

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 32 卷 第 1 號 1995年 2月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architecture of Korea  
 Vol. 32, No. 1, February 1995

## 소성 압축성을 고려한 평판의 소성 좌굴해석

신찬호\*, 김영복\*

### Plastic Buckling Analysis of Rectangular Plates Considering Plastic Compressibility

by

Chan-Ho Shin\* and Young-Bok Kim\*

#### 요 약

본 연구에서는 2축 방향의 압축/인장 하중을 받는 단순지지된 평판에 대하여 소성 압축성을 고려한 소성좌굴해석을 수행하였다. 2축하중을 받는 직사각형 평판의 소성 좌굴은 두개의 기계역학적 개념에 의해 지배를 받는데, 인장 강화와 소성 열화가 그것으로 인장과 압축이 적절히 결합함으로써 좌굴강도를 결정할 수 있게 된다. 소성 압축성을 고려하기 위해, Drucker-Prager의 소성 포텐셜이론을 택하였다. 소성 변형률이 작을 때와 재료의 등방성 경화만을 가정하면 직사각형 평판에 관한 일반적인 고유방정식을 유도할 수 있게 된다.

#### Abstract

In this study the plastic buckling analysis of a simply supported plate under biaxial compression/tension loading is carried out considering the plastic compressibility. Plastic buckling of a biaxially loaded rectangular plate is governed by two kinds of mechanism, the tension strengthening and plastic weakening under which the optimal combination of tension and compression is obtained for the buckling strength. To consider the plastic compressibility, the Drucker-Prager plastic potential is employed. General eigenvalue equations are derived for a rectangular plate within the framework of small strain plasticity and isotropic hardening.

---

발 표 : 1994년도 대한조선학회 추계연구발표회(1994. 11. 12)

접수일자 : 1994년 12월 12일, 재접수일자 : 1995년 2월 16일

\* 정회원, (사)한국선급 기술연구소

1. 서론

인장과 압축의 2축 하중을 받는 직사각형 평판의 탄성 좌굴해석에서는 인장하중의 증가에 따라 좌굴강도가 증가하지만 소성영역에서는 이러한 좌굴강도의 증가를 기대할 수 없다. 소성영역에서의 좌굴강도 저하는 인장하중에 의한 좌굴강도의 증가를 능가하므로 결국 좌굴하중은 감소한다 [1]. 또한, 일반적인 소성해석에서는 소성 비압축성 (plastic incompressibility)을 가정하지만 잠수함의 선각에 사용되는 HY-80 Steel과 같은 고장력강은 소성영역에서 재료의 거동이 정수압 응력 (hydrostatic stress)의 영향을 받게 되고 소성 압축성 (plastic compressibility)을 나타내므로 [2] 소성 좌굴해석에서는 이를 고려하여야 한다.

본 연구에서는 인장과 압축의 2축 하중을 받는 단순지지 직사각형 평판의 소성 좌굴해석을 위한 고유방정식 (eigenvalue equation)을 유도하고, 소성 압축성을 고려하기 위하여 응력텐서의 일차 불변량 (first invariant)을 포함하는 Drucker-Prager의 소성 포텐셜 [3]을 사용하였다. 또한, 이 소성 포텐셜을 이용하면 인장과 압축 항복응력의 차이 (strength-differential effect)를 나타내는 재료의 거동을 설명할 수 있다 [4]. 소성해석에서는 미소변형 (small strain)과 등방성 가공경화 (isotropic hardening)를 가정하였으며, 본 연구 결과를 이용하면 소성 비압축성 재료는 물론 소성 압축성 재료로 만들어진 평판에 대하여 좌굴강도 향상을 위한 인장/압축 하중비를 얻을 수 있다.

2. 평판의 좌굴강도 해석

인장 ( $\sigma_x = \xi p$ )과 압축 ( $\sigma_y = -p$ )을 동시에 받는 Fig. 1과 같은 단순지지 직사각형 평판의 좌굴방정식은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{t^2}{12} \{ D_{xx} dw,_{xxxx} + 2(D_{xy} + 2G_{xy}) dw,_{xxyy} + D_{yy} dw,_{yyyy} \} - \xi p dw,_{xx} + p dw,_{yy} = 0 \quad (1)$$

여기서  $dw$ 는 좌굴에 의한 평판 처짐의 미소증분이며,  $t$ 는 평판의 두께, 그리고  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$ ,

$D_{yy}$ ,  $G_{xy}$ 는 평면 응력상태에 대한 구성방정식 (constitutive equation)에서 순간계수 (instantaneous modulus)를 나타낸다.

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= D_{xx} d\epsilon_x + D_{xy} d\epsilon_y \\ d\sigma_y &= D_{xy} d\epsilon_x + D_{yy} d\epsilon_y \\ d\tau_{xy} &= G_{xy} d\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

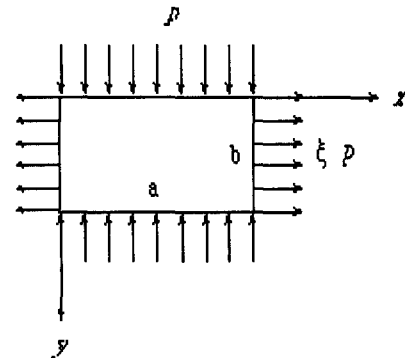


Fig. 1 Rectangular plate under biaxial loading

단순지지 평판에 대한 고유방정식을 구하기 위하여 처짐의 미소증분을 다음 식으로 가정하면

$$dw = dA \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

(1)식으로부터 다음의 고유방정식을 세울 수 있다.

$$\begin{aligned} (\xi m^2 - n^2 r^2) p + \zeta \{ D_{xx} m^4 + 2(D_{xy} + 2G_{xy}) m^2 n^2 r^2 + D_{yy} n^4 r^4 \} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $m$ 과  $n$ 은 각각 평판 좌굴현상에서 나타나는  $x$ 방향과  $y$ 방향의 반 파형 (half-wave) 갯수이며,

$$\zeta = \frac{\pi^2 t^2}{12a^2}, \quad r = a/b \quad (5)$$

이다.  $\xi$ 가 작은 평판은 탄성영역에서 좌굴을 일으키며 (4)식으로 부터 다음의 탄성 좌굴하중을 구할 수 있다.

$$\frac{p}{\xi} = \frac{\frac{E}{1-\nu^2} (r^2 n^2 + m^2)^2}{r^2 n^2 - \xi m^2} \quad (6)$$

Fig. 2는 주어진  $r$ 과  $\xi$ 에 대한 탄성 좌굴하중을 나타내며, 인장하중의 증가에 따라 좌굴강도가 증가함을 알 수 있다.

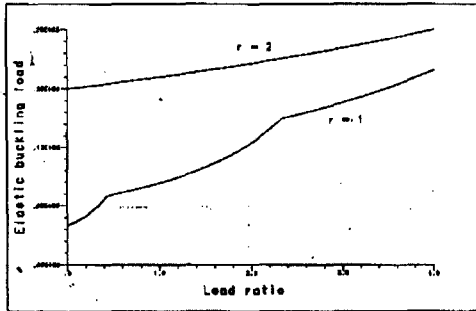


Fig. 2 Elastic buckling load  $p/(E\xi)$  with load ratio  $\xi$ ,  $\nu=0.3$

### 3. 소성 좌굴해석

$\xi$  ( $\xi < 1$ )가 큰 평판은 소성영역에서 좌굴을 일으키며 이때의 순간계수  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{yy}$ ,  $G_{xy}$ 는 하중  $p$ 와  $\xi$ 에 따라 변하게 된다. 일반적으로 탄소성 해석을 위한 구성방정식은 다음 식으로 나타낼 수 있으며

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijrs}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} D_{tnkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tn}}}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \quad (7)$$

여기서  $D_{ijkl}^e$ 은 탄성계수,  $f$ 는 항복함수 (yield function),  $H$ 는 소성계수 (plastic modulus)를 나타낸다 [5]. 소성계수  $H$ 는 응력-변형을 곡선에서

접선계수 (tangent modulus)  $E_t$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \quad (8)$$

소성 압축성을 고려하기 위하여 본 연구에서는 Drucker-Prager 소성 포텐셜

$$F = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} \quad (9)$$

을 사용하였으며,  $J_1$ 은 응력텐서의 1차 불변량,  $J_2$ 은 편차응력 (deviatoric stress)의 2차 불변량 (second invariant)을 나타낸다. (9)식에서 재료상수  $\alpha$ 는 인장 및 압축 시험을 통하여 다음과 같이 구할 수 있다 [6].

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{yc} - \sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} \quad (10)$$

여기서  $\sigma_{yc}$ 와  $\sigma_{yt}$ 는 각각 압축항복응력 및 인장항복응력을 나타낸다. 또한, 재료의 거동이 Drucker-Prager 소성 포텐셜에 따르는 경우 등가응력 (equivalent stress)은 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3\alpha+1}} (\alpha J_1 + \sqrt{J_2}) \quad (11)$$

재료상수  $\alpha$ 는 소성 Poisson 상수의 범위로 부터 다음의 유효범위를 갖게된다.

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{12}} \quad (12)$$

특히  $\alpha=0$  ( $\sigma_{yt}/\sigma_{yc} = 1$ )인 경우에는 (11)식으로 부터 von Mises의 항복조건이 주어짐을 알 수 있다.

Fig. 1과 같은 직사각형 평판의 면내 2축 하중 (in plane biaxial loading)에 의한 응력은 평면응력 상태이고 주응력과 일치하므로 순간계수는 (7)식과 (11)식을 이용하여 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있

다.

$$\begin{aligned}
 D_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( 1 - \frac{(1 - \frac{E_t}{E})d_{11}}{\frac{E_t}{E}d_{01} + (1 - \frac{E_t}{E})d_{02}} \right) \\
 D_{xy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu - \frac{(1 - \frac{E_t}{E})d_{12}}{\frac{E_t}{E}d_{01} + (1 - \frac{E_t}{E})d_{02}} \right) \\
 D_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( 1 - \frac{(1 - \frac{E_t}{E})d_{22}}{\frac{E_t}{E}d_{01} + (1 - \frac{E_t}{E})d_{02}} \right) \\
 G_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= [ \sqrt{3}\alpha(1+\nu) + \eta(1+2\xi - \nu(2+\xi)) ]^2 \\
 d_{12} &= [ \nu(\sqrt{3}\alpha + \eta(1+2\xi)) + \sqrt{3}\alpha - \eta(2+\xi) ] \\
 &\quad \times [ \sqrt{3}\alpha + \eta(1+2\xi) + \nu(\sqrt{3}\alpha - \eta(2+\xi)) ] \\
 d_{22} &= [ \sqrt{3}\alpha(1+\nu) + \eta(\nu(1+2\xi) - (2+\xi)) ]^2 \\
 d_{01} &= (1-\nu^2)(1+\sqrt{3}\alpha)^2 \\
 d_{02} &= 2(1+\nu) \{ 3\alpha^2 - \sqrt{3}\alpha\eta(1-\xi) \} \\
 &\quad + \eta^2 \{ (1-\xi)^2 + 2(1-\nu)(1+2\xi)(2+\xi) \} \\
 \eta &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\xi+\xi^2}}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

소성영역에서 재료의 거동이 다음의 응력-변형률 곡선에 따른다면,

$$\epsilon = c \cdot \sigma^N \tag{15}$$

접선계수  $E_t$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E_t &= \frac{d\sigma}{d\epsilon} \\
 &= \frac{1}{cN} \sigma^{1-N}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

윗 식에서  $c$ 와  $N$ 은 재료상수이며, 구성방정식

(7)식을 1축 응력상태 (uniaxial stress state)에서 나타내면 (16)식에 의한 재료의 거동을 표현할 수 있다. 여기서 평면응력 상태에 대한  $J_1$  및  $J_2'$ 을 계산하면

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (\xi-1)p \\
 J_2' &= \frac{1}{3}(1+\xi+\xi^2)p^2
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

이므로 접선계수  $E_t$ 는 (11)식과 (17)식을 이용하여 (16)식으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E_t &= e_{00} p^{1-N} \\
 e_{00} &= \frac{1}{cN} \left\{ \frac{\sqrt{3}\alpha(\xi-1) + 1/(2\eta)}{1+\sqrt{3}\alpha} \right\}^{1-N}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

윗 식에서 접선계수  $E_t$ 는 하중  $p$ 의 함수이므로 (13)식으로부터 순간계수도 하중  $p$ 의 함수가 됨을 알 수 있다. 이렇게 계산된 순간계수를 (4)식에 대입하여 정리하면 다음과 같이 직사각형 평판에 대한 고유방정식을 세워 좌굴하중을 구할 수 있다.

$$a_1 p^N + a_2 p^{N-1} + a_3 p + a_4 = 0 \tag{19}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 a_1 &= d_{02}(1-\nu^2)(\xi m^2 - n^2 r^2) \\
 a_2 &= E_t \zeta \{ d_{02}(m^2 + n^2 r^2)^2 - (d_{11} m^4 \\
 &\quad + 2d_{12} m^2 n^2 r^2 + d_{22} n^4 r^4) \} \\
 a_3 &= \frac{1}{E} e_{00} (d_{01} - d_{02})(1-\nu^2)(\xi m^2 - n^2 r^2) \\
 a_4 &= e_{00} \zeta \{ (d_{01} - d_{02})(m^2 + n^2 r^2)^2 + d_{11} m^4 \\
 &\quad + 2d_{12} m^2 n^2 r^2 + d_{22} n^4 r^4 \}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

#### 4. 수치계산 및 검토

본 연구에서는 계산에로 다음의 기하학적 및 재료 특성을 갖는 평판에 대하여 소성 좌굴해석을 수행하였다.

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.001 \\ E &= 10^4 \text{ kg/mm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ N &= 3 \\ c &= 10^{-7} (\text{kg/mm}^2)^{-3} \end{aligned}$$

좌굴해석은 인장하중 방향 ( $x$  방향)으로  $m=1$ , 압축하중 방향 ( $y$  방향)으로  $n=1, 2, 3$ 에 대하여 계산을 수행하였으며, 소성 비압축성 ( $\alpha=0$ )과 소성 압축성 ( $\alpha=0.2886$ )을 고려하였다.

Fig. 3은 직사각형 평판 ( $r=1.5$ )에서 인장/ 압축 하중비  $\xi$ 에 대한 소성 좌굴하중을 나타내었다.  $\alpha=0.2886$ 인 소성 압축성 재료는 인장하중의 증가에 따라 좌굴강도가 증가하여 탄성좌굴 (Fig. 2)과 같은 변화를 나타내며, 소성 비압축성 재료보다 높은 좌굴강도를 갖는다. 그러나 소성 비압축성 재료는  $\xi=1.6$ 일때 가장 높은 소성 좌굴강도를 나타내며,  $\xi=1.6$ 을 기준으로 하여 인장하중이 증가할 수록 소성 좌굴하중은 감소한다.

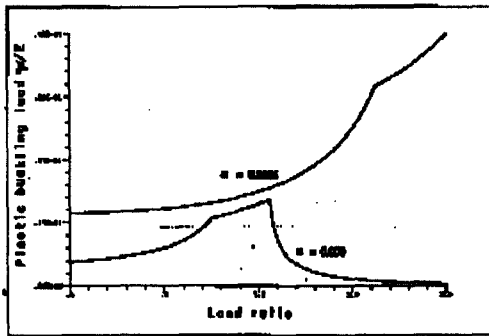


Fig. 3 Plastic buckling load  $p/E$  with load ratio  $\xi$  for a rectangular plate ( $r=1.5$ )

Fig. 4에서는 정사각형 평판 ( $r=1$ )에서 인장/ 압축 하중비  $\xi$ 에 대한 소성 좌굴하중을 나타내었다.  $\alpha=0.2886$ 인 소성 압축성 재료는 역시 탄성좌굴과 같은 변화를 나타내며, 소성 비압축성 재료보다 높은 좌굴강도를 갖는다. 그러나 이 경우 소성 비압축성 재료는  $\xi=1.06$ 일때 가장 높은 소성 좌굴강도를 갖는다.

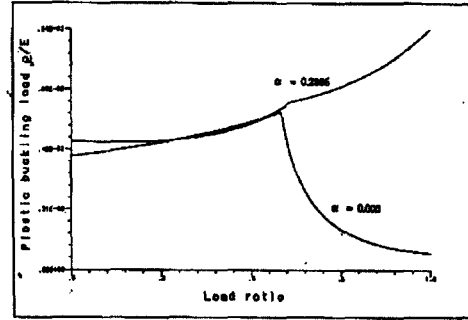


Fig. 4 Plastic buckling load  $p/E$  with load ratio  $\xi$  for a square plate ( $r=1$ )

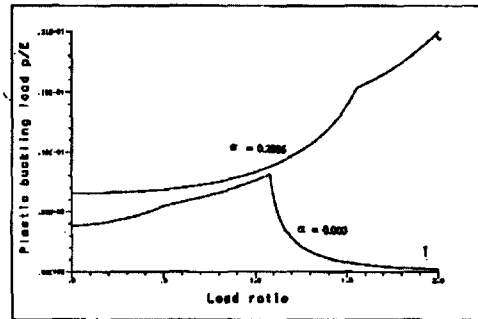


Fig. 5 Plastic buckling load  $p/E$  with load ratio  $\xi$  for a rectangular plate ( $r=0.5$ )

Fig. 5에서는 직사각형 평판 ( $r=0.5$ )의 소성 좌굴강도를 나타냈다. 여기서  $\xi < 0.6$  일때 소성 비압축성 재료와 소성 압축성 재료의 좌굴강도가 거의 동일하며, 소성 비압축성 재료는  $\xi=0.6$ 을 기준으로 하여 인장하중의 증가에 따라 좌굴하중이 감소한다.

### 5. 결론

구조물의 좌굴강도를 평가하기 위하여는 우선 탄

성좌굴해석을 수행하여 탄성좌굴응력을 구하고, 이 좌굴응력이 탄성한계를 초과하는 경우에는 좌굴이 소성영역에서 발생하므로 소성좌굴해석을 수행한다.

본 연구에서는 2축 하중을 받는 직사각형 평판에 대한 탄성 및 소성 좌굴하중을 구하기 위한 일반적인 식을 유도하였다. 특히 소성 좌굴해석에서는 소성 압축성을 고려할 수 있는 Drucker-Prager 소성 포텐셜을 이용하였으며 Strength-Differential Effect를 나타내는 재료의 좌굴강도도 함께 평가할 수 있다. 또한, 본 연구 결과를 이용하면 압축성 또는 비압축성 재료의 평판 좌굴강도 향상을 위한 인장/압축 하중비를 제시할 수 있다.

#### 참 고 문 헌

- [1] Durban, D, Plastic Buckling of Rectangular Plates Under Biaxial Loading, Buckling of Structures, Elsevier, Amsterdam, pp.183-194, 1988
- [2] Spitzig, W.A., Sober, R.J. and Richmond, O., "The Effect of Hydrostatic Pressure on the Deformation Behavior of Maraging and HY-80 Steels and its Implications for Plasticity Theory", *Met. Trans.*, Vol.7A, pp.1703-1710, 1976
- [3] Drucker, D.C. and Prager, W., "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", *Quart. Appl. Mech.*, Vol.10, pp.157-165, 1952
- [4] Betten, J. and Borrmann, M., "Einfluss der plastischen Kompressibilitaet und des Strength-Differential-Effektes auf das Fliessverhalten von Sinter- und Polymerwerkstoffen", *Rheol. Acta*, Vol.23, pp.109-116, 1984
- [5] Owen, D.R.J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge, Swansea, 1980
- [6] Betten, J. and Shin, C.H., "Inelastic Analysis of Plastic Compressible Materials Using the Viscoplastic Model", *Int. J. Plast.*, Vol.8, pp.977-985, 1992