

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 32 卷 第 1 號 1995 年 2 月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 32, No. 1, February 1995

## 통계적 부분선형화 방법을 이용한 선체의 불규칙 횡동요 운동의 해석

김동수\*, 이원경\*\*

### Analysis of Random Ship Rolling Using Partial Stochastic Linearization

by

Dong Soo Kim\* and Won Kyoung Lee\*\*

#### 요 약

불규칙 해상에서의 선체의 횡동요운동을 해석하기 위하여 통계적 부분선형화 방법을 사용하였다. 선형 1자유도계인 횡동요 운동 모델에 2차의 비선형 감쇠항과 3차 및 5차, 7차, 9차, 11차의 비선형 복원 모멘트를 추가하였으며 불규칙 기진모멘트는 가우스 백색잡음으로 가정하였다. 이 해석 결과를 등가선형화 방법으로 구한결과와 비교한 결과 부분선형화 방법이 반드시 더 정확한 결과를 주는 것은 아니란 점을 확인하였다.

#### Abstract

In order to analyze the rolling motion of a ship in random beam waves we use the partial stochastic linearization method. The quadratic damping and the nonlinear restoring moments given by the odd polynomials up to the 11th order are added to a single degree of freedom linear equation of roll motion. The irregular excitation moment is assumed to be the Gaussian white noise. The statistical characteristics of the response by the partial stochastic linearization method is compared with results by the equivalent linearization method and Monte Carlo simulation. It is found that the partial stochastic linearization method is not necessarily superior to the equivalent linearization method.

---

발 표 : 1993년도 대한조선학회 춘계연구발표회('93. 11. 12)

접수일자 : 1994년 8월 1일, 재접수일자: 1994년 10월 19일

\* 현대중공업(주) 선박해양연구소

\*\* 정희원, 영남대학교 기계공학과

1. 서론

횡동요 운동이 선체운동을 지배하는 경우에는 불규칙 해상에서의 선체운동은 불규칙 기진력을 가진 1자유도계의 운동방정식으로 나타낼 수 있다. 상당히 제한적인 경우를 제외하곤 그 응답의 통계적 특성을 완전히 구한다는 것이 불가능하므로 많은 연구자들은 근사해법에 의존하고 있다. 여러 근사해법 중에는 선형계의 해석이 간편하고도 완벽하다는 점에 착안하여 원래의 비선형계와는 어떤 의미로는 등가인 성격을 가지는 선형계로 대체하여 해석하는 방법이 있는데 이 방법을 등가선형화 방법이라고 한다. Caughey[1]이래 많은 연구자들[2, 3, 4]이 이 방법을 발전시켜오고 있지만 강비선형계(strongly nonlinear system)의 경우에는 이 방법에 의한 결과와 simulation 결과와의 오차를 줄이는 데는 한계가 있다. 따라서 최근에는 원래의 비선형계를 완전해가 알려진 비선형계로 대체하는 방법 즉 등가비선형화 방법이 제안되었다[5, 6]. 선형 감쇠력과 임의의 비선형 복원력을 가지는 비선형계가 완전해를 가진다는데 착안하여 Elishakoff 등[7]은 등가비선형화 방법을 적용하는데 따르는 어려움을 피하기 위하여 통계적 부분선형화 방법을 사용하게 되었다. 이 이름은 복원력항은 비선형인 채로 남겨두고 비선형 감쇠항만을 선형화 한다는 데서 붙여진 것이다.

본 연구에서는 이 부분선형화 방법을 사용하여 불규칙 해상에서의 선체의 횡동요 운동을 해석하였다. 선형 1자유도계인 횡동요 운동 모델에다가 2차의 비선형 감쇠항과 3차 및 5차, 7차, 9차, 11차의 비선형 복원모멘트를 추가하였으며 불규칙 기진모멘트는 가우스 백색잡음으로 가정하였다. 이 해석 결과를 등가선형화 방법으로 구한결과와 비교한 결과 부분선형화 방법이 반드시 더 정확한 결과를 주는 것은 아니란 점을 확인하였다.

2. 운동방정식

다음과 같은 비선형 미분방정식으로 표현된 선체의 횡동요 운동을 생각하기로 하자.

$$I\ddot{\phi} + B(\dot{\phi}) + K(\phi) = M(t) \tag{1}$$

여기서,  $\phi$ 는 선체의 횡동요각,  $I$ 는 횡동요 중심을 지나는 길이방향 축에 대한 선체의 질량관성모멘트,  $B(\dot{\phi})$ 는 감쇠모멘트,  $K(\phi)$ 는 복원모멘트,  $M(t)$ 는 파도에 의한 기진모멘트(excitation moment)를 나타낸다.

식 (1)을  $I$ 로 나누면 다음과 같다.

$$\ddot{\phi} + H(\dot{\phi}) + G(\phi) = F(t) \tag{2}$$

여기서,  $H=B/I$ ,  $G=F/I$ ,  $F=M/I$ 이다. 일반적으로  $H(\dot{\phi})$ 와  $G(\phi)$ 는 비선형 함수인데 많은 실험적 연구[8, 9]에 의하면  $H(\dot{\phi})$ 는 진폭이 큰 횡동요 운동에 대해서 다음과 같이 선형항과 2차의 비선형항의 합으로 나타나는 경우도 있다.

$$H(\dot{\phi}) = \beta_1\dot{\phi} + \beta_2\dot{\phi}|\dot{\phi}| \tag{3}$$

여기서,  $\beta_1$ 과  $\beta_2$ 는 각각 선형, 2차 감쇠계수를 나타낸다. 또한 복원 모멘트  $G(\phi)$ 는 다음과 같이  $\phi$ 의 홀수차 다항식(odd polynomials)의 형태로 쓸 수 있다.

$$G(\phi) = \alpha_1\phi + \alpha_3\phi^3 + \alpha_5\phi^5 + \dots \tag{4}$$

여기서  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_5$ 는 각각 선형, 3차, 5차의 복원 계수(restoring coefficients)를 나타낸다.

복원 모멘트를 11차항까지 고려하고 식 (3)과 (4)를 식 (2)에 대입하면 다음의 횡동요운동방정식을 얻게된다.

$$\ddot{\phi} + \beta_1\dot{\phi} + \beta_2\dot{\phi}|\dot{\phi}| + \sum_{k=1,3,\dots}^{11} \alpha_k\phi^k = F(t) \tag{5}$$

여기서 기진모멘트  $F(t)$ 는, 평균(mean)이 0 인 가우스 정상과정(Gaussian stationary process)이며 파워 스펙트럼 밀도가  $S_F(\omega) = S_0$ 인 백색잡음(white noise)이라고 가정한다.

3. 통계적 부분선형화 방법(Partial stochastic linearization method)을 이용한 해석

우선 다음의 진동계를 생각해 보자.

$$\ddot{\phi} + \beta_e\dot{\phi} + \alpha(\phi) = F(t) \tag{6}$$

여기서  $\alpha(\phi)$ 는 비선형 복원모멘트를,  $F(t)$ 는 식 (5)에서 주어진 기진모멘트를 각각 나타낸다. 식 (6)의 완전해로서 정상 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다 [13, 14].

$$p(\phi, \dot{\phi}) = C \exp \left[ -\frac{\beta_e}{\pi S_0} \left\{ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \int_0^\phi \alpha(\xi) d\xi \right\} \right] \tag{7}$$

여기서 C는 다음과 같은 정규화 조건(Normalization condition)으로 부터 구해지는 상수이다.

$$C = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\beta_e}{\pi S_0} \left\{ \frac{\phi^2}{2} + \int_0^{\phi} \alpha(\xi) d\xi \right\} \right] d\phi d\dot{\phi} \right]^{-1} \quad (8)$$

이제  $\alpha(\phi) = \sum_{k=1,3,\dots}^{11} \alpha_k \phi^k$  로 두면 부분선형화 방법을 이용하여 식 (5)를 해석하는 문제는 감쇠모멘트항과 복원모멘트항이 모두 비선형인 원래계로부터 감쇠모멘트항만 등가인 선형항으로 대체하기 위하여 등가 감쇠계수  $\beta_e$ 를 찾는 문제로 바뀐다. 이렇게 하면 복원력항은 그대로 유지되므로 어떤 의미에서는 등가선형화 방법보다 더 정확한 해를 줄 것으로 짐작할 수 있으며, 등가의 복원력계수  $\omega_e^2$ 를 구하지 않아도 되므로 더 간편하다고 말할 수 있다. 김동수와 이원경[11]에 따르면 다음의 대수방정식으로 부터 계수  $\beta_e$ 를 구할 수 있다.

$$X^3 - \beta_1 X - 1.59577 \beta_2 \sqrt{\pi S_0} = 0 \quad (9)$$

여기서  $X = \sqrt{\beta_e}$  이며 이렇게 구한  $\beta_e$ 를 식 (7)과 (8)에 대입하여 결합 확률밀도함수를 구하면 횡동요각에 대한 확률밀도함수와 제곱평균값은 각각 다음식들로부터 구해진다.

$$p(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi, \dot{\phi}) d\dot{\phi} \quad (10)$$

$$\sigma_{\phi}^2 = E[\phi]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2 p(\phi) d\phi \quad (11)$$

#### 4. 결과 및 검토

본 연구에서는 식 (5)의 계수  $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}$ 를 위하여 소형 화물선 'Lucie Schulte' [12]의 경우만을 고려 하였다. 화물을 실은 경우(full load)와 실지 않은 경우(ballast)에 대하여 이 계수들의 값이 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 1은 화물을 실은 경우와 실지 않은 경우에 대한 위치에너지를 그린 것인데 full load인 경우에는 평형점  $\phi = 0$ 이 ballast의 경우와는 달리 대국적으로 안정한 평형점이 아니라 국소적으로 안정한 평형점이 됨을 보여주고 있다. 그 이유는 복원력항의 최고차 계수  $\alpha_{11}$ 가 -0.6818으로 음수이기 때문이다. 이것은 full load인 경우에는 위치에너지가 최대인(복원력이 소멸하는) 횡동요각보다 운동이 더 커지면 응답이 무한히 커질 수 있음(unbounded)을 암시한다. 여기서 위치

Table 1 Main parameters of the motor ship 'Lucie Schulte'

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_5$	$\alpha_7$	$\alpha_9$	$\alpha_{11}$
full load	0.0246	0.0225	0.2555	-0.7265	2.2969	-3.7463	2.6919	-0.6818
ballast	0.0623	0.0367	0.5137	1.0881	-3.1496	3.0563	-1.3262	0.2109

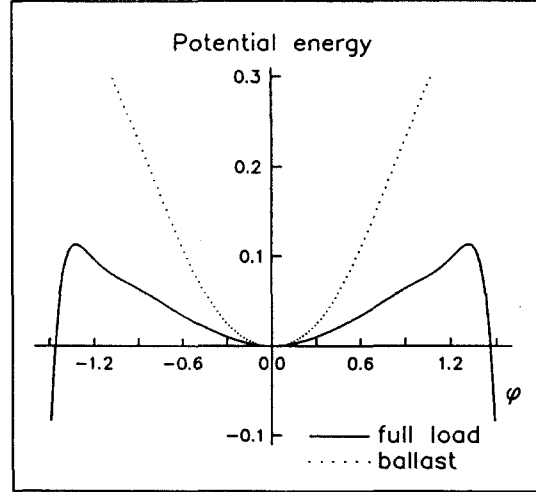


Fig. 1 Potential energies for full load and ballast conditions

에너지  $V(\phi)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$V(\phi) = \int_0^{\phi} \alpha(\xi) d\xi$$

Fig. 2과 3는 식 (8)의 피적분함수

$$f(\phi) = \exp \left[ -\frac{\beta_e}{\pi S_0} \left\{ \int_0^{\phi} \alpha(\xi) d\xi \right\} \right] \quad (12)$$

를 그린 것인데 full load인 경우에는 식 (8)의 적분을 수행할 수 없음을 보여주고 있다. 따라서 이 경우에 부분선형화 방법을 적용하기 위해서는 적분구간을 제한할 수 밖에 없는데 본 연구에서는 운동영역을 복원력이 소멸하는점( $\phi_0 \approx 1.3221$ )까지로 제한하여 결합 확률밀도함수를 계산하였다. 해석결과의 타당성을 조사하기위해 Monte Carlo simulation과 등가선형화 방법으로 구한 결과를 부분선형화 방법에 의한 결과와 비교 하였다. 이 simulation에서 사용된 기진모멘트  $F(t)$ 는 이상적인 백색잡음(ideal white noise)이 아니라 그 파워 스펙트럼 밀도(one-sided power spectral density)가 진동수 0에서 1Hz까지 일정한 값  $W_0 = 4\pi S_0$ 을 가지는 한정대역 백색잡음(band limited white noise)을 고려하였다. Fig. 4는 ballast인 경우에 기진모멘트의 한방향 스펙트럼 밀도  $W_0$ 에 대한 횡

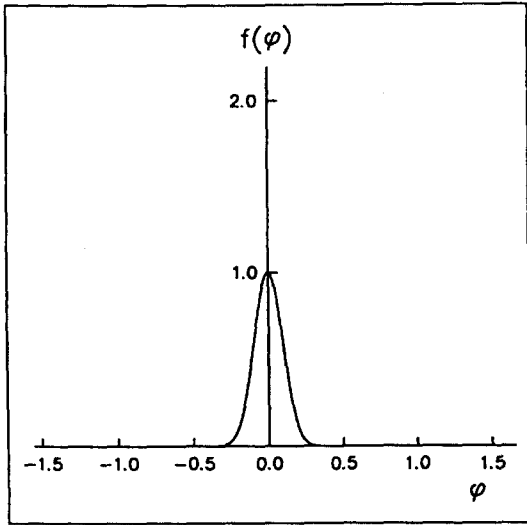


Fig. 2 Intergrand function  $f(\phi)$  for ballast condition

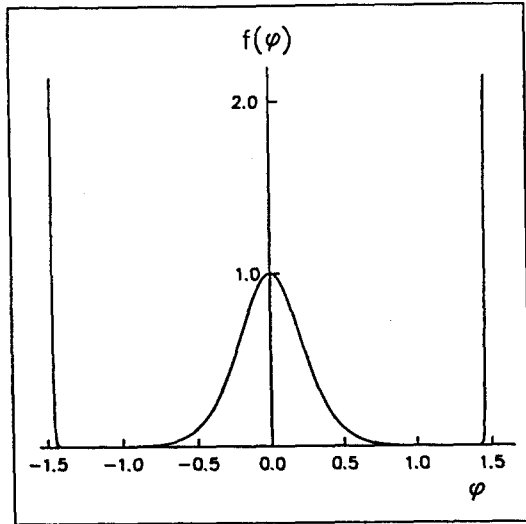


Fig. 3 Intergrand function  $f(\phi)$  for full load condition

동요 응답의 평균제곱근값을 나타내고 있는데 부분선형화방법의 결과가 등가선형화방법의 경우보다 더 좋은 결과를 보임을 알 수 있다. Fig. 5은 full load인 경우인데 등가선형화방법과 simulation 결과는  $W_0$ 의 어떤값(약 0.00238) 이상에서는 더 이상 해를 구할 수가 없음을 보여주고 있다. simulation의 결과에서 그 주된 이유는 기진모멘트 단방향 밀도  $W_0$ 값이 점점 커짐에 따라 횡동요각이 위치에너지가 최대인 점에 도달하게 되고 결국은 앞에서 언급한 대로 위치에너지가 최대인 횡동요각 이상에서는 복원력은 음수가 되며 응답은 무한히 커지게 되기 때문이다. 등가선형화 방법

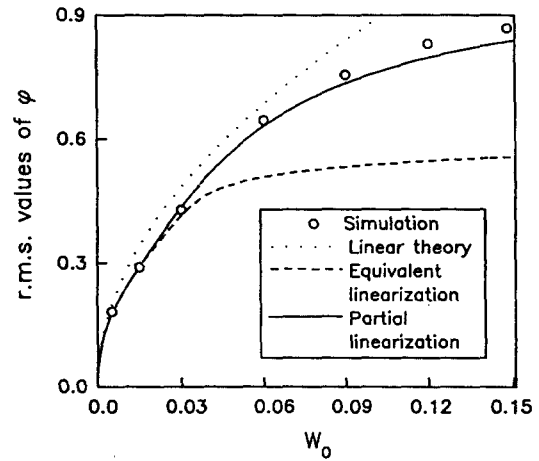


Fig. 4 Root mean square values of the response curve versus spectral density of the excitation for ballast condition

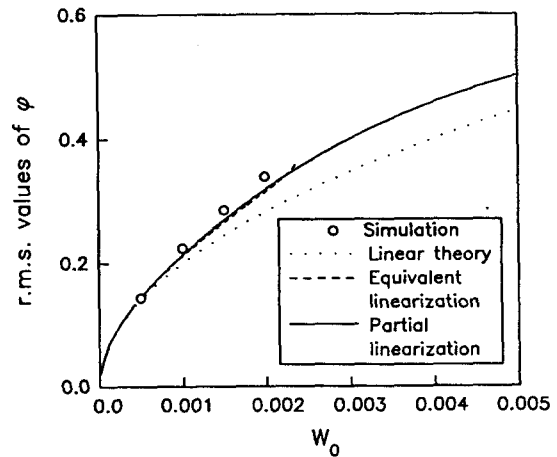


Fig. 5 Root mean square values of the response curve versus spectral density of the excitation for full load condition

의 경우에는 기진모멘트 단방향 밀도  $W_0$ 값이 0.00238 이상이 되면 등가의 복원력계수  $W_0^2$ 가 음수가 되며, 이때의 평형점  $\phi = 0$ 은 불안정한 평형점으로 약간의 외란에도 응답은 무한히 커지게 되는 위로 볼록한 형태의 위치에너지로 바뀌기 때문이다. 반면에 부분선형화 방법은 운동구간을 복원력이 0되는 점까지로 제한했기 때문에 평형점 근방에서 위치에너지는 단방향 밀도  $W_0$ 에 무관하게 항상 아래로 볼록하게 되어

r.m.s 값을 계산할 수 있었다.

이상의 결과에서 부분선형화 방법은 복원력항의 최고차항 계수가 양인 경우, 혹은 평형점( $\phi = 0$ )이 대국적으로 안정한 경우에는 등가선형화방법보다 더 나은 결과를 보여주고 있으나 복원력항의 최고차 계수가 음인 경우 즉 평형점이( $\phi = 0$ )이 국소적으로만 안정한 경우에는 등가선형화방법이나 simulation 과는 달리 유한한 응답이 존재하는 영역을 예측할 수 없음을 확인하였다.

### 5. 결론

부분선형화 방법을 사용하여 불규칙 해상에서의 선체의 횡동요 운동을 해석하였다. 선형 1자유도계인 횡동요 운동 모델에다가 2차의 비선형 감쇠모멘트항과 3차 및 5차, 7차, 9차, 11차의 비선형 복원 모멘트를 추가하였으며 불규칙 기진모멘트는 가우스 백색잡음으로 가정하였다. 그 결과 평형점( $\phi = 0$ )이 대국적으로 안정한 경우에는 부분선형화방법이 등가선형화방법보다 더 정확한 결과를 주지만, 평형점이 국소적으로만 안정한 경우 즉 복원력항의 최고차항의 계수가 음인 경우에는 등가선형화 방법이 부분선형화 방법보다 더 타당성이 있는 결과를 준다는 사실을 확인하였다.

### 후 기

이 연구는 1993년도 영남대학교 교비연구비의 지원에 의한 것임.

### 참 고 문 헌

- [1] Caughey, T. K., "Equivalent Linearization Techniques", Journal of Acoustical Society of America, Vol. 35, pp. 1706-1711, 1963.
- [2] Iwan, W. D., and Yang, I. M., "Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multi-degree-of-Freedom Systems, ASME Journal of Applied-Mechanics, Vol. 39, pp. 545-550, 1972.
- [3] Atalik, T. S. and Utku, S., "Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems", International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 411-420, 1976.
- [4] Spanos, P. D., "Stochastic Linearization in Structural Dynamics", Applied Mechanics Review, Vol. 34, No. 1, pp. 1-8, 1981.
- [5] Roberts, J. B., and Spanos, P. D., Random Vibration and Statistical Linearization", John Wiley and Sons, 1990.
- [6] Zhu, W. Q., and Yu, J. S., "The Equivalent Non-Linear System Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 129(3), pp. 385-395, 1989.
- [7] Elishakoff, I. and Cai, G. Q., "Approximate Solution for Nonlinear Random Vibration Problems by Partial Stochastic Linearization", Nonlinear Vibrations edited by Ibrahim, R. A. et al. ASME, 1992.
- [8] Roberts, J. B., "Estimation of Non-linear Ship Roll Damping from Free-Decay Data", Journal of Ship Research, Vol. 29, pp. 127-138, 1985.
- [9] Kountzeris, A., Roberts, J. B., and Gawthrop, P. J., "Estimation of Ship Roll Parameters from Motion in Irregular Seas", Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, Vol. 132, pp. 253-266, 1991.
- [10] Dalzell, J. F., "A Note on the Form of Ship Roll Damping", Journal of Ship Research, Vol. 22, pp. 178-185, 1978.
- [11] 김동수, 이원경, "등가선형화방법을 이용한 선체의 불규칙 횡동요운동의 통계적 해석", 대한조선학회 논문집, 제 30권, 제 4호, pp. 39-45, 1993.
- [12] Cardo, A., Ceschia, M., Francescutto, A., and Nabergoj, R., "Effects of the Angle-Dependent Damping on the Rolling Motion of Ships in Regular Beam Seas", International Shipbuilding Progress, Vol. 27, pp. 135-138, 1980.
- [13] Lin, Y. K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw Hill, New York, (Second edition : Robert Krieger Company, 1976), 1986.
- [14] Bolotin, V. V., Random Vibration of Elastic Systems, Martinus Nijhoff Publishers, Hague, 1984.