta$ 에 관한식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\tan \theta = \frac{\hat{e}_r \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)}{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2} \quad (16)$$

\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 벡터를 다시 \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 벡터와 \hat{e}_r 벡터를 써서 표현하면,

$$\mathbf{A}_1 = r a_1^u \hat{e}_u = r (\mathbf{a}_1 - a_1^r \hat{e}_r)$$

$$\mathbf{A}_2 = r a_2^v \hat{e}_v = r (\mathbf{a}_2 - a_2^r \hat{e}_r) \quad (17)$$

식 (16)을 다시 정리하면

$$\tan \theta = \frac{\hat{e}_r \cdot (\mathbf{a}_1 - a_1^r \hat{e}_r) \times (\mathbf{a}_2 - a_2^r \hat{e}_r)}{(\mathbf{a}_1 - a_1^r \hat{e}_r) \cdot (\mathbf{a}_2 - a_2^r \hat{e}_r)} \equiv \frac{N}{D} \quad (18)$$

식 (18)의 분모, 분자를 각각 D , N 으로 표현하면,

$$\begin{aligned}D &\equiv (\mathbf{a}_1 - a_1^r \hat{e}_r) \cdot (\mathbf{a}_2 - a_2^r \hat{e}_r) \\ &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - a_1^r a_2^r - a_1^r a_2^r + a_1^r a_2^r \\ &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - a_1^r a_2^r\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}N &\equiv \hat{e}_r \cdot (\mathbf{a}_1 - a_1^r \hat{e}_r) \times (\mathbf{a}_2 - a_2^r \hat{e}_r) \\ &= \hat{e}_r \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 - a_1^r \hat{e}_r \times \mathbf{a}_2 - a_2^r \mathbf{a}_1 \times \hat{e}_r) \\ &= \hat{e}_r \cdot [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 - a_1^r \hat{e}_r \times (\mathbf{a}_2^r \hat{e}_r \\ &\quad + a_2^v \hat{e}_v) - a_2^r (a_1^r \hat{e}_r + a_1^u \hat{e}_u) \times \hat{e}_r] \\ &= \hat{e}_r \cdot [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 - a_1^r a_2^v (\hat{e}_r \times \hat{e}_v) \\ &\quad - a_2^r a_1^u (\hat{e}_u \times \hat{e}_r)] \\ &= \hat{e}_r \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)\end{aligned}\quad (20)$$

위식에서 $\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_u \times \hat{e}_v) = 0$

, $\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_u \times \hat{e}_r) = 0$ 이 사용되었다.

따라서 식 (18)을 다시쓰면,

$$\tan \theta = \frac{\hat{e}_r \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - a_1^r a_2^r} \quad (21)$$

식 (21)에 $\hat{e}_r = \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$ 을 대입하면,

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|})(\mathbf{a}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|})} \\ &= \frac{|\mathbf{r}| \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{r}|^2 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}\quad (22)$$

를 얻게된다. 다시 벡터 일치공식

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (23)$$

을 쓰면

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_2) \quad (24)$$

$$= |\mathbf{r}|^2 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_1)$$

를 얻을 수 있으므로, 식 (22)는 최종적으로 다음과 같이 정리된다.

$$\tan \theta = \frac{|\mathbf{r}| \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{r} \times \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_2)} \quad (25)$$

식 (25)로부터 꼭지점의 내각 θ^D (다이폴 판요소에 대하여 이러한 내각을 구하므로 위치자 D를 첨부하기로 한다.)를 구하면,

$$\theta^D = \arctan \frac{|\mathbf{r}| \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{r} \times \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_2)} \quad (26)$$

를 얻게되며, ATAN2함수를 써서 계산하면 θ^D 의 범위는

$$-\pi \leq \theta^D \leq \pi \quad (27)$$

가 된다. 제 i -번째 꼭지점에서의 단위 법선 벡터 \hat{n}_i 를 다음과 같이 정하면

$$\hat{n}_i = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \quad (28)$$

$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$ 의 부호와 θ^D 의 부호는 다음과 같이 구분된다.

즉 각 꼭지점에서

$$\begin{cases} \hat{n}_i > 0, & \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) > 0, & 0 \leq \theta^D < \pi \\ \hat{n}_i < 0, & \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) < 0, & -\pi \leq \theta^D \leq 0 \end{cases} \quad (29)$$

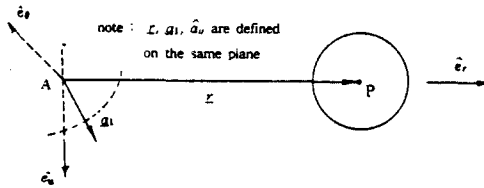


Fig. 4 Definition of a plane formed by \mathbf{a}_1 and \mathbf{r} vectors

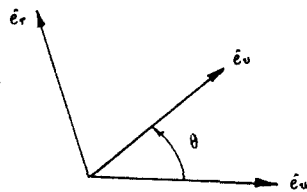


Fig. 5 Definition of θ

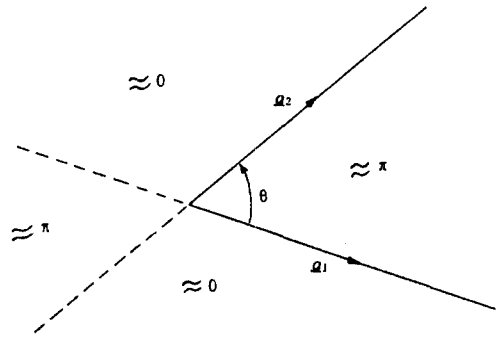


Fig. 6 Sketch of acute and obtuse angle regions of θ when a field point approaches a sector plane

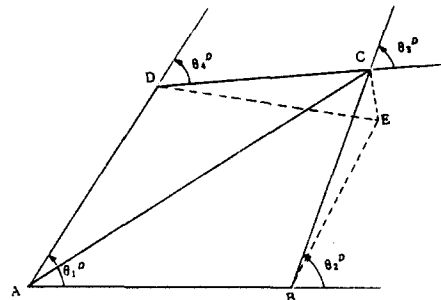


Fig. 7 Typical hyperboloidal panel

2.3 비평면 4각형 판요소의 내각 계산

Hess & Smith[1] 또는 Newman[4]은 4각형 판요소에 분포되어 있는 특이함수에 의해 유기되는 포텐셜을 구할 때, 각 4각형 판요소의 기하학적 특성을 결정하면서 제일 먼저 4각형의 꼭지점을 평균평면에 투영한다. 이와 같은 과정을 거쳐 포텐셜을 계산할 경우에는 식(5)의 표현만으로도 충분하다. 그러나 4각형 판요소의 4개의 꼭지점이 동일 평면상에 있지 않는 효과를 그대로 적용하려 할 경우에는 다음과 같이 특별한 항을 고려 해 주어야 한다. 즉,

$$-4\pi\phi^D = \theta_1^D - \theta_2^D + \theta_3^D - \theta_4^D + \lambda \cdot 2\pi \quad (30)$$

로 표현식을 바꾸고, 유동장점과 θ_n^D 를 결정하는 4개의 sector사이의 상대적인 위치에 따라 λ 를 결정해 주어야 한다. 다음에 열거한 여러 경우에 앞서 유동장점 x_p 가 sector를 이루는 면 가까이에 위치한 경우를 생각하면 Fig. 6에서 보는 바와 같이 θ^D 의 값은 π 또는 0에 가까운 값을 갖는다. 그 값은 sector의 경계선인 2직선을 경계로 한 영역에 따라 정해진다. x_p 가 sector면 법선벡터 방향의 반대쪽에 위치한 경우에는 부호가 반대가 된다. 여러 경우에 대한 λ 값의 결정을 위하여 Fig. 7에 보인 바와 같은 비평면 4각형 판요소를 채택하기로 하자. 여기에서는 유동장점 x_p 의 위치와 각 sector의 상대적인 위치를 가지고 θ_n^D 의 범위를 구하고 그 값을 식(30)에 대입하였을 경우 $-4\pi\phi^D$ 값이 올바른 값이 되도록 λ 를 정해 주도록 한다.

Fig. 7을 살펴보면 평면이 아닌 4각형 판요소 □ABCD는 그중 세 꼭지점으로 이루어지는 평면인 △ABD(또는 □ABED)평면보다 위(오른손으로 A-B-C-D점을 휘어잡을 때 엄지가 가리키는 방향 즉 양의 법선 벡터방향)로 떨어져 존재함을 우선 알 수 있다. 여기서 점 E는 점 D를 삼각형 ABD가 이루는 평면에 투영한 점이다.

Case I :

(i) 유동장점 x_p 가 △ABD, △ABC, △ACD, △BCD보다 위에 위치한 경우:

$$0 \leq \theta_n^D \leq \pi, \quad \lambda = 0 \quad (31)$$

(ii) 유동장점 x_p 가 위의 4개의 삼각형에 대하여 반대위치에 있는 경우:

$$-\pi \leq \theta_n^D \leq 0, \quad \lambda = 0 \quad (32)$$

Case II: 유동장점 x_p 가 △ABD보다는 윗쪽에 있으나 나머지 △ABC, △ACD, △BCD 보다는 아래에 오는 경우:

$$0 \leq \theta_1^D \leq \pi, \quad -\pi \leq \theta_2^D, \theta_3^D, \theta_4^D \leq 0$$

이를 일반화 하여 표현하면,

$$\theta_1^D \cdot \theta_3^D < 0$$

$$\theta_2^D < 0, \quad \theta_4^D < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad (33)$$

Case III: 유동장점 x_p 가 △ABD, △ABC, △ACD보다 윗쪽에 있으나, △BCD보다는 아래쪽에 위치하는 경우:

$$0 \leq \theta_1^D, \theta_2^D, \theta_4^D \leq \pi$$

$$-\pi \leq \theta_3^D \leq 0$$

따라서, 이를 일반화 하면,

$$\theta_1^D \cdot \theta_3^D < 0$$

$$\theta_2^D > 0, \quad \theta_4^D > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad (34)$$

Case IV: 유동장점 x_p 가 △ABD, △BCD, △ABC 보다 위에 위치하지만, △ACD보다 밑에 올 경우:

$$0 \leq \theta_1^D, \theta_2^D, \theta_3^D \leq \pi \quad (35)$$

$$-\pi \leq \theta_4^D \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

Case V: 위와 비슷하게, 유동장점 x_p 가 △ABD, △BCD, △ACD, 위에 위치하지만, △ABC보다 밑에 올 경우:

$$0 \leq \theta_1^D, \theta_3^D, \theta_4^D \leq \pi \quad (36)$$

$$-\pi \leq \theta_2^D \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

Case VI: 꼭지점 A-B-C-D로 이루어지는 4면체 내부에 유동장점이 오는 경우로 자기 자신에 의해 자기 판요소 위의 제어점에 유기되는 포텐셜을 구할 경우

(i) 유동장점 x_p 가 △ABD, △BCD 보다는 위에 위치하고 △ABC, △ACD보다는 아래에 올 경우,

$\theta_1^D > 0, \theta_3^D > 0, \theta_2^D < 0, \theta_4^D < 0$ 인 경우

- x_p 가 $+\hat{n}$ 쪽에 올 경우: $\lambda = 0$
- x_p 가 $-\hat{n}$ 쪽에 올 경우: $\lambda = -2$ (37)

(ii) 유동장점 x_p 가 $\triangle ABD, \triangle BCD$ 보다는 아래에 위치하고 $\triangle ABC, \triangle ACD$ 보다는 위에 올 경우 $\theta_1^D < 0, \theta_3^D < 0, \theta_2^D > 0, \theta_4^D > 0$ 인 경우

- x_p 가 $-\hat{n}$ 쪽에 올 경우: $\lambda = 0$
- x_p 가 $+\hat{n}$ 쪽에 올 경우: $\lambda = 2$ (38)

이상 살펴본 바와 같이 비평면 판요소의 경우에는 θ_n^D 의 계산에 예외적으로 수정해 주어야 할 경우가 많아서 주의를 요한다. 이 중에서 Case II, III 및 VI은 λ 의 값이 영이 아닌 경우이므로 θ_n^D 값의 부호를 비교한 후에 λ 값을 적절히 정해 주어야 한다.

이중 특이한 경우는 Case VI으로, 유동장점(또는 제어점)이 자기 자신의 판요소 위에 위치할 경우에 해당되는 바, 지금까지 평면 판요소의 경우는 $-4\pi\phi^D$ 값이 2π 또는 -2π 값으로 치환하여 사용 하던 경우에 해당된다. 비평면성을 고려하여 계산을 수행할 경우에는 그 크기가 2π 보다 약간 크거나 작 게 값이 계산되어 나옴을 실제 계산에서 볼 수 있 다.

3. 면적분을 선적분으로 변환하는 방법 (방법 2)

3.1 선적분 변환

식 (1)에서 표시되어지는 $\nabla(\frac{1}{R})$ 항을 다음과 같이 한 벡터의 Curl 형태로 변환한다면 Stokes 정 리에 의해 면적분으로 표시된 식 (1)을 선적분 형태 로 표시할 수 있다.

$$\nabla_{\xi}\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla_{\xi} \times \mathbf{A} \quad (39)$$

여기서

$$\mathbf{A} = \frac{\hat{e} \times \mathbf{r}}{r(r + \hat{e} \cdot \mathbf{r})}, \quad r = R \quad (40)$$

이며 단위 벡터 \hat{e} 는 ξ 에 관한 미분 operator ∇_{ξ} 에 대해 무관하도록 잡는다. 본장에서는 거리 벡터를 제 2장과는 부호가 반대인 $\mathbf{r} = \xi - \mathbf{x}_p$ 로 택했다. 위의 식 (40)은 Guiraud[9]에 의해 제시된 식 (39)를 벡터 전개공식을 이용하여 우변항을 전개 하여 좌변항으로 유도하는 방식으로 증명할 수 있다 (Suh[10] 참조).

결국 식(1)은 변환된 식(39)와 Stokes 정리를 이 용하면 다음과 같이 선적분 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} 4\pi\phi^D &= -\int \int \hat{n} \cdot \nabla_{\xi}\left(\frac{1}{R}\right) ds \\ &= \int \int \hat{n} \cdot (\nabla_{\xi} \times \mathbf{A}) ds \\ &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint \frac{\hat{e} \times \mathbf{r}}{r(r + \hat{e} \cdot \mathbf{r})} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (41)$$

여기서 선적분의 방향은 면적요소가 왼쪽에 놓이 도록 요소의 경계를 반시계 방향으로 따라 정의된다.

3.2 사각형 요소에 대한 적분

일반적으로 사각형이 비평면일때 그 평균평면의 법선 벡터 \hat{n}_c 를 정의할 수 있다. 이때 \hat{n}_c 는 적분 변수와는 무관하게 적분범위에 걸쳐 일정하므로 단 위벡터 \hat{e} 로 $\pm \hat{n}_c$ 를 택할 수 있다. 이때, 부호는 $\hat{e} \cdot \mathbf{r}$ 이 양이 되도록 잡는다. 또한 직선변을 갖는 사각형요소에 대해 식 (41)은

$$4\pi\phi^D = \sum_{i=1}^4 \int_0^{S_i} \frac{\hat{e} \times \mathbf{r}}{r(r + \hat{e} \cdot \mathbf{r})} \cdot \hat{e}_{i,i} ds \quad (42)$$

가 된다. 여기서 S_i 는 i 번째 변길이로써 $[0, S_i]$ 는 i 번째 변에 대한 적분구간을 뜻하며 $\hat{e}_{i,i}$ 는 그 적분방향을 나타내는 단위벡터이다. 앞장의 Fig. 2에서와 같이 꼭지점의 번호를 반시계방향으로 정하 고 그에 따른 변의 번호를 정한다. 각 변에 대해

$(\hat{e} \times r) \cdot \hat{e}_{i_1} = r \cdot (\hat{e}_{i_1} \times \hat{e}) = b_i$ 로 일정하므로 다음과 같이 정리가 된다.

$$4\pi\phi^D = \sum_{i=1}^4 b_i \int_0^{S_i} \frac{1}{r(r + \hat{e} \cdot r)} ds \quad (43)$$

임의의 변을 선택하여 적분식을 간단히 한 후 그 결과를 다른 변에 적용해도 일반성을 잃지 않으므로 첫번째 변 ($i = 1$)에 대한 적분항을 생각하기로 한다.

우선

$$\begin{aligned} \hat{e} \cdot r &= \hat{e} \cdot (\xi - x_p) \\ &= \hat{e} \cdot (\xi_1 + s \hat{e}_{i_1} - x_p) \quad (44) \\ &= \delta s + \varepsilon \end{aligned}$$

여기서, $\delta = \hat{e} \cdot \hat{e}_{i_1}$, $\varepsilon = \hat{e} \cdot (\xi_1 - x_p)$

$$\begin{aligned} r^2 = |r|^2 &= (\xi_1 + s \hat{e}_{i_1} - x_p)^2 \quad (45) \\ &= s^2 + \beta s + \gamma \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \hat{e}_{i_1} \cdot (\xi_1 - x_p) \\ \gamma &= |\xi_1 - x_p|^2 = R_1^2 \end{aligned}$$

여기서 γ 는 첫번째 꼭지점으로 부터 유동장점까지의 거리의 제곱을 나타낸다. 첫번째변 ($i = 1$)에 대한 식 (43)의 적분항은 다음과 같이 정리된다.

$$I_1 = \int_0^{S_1} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \beta s + \gamma}(\sqrt{s^2 + \beta s + \gamma} + \delta s + \varepsilon)} ds \quad (46)$$

적분을 수행하기 위해

$$\sqrt{s^2 + \beta s + \gamma} + (s + \frac{\beta}{2}) = t \quad \text{로 치환하면}$$

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t \{ t + (\delta - 1)s + \varepsilon - \frac{\beta}{2} \}} dt \quad (47)$$

여기서 $t_1 = R_1 + \frac{\beta}{2}$, $t_2 = R_2 + s_2 + \frac{\beta}{2}$, R_2 : 두 번째 꼭지점으로부터 유동장점까지의 거리이다. 또

한, $s = \frac{4t^2 + \beta^2 - 4\gamma}{8t} - \frac{\beta}{2}$ 이므로, 식 (47)은

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{(\delta + 1)t^2 + (\beta\delta + 2\varepsilon)t + (\delta - 1)(\frac{\beta^2}{4} - \gamma)} dt \quad (48)$$

이 되며 적분공식을 이용하면 (Gradshteyn & Ryzhik[11]) 다음과 같이 선적분항을 표시할 수 있다.

$$I_1 = 2 \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{b + 2ct - \sqrt{-\Delta}}{b + 2ct + \sqrt{-\Delta}} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} & \text{if } \Delta < 0 \\ \frac{-2}{b + 2ct} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} & \text{if } \Delta = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \text{Arctan} \frac{b + 2ct}{\sqrt{\Delta}} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} & \text{if } \Delta > 0 \end{cases} \quad (49)$$

여기서

$$\begin{aligned} a &= (\delta - 1)(\frac{\beta^2}{4} - \gamma) \\ b &= (\beta\delta + 2\varepsilon) \\ c &= (\delta + 1) \\ \Delta &= 4ac - b^2 \end{aligned}$$

(49)는 첫번째 변 ($i = 1$)에 대한 적분항을 표시한 것으로 다른 변에 대해서도 동일하게 적용할 수 있다. 따라서 식 (43)은

$$4\pi\phi^D = \sum_{i=1}^4 b_i I_i \quad (50)$$

와 같은 형태로 표시되며 다만 각변 또는 꼭지점을 나타내는 첨자 i 를 포함하고 있는 각항과 각식을 첨자 i 에 맞추어 표기하여야 한다.

4. 쏘오스에 의해 유기되는 포텐셜

다이폴의 경우에는 비평면 판요소의 영향을 고려한 포텐셜 계산이 용이하지만, 비평면 판요소에 분포된 쏘오스에 의해 유기되는 포텐셜의 계산은 용이하지가 않다. 따라서 여기에서는 Morino et al.[6] 및 Hsin[5] 등에 의해 사용되어 온 바와 같이 평균

평면에 투영하여 얻은 4각형 판요소에 대한 다음과 같은 식을 사용하기로 한다. 즉,

$$-4\pi\phi^S = \theta_1^S - \theta_2^S + \theta_3^S - \theta_4^S - (\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})_c - 4\pi\phi^D \quad (51)$$

여기에서

$$\theta^S = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_c) \sinh^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_2|} \right) - (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_c) \sinh^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_1|} \right) \quad (52)$$

윗식에서 \boldsymbol{r} 은 각 꼭지점에서 유동장점까지의 거리 벡터이며, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 는 Fig. 2에서 보듯이 다이폴의 경우와 마찬가지로 정의된 단위 벡터이고, $\hat{\boldsymbol{n}}$ 는 평균평면에서 구한 단위 법선 벡터이다. 또한 하첨자 c 는 평균 평면의 중심점을 의미한다.

윗식에서 $-4\pi\phi^D$ 는 이미 앞에서 구한 비평면 다이폴에 의한 유기 포텐셜 값을 사용하며, arc sinh 값을 계산하기 위하여는 다음식을 사용한다.

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (53)$$

5. 계산 예

제2장과 제3장에서 기술한 2가지 방법에 의한 유기포텐셜 계산결과를 비교함으로써 서로 다른 방법을 상호간 검증할 수 있다. 특별한 경우로 A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0.1), D(0, 1, 0)의 꼭지점으로 이루어진 Fig. 7의 비평면 패널 형태의 사각형을 잡고 여러 유동장점에서 유기 포텐셜을 계산하여 그 결과를 Table 1에 보였다. 여기서 평균평면으로 근사화한 후 계산된 결과도 같이 비교하였다(Suh[12]). Table 1에서 본 논문의 제1, 제2 방법의 프로그램은 HPpot, HRpot3으로 명명되어 있으며, Suh의 프로그램은 PRpotc로 명명되어 있다. Table 1에서 경우 1, 2, 3은 유동장점이 점차로 분포면에 가까이 접근함에 따라 유기포텐셜의 변화를 보이고 있다. 경우 4는 유동장점이 꼭지점에 매우 가까이 위치한 경우에, 경우 5, 6, 7은 유동장점이 분포면으로부터 어느 정도 떨어져 있는 경우에 해당된다. 모든 경우에 방법 1과 방법 2에 의해 계산된 결과는 동일하기 때문에 두 방법에 의한 유기포텐셜 계산은 타당한 것으로

여겨진다. 또한 평균평면으로 근사화한 후 계산된 결과와 같은 경향을 보이고 있으나 상대적인 차이는 경우 1, 2, 3 보다 경우 4, 5, 6, 7에서 더 크게 나타나고 있다.

6. 결 언

쌍곡면상에 분포한 다이폴에 의한 유기포텐셜을 근사화 과정없이 엄밀하게 계산하는 2가지 방법, 즉, Gauss-Bonnet 정리를 이용하는 방법과 면적분을 선적분으로 치환하는 방법, 을 각각 유도하고 수치계산 예를 보임으로써, 해석방법이 타당함을 보였다. 또한, 2개의 별도의 유도과정에 근거한 별도의 프로그램 사이에는 계산시간의 차이가 무시할 만큼 적음이 확인되었다. 쌍곡면 패널 프로그램을 사용할 때 한가지 유념할 점은 프로그램내에서 꼭지점의 번호를 매기는 순서에 따라 쌍곡면의 형상이 2가지로 정의될 수 있으므로 본래의 예상과는 달리 반대 부호의 값을 얻을 수 있다. 실제로 패널 방법의 수치해석 적용시 이와 같은 현상은 자기 패널에 의한 유기포텐셜을 계산하는 경우 (즉 self-induced potential의 경우)에만 나타나기 때문에 프로그램내에서 이를 제어하는 변수를 통해 부기적으로 제어함으로써 문제를 해결할 수 있다. 이상의 해석 결과를 3차원 물체주위의 포텐셜유동 해석에 활용할 수 있고 특히 프로펠러 성능해석 및 설계 등에 널리 이용할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Hess, J.L. & Smith, A.M.O., "Calculation of Nonlifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies," J. of Ship Research, Vol. 8, No. 2, pp. 22-44, 1964.
- [2] Hess, J.L., "Higher Order Numerical Solution of the Integral Equation for the Two-Dimensional Neumann Problem," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2, pp. 1-15, 1973.
- [3] Lee, J.-T., "A Potential Based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in Steady Flow," PhD Thesis, MIT, Dep't of Ocean Eng'g, 1987.
- [4] Newman, J.N., "Distribution of Sources and

- Normal Dipoles over a Quadri-lateral Panel," J. of Engineering Mathematics, Vol. 20, pp. 113-126, 1986.
- [5] Hsin, C.-Y., "Development and Analysis of Panel Methods for Propellers in Unsteady Flow," PhD Thesis, MIT, Dep't of Ocean Eng'g, 1990.
- [6] Morino, L., Chen, L.T. & Suciu, E.O., "Steady and Oscillatory Subsonic Aerodynamics around Complex Configurations," AIAA J., Vol. 13, No. 3, pp. 369-374, 1975.
- [7] Hoshino, T., "Hydrodynamic Analysis of Propellers in Steady Flow using a Surface Panel Method," J. of SNAJ, Vol. 165, pp. 55-70, 1989.
- [8] ÓNeill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, 1966.
- [9] Guiraud, J.P., "Potential of Velocities Generated by a Localized Vortex Distribution", Aerospace Research, English Translation ESA-TT-560, 1978.
- [10] Suh, J.C., "Review of the Paper: Calculation of the Integrals of the Singularity Method by Cantaloube and Rehbach", KRISO, PTL Report 22-90, 1990.
- [11] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, 1965.
- [12] Suh, J.C., "Analytical Evaluation of the Surface Integral in the Singularity Methods," 대한조선학회 논문집, 제 29권 제1호, pp. 14-28, 1992.

Table. 1 Potential induced by a dipole distribution on a hyperboloidal panel
(a non-planar panel with a protruding vertex)

Case	Field Point	Method 1 (HRpot)	Method 2 (HRpot 3)	Mean Surface (PRpotc)
1	(0.5, 0.5, 0.1)	-0.4333560	-0.4333560	-0.4333560
2	(0.5, 0.5, 0.06)	-0.4686615	-0.4686615	-0.4686696
3	(0.5, 0.5, 0.03)	-0.4954903	-0.4954903	-0.4955154
4	(0, 0, 0.001)	-0.1295431	-0.1295431	-0.1225828
5	(-0.5, -0.5, 0)	-0.1770131 E-2	-0.17701310 E-2	-0.2649845 E-2
6	(1.0, 1.0, 0)	0.1250000	0.1250000	0.1269141
7	(3.0, 3.0, 3.0)	-0.2202454 E-2	-0.2202454 E-2	-0.2215343 E-2