韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1995. 12. 제 34권, 제 2호, 229-237.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1995, Vol. 34, No. 2, 229-237.

한국과 러시아의 수학교과서 비교분석 연구 III

- 고등학교 해석영역을 중심으로 -

이 숙 경 (대구과학고등학교)
신 현 용 (한국교원대학교)

I. 서론

A. 연구의 필요성 및 목적

최근 러시아의 수학교육에 대한 관심이 고조되면서 러시아의 수학교과서와 우리나라의 수학교과서를 비교 분석하는 연구가 수행되어 발표되고 있다. (이용곤 외. 1995, 한인기 외. 1995) 본 연구에서 이러한 연구의 일환으로 우리나라 고등학교 수학 Ⅱ(하)와 러시아의 10-11학년용 수학 교과서의 해석학 영역중 미적분의 내용을 비교 분석하고자 한다.

우리나라 수학 교육에 미적분 교재가 도입된 것은 1946년 미군정청에 의해 중등학교 수학과 교수 요목이 공포되면서 부터인데, 미적분은 그 이후 오늘날까지 고등학교 수학 교육의 주요한 내용이 되어 왔다.

학교 수학에서 미적분 지도의 문제가 중점적으로 논의되기 시작한 것은 20세기 초에 수학 개혁 운동을 주도한 Perry와 Klein에 의해서였다(우정호, 1990). Perry는 1901년 영국 학술 협회의 회의에서 행한 "수학 교육"이란 강연에서, 知力을 개발하고 정서를 함양하며 자연의 신비를 파헤치는 정신적 도구로서의 미적분 지도의 중요성을 강조하였다. 또한 Klein은 수학적 사고의 심장이요 혼인 함수적 사고의 개발을 위해 미적분이 학교 수학의 본질적인 부분이 되어야 한다고 주장하였다.

그 후 반 세기가 지난 후 수학 교육 현대화 운동이 일어나면서 학교 수학의 현대 수학화라는 정신에 따라 보다 엄밀한 지도를 하자는 암묵적 제안이 미적분 교재의 바탕에 깔려 있었다. 그 후, 그러한 입장은 고등학교 미적분 교재의 밑바탕을 흐르는 경향성을 형성하게 되었다(우정호, 1990). 그러나, 1970년대 중반 이후에는 권위주의적인 연역적 전개와 엄밀성 대신 직관적인 관련성과 단순화를 강조하여 취급을 하고, 문제해결과 수학의 응용을 보다 강조하는 입장에서 미적분 지도가 이루어져야 한다는 주장이 대두되어 왔다(NCTM, 1989).

본 연구의 목적은 우리나라와 러시아의 고등학교 수학교과서가 해석학 영역에서, 학습내용의 범위 및 지도내용과 학습내용의 조직 및 계열성에 관하여 중요한 유사점과 이점을 나타내고 있는 지를 알아봄으로써, 우리나라 교육과정 및 교과서 개발, 수학 학습지도 방법 개선에 기여하는 데 있다.

B. 연구문제

본 연구에서 비교 분석되어지는 해석학 영역의 내용 주제는 미분법, 도함수의 활용, 적분법, 정적분의 응용이다.

이 들 각 주제에 대하여 다음 두가지 문제를 탐구한다.

우리나라와 러시아의 고등학교 수학 교과서에서,

(1) 학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용의 유사점과 상이점은 무엇인가?

(2) 학습 내용의 조직 및 계열상의 유사점과 상이점은 무엇인가?

Ⅱ. 연구 방법

본 연구의 주요 목표는 추출된 한국의 고등학교 수학 Ⅱ(하)와 러시아의 중등학교 대수와 기초해석 교과서의 내용을 분석하고 비교하는 데 있다. 본 연구는 다음의 두가지 절차에 의해 수행된다.

1) 교과서 및 자료 수집

러시아의 중등학교 수학 교과서는 한국과는 달리 교육성이 발행한 단일 교과서 제도이다. 미적분을 다루고 있는 고등학교 수학 Ⅱ(하) 교과서에 대응되는 러시아의 제 10 - 11학년 해석 교과서는 1986년도에 개정이 이루어졌다. 본 연구는 러시아 해석 교과서 АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА ,МОСКВА ПРОСВЕНИЕ (대수와 기초해석, М. И. БАШМАКОВ, 1991)와 우리나라의 고등학교 수학교과서 Ⅱ (하)를 분석 대상 교과서로 삼았다.

그 외의 수집 자료로는 두나라의 수학과 교수요목, 교사용 지도서, 각종 국제 기관 보고서 등이 있다.

2) 분석

① 교과서제도, 커리큘럼의 내용 파악

② 교과서 편집 방침, 내용등의 특색 파악

③ 수집 교과서의 내용 분석

④ 교과서의 내용 구성 방식을 고찰하여, 특색있는 구체적 내용을 예시적으로 설명

Ⅲ. 분석과 비교

이 장에서는 최근 개정된 러시아 해석 교과서 АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА ,МОСКВА ПРОСВЕНИЕ (М. И. БАШМАКОВ, 1991)와 우리나라의 고등학교 수학교과서 Ⅱ (하)의 해석학 영역중 미적분의 학습 내용에 대한 분석과 비교가 행해진다.

A. 미적분의 학습내용 비교분석

1. 전반적인 특징

한국과 러시아 모두 고등학교 교과 과정에서 수학에 많은 시간을 배당하고 있다.

수학 시간에 대한 미적분 시간의 비율은 한국과 러시아 교과서가 각각 37%와 57%이고 페이지 비율은 29%와 47%로 고등학교 수학과정에서 미적분이 강조되고 있음을 알 수 있다.

러시아의 대수와 기초해석 교과서는 1시간에 배당되는 페이지가 2.2 페이지 (349 page, 153 시간) 이고, 한국의 수학 Ⅱ(하)는 약 1.7 - 2.1 페이지(288 page, 136-170 시간)이다.

러시아 교과서에서 미분의 경우는 1시간에 배당되는 페이지가 1.6페이지(63 page, 40시간), 적분의 경우는 2.2페이지(39 page, 17시간)이고, 한국의 교과서에서 미분의 경우 1.7페이지(73 page, 42시간), 적분의 경우도 1.7 페이지(61 page, 36시간)가 배당된다.[1] 행의 수를 고려하면 대수와 기초해석 교과서의 시간당 페이지 배당 비율이 수학 Ⅱ(하)의 두배 이상을 차지하고 있다.

러시아의 10학년과 11학년의 교과별 주당 배당 시간을 살펴보면 수학이 8.5(10학년 4.5시간, 11학년 4시간)시간으로 가장 많은 시간을 차지하고 있으며 다음으로 러시아어와 물리가 각각 7.5시간을 차지하고 있다.

한국은 자연 과정 11학년의 수학 시간이 주당 5시간, 12학년이 4-5시간씩 1년에 34주의 교육이 실시되고 있으며 그 중에서 미적분의 시간배당은 12학년 전체 수학시간의 57%를 차지하고 있다.

2. 학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용

1) 미분의 지도내용

미분에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 1>).

---

1) 단, 러시아 교과서의 한 페이지당 행의 수는 51행, 한국의 경우는 약 25행이고, 각 단원의 연습 문제는 한국에서 취급하고 있는 연습 문제 양의 두배 이상을 차지한다.

<표 1> 미분에 대한 내용 비교

미분의 주요내용	한 국	러시아
미분계수	o	o
도함수	o	o
도함수의 계산	o	o
합성함수의 미분법	o	o
삼각함수의 도함수	o	o
지수함수의 도함수	o	o
로그함수의 도함수	o	o
이계도함수	o	x
접선의 방정식	o	o
롤의 정리	o	x
평균값의 정리	o	x
함수의 증가와 감소	o	o
함수의 극대와 극소	o	o
곡선의 요철과 변곡	o	o
그래프의 개형	o	o
물리에서의 미분	x	o
함수의 최대와 최소	o	o
근사값 공식	x	o
방정식과 부등식에의 응용	o	x
속도와 가속도	o	o

(1) 도입

러시아에서는 도함수의 개념을 도입함에 있어서 도입 부분이 7페이지를 차지하고 있다. 학생들에게 도함수에 대한 동기유발과 흥미를 제공하기 위해 물리학과 기타 실생활과 밀접한 예를 사용하여 아주 쉽고 단순화 시켜 도입하고 있다.

도함수의 정의를 설명하기 위해 도함수의 역학적 의미와 기하학적 의미를 서술하고 있는데 실례를 들면 다음과 같다.

<도함수의 역학적인 의미>

뉴튼에 의해 만들어진 역학 운동 모형은 도함수와 이것의 성질을 연구하는 해석학의 가장 중요하고 일반적인 원천이다. 그렇기 때문에, 도함수가 무엇인가라는 물음에 간단히 도함수-속도라고 대답한다.

시간 구간 $[t_1, t_2]$에서 점의 평균 속도는 움직인 거리와 움직인 시간의 비로서 정의한다.

$$V=\frac{S(t)-S(t_1)}{t_2-t_1}$$

시간 t에서의 점의 속도(역학에서의 순간속도)를 정의하기 위해서 다음과 같이 하자: 시간의 구간 $[t, t_1]$을 잡고 이 구간에서 평균 속도를 계산하고, t_1을 t에 가까이 하여 구간 $[t, t_1]$을 작게한다. t_1이 t로 접근할 때 평균 속도의 값은 시간 t에서 속도의 값으로 취급되는 어떤 수로 가까이 갈 것이다.

『극한』이라는 말을 이용하여, 점 t에서의 순간속도는 구간이 축소할때 평균 속도의 극한이고 기호로 다음과 같이 표시한다.

$$V(t)=\lim_{t_1\to t}\frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1}$$

<도함수의 기하학적 의미>

라이프니쯔는 접선을 긋는 문제를 풀면서 이 법칙에 접근했다. 접선을 긋는 방법을 명료하게 묘사하기 위해서 다음과 같은 방법을 소개한다.

① 딱딱한 소재로 제작된 곡선(예를 들어, 쇠줄)에 주어진 점에서 자가 이 곡선에 접하도록 자를 놓는 것을 상상하여야 한다.

② 만약 종이에서 곡선 모양을 자른다면, 가위는 곡선의 경계에 접선 방향을 한다.

③ 곡선을 대단히 많은 수의 요소들로 이루어진 절선으로 간주할 것이다. 바로 이러한 관점에서 미분학이 발견되었다.

④ 로피탈은 접선의 정의를 『만약, 곡선을 이루는 절선의 작은 요소중의 하나를 연장 시키면, 이와같이 연장된 변은 곡선에 대한 접선이라고 부른다』

곡선과 이 곡선 위에 점 P가 주어졌다고 하자. 이 곡선에서 다른 점 P_1을 잡고, 점 P와 P_1을 지나는 할선을 작도한다. 점 P_1을 P에 접근

시키면 할선 PP_1의 위치가 변화되지만 P_1이 P에 접근함에 따라 고정되어진다. 점 P_1이 P로 갈때 할선 PP_1의 극한 위치는 점 P에서의 곡선에의 접선이 된다.

즉, 곡선은 함수 $y=f(x)$의 그래프이고, 점 P(x, y)는 그래프 위의 점이라하자. 접선은 점 P를 지나는 어떤 직선이다. 이 직선을 작도하려면, 이 직선의 기울기를 구해야 한다. 접선의 기울기를 K라 하자. 우선 할선 PP_1의 기울기 K_1을 구하자. P_1의 x좌표를 x_1이라 하자.

$$K_1=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

K를 구하기 위해 x_1을 x로 가까이 접근시키면 점 P_1은 P에 접근하고, 할선 PP_1은 점 P에서 접선에 접근한다. 이와같이 접선의 기울기는 x_1이 x로 가까이 갈때 식

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

의 극한으로서 구할 수 있고, 기호로는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$K(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

속도를 구할 때와 같은 문제에 접근하였다: x_1이 x로 가까이 갈때 식

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

의 극한을 함수 f의 미분이라 한다.

정확한 도함수를 계산하려면, 독립변수의 변화구간을 점으로 축소한다. 이때, 평균속도는 순간속도가 되고, 할선은 접선이 되고, 우리는 도함수를 계산하게 된다.

위에서 제시한 실례에서처럼 도함수를 정의하기 위해 먼저 시각적이고 직관적이며 현실적인 접근 방법을 다양하게 제시하여 학생들에게 동기를 유발 시킨후 극한을 도입하여 함수의 접선의 기울기를 역학에서 속도를 정의할 때와 같이 정의하였다.

(2) 도함수의 계산

러시아에서 독특하게 내용을 배열하고 있는 것 중의 하나가 바로 도함수의 계산 부분이다. 한국에서는 10학년 과정의 공통 필수인 일반수학에서 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 먼저 학습한 후에 이들 함수의 미분법을 12학년에서 다루고 있는 반면, 러시아에서는 11학년의 미분단원에 이어서 삼각함수, 지수함수, 로그함수 단원이 있고 그 단원의 끝에서 그들 함수의 미분법을 동시에 학습하도록 배열하고 있다.

도함수에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 2>).

<표 2> 도함수에 대한 내용 비교

학 습 주 제	러시아	한 국
$y=c$ 의 도함수	o	o
$y=x^n$ 의 도함수	o	o
실수배, 합, 차, 곱, 몫의 도함수	o	o
합성함수의 미분법	o	o
음함수의 미분법	o	o
삼각함수의 도함수	o	o
지수함수의 도함수	o	o
로그함수의 도함수	o	o
역함수의 도함수	o	x
이계도함수	x	o
sinx, cosx, tanx의 근사식	o	x
e^h, ln (1 + h)의 근사식	o	x

① $y=x^n$의 도함수

러시아 교과서에서는 하나의 소단원을 구성하고 있으며 곱의 미분 공식과 귀납적인 증명 방법을 사용하였다.

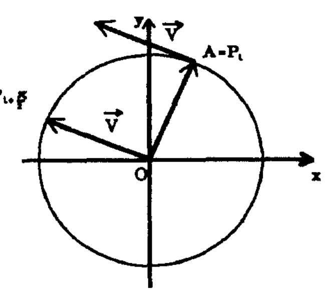
한국 교과서에서는 지수가 양의 정수일때는 도함수의 정의에 의한 증명 방법을 사용하였고 음의 정수일때는 몫의 미분법으로, 유리수 지수

인 경우는 합성함수의 미분법에 의하여 증명하는 방법으로 전개시키고 있다.

② 삼각함수의 도함수

한국 교과서에서는 도함수의 정의와 선행 학습한 삼각함수의 성질을 써서 형식적인 증명을 제시하고 있다.

러시아의 증명 방법은 다음과 같다: 점 A가 일정한 속도로 중심이 원점이고 반지름이 1인 원주를 움직인다고 하자. 시간 t에서 점 A의 좌표는 $(\cos t, \sin t)$이다. 시간 t에서 순간속도 벡터는 점 A에서 원주의 접선 방향이고, $\vec{V}$와 $\overrightarrow{OA}$는 수직이다.



$$\vec{V}=\overrightarrow{OB}=\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{OA}=(\cos t,\ \sin t)$$

$\vec{V}$ 의 좌표를 계산하자. 점 O로 부터 $\vec{V}$를 표시하면 좌표가 $\vec{V}$ 와 같은 $\overrightarrow{OB}$를 얻는다. 점 A가 원주를 따라 일정한 속도로 운동을 하므로 $\vec{V}$의 길이는 1이다. 결국 점 B는 원주위에 있다. $\overrightarrow{OB}$는 $\overrightarrow{OA}$에 수직이고, 만약 A = P_t 이면 B = $P_{t+\pi/2}$이다. $\vec{V}$ = $\overrightarrow{OB}$의 좌표는 다음과 같다.

$$\cos(\pi/2 + t) = -\sin t,$$
$$\sin(\pi/2 + t) = \cos t.$$

한편으로 $\vec{V}$의 좌표는 점 A의 도함수이다.

즉, $(\cos t)' = -\sin t$, $(\sin t)' = \cos t$.

③ 지수함수의 도함수

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$$

와 도함수의 정의를 이용하여 지수함수의 도함수를 구하는 한국 교과서와는 달리 기하학적으로 서술하고 있는 러시아 교과서의 증명 방법을 알아보면 다음과 같다.

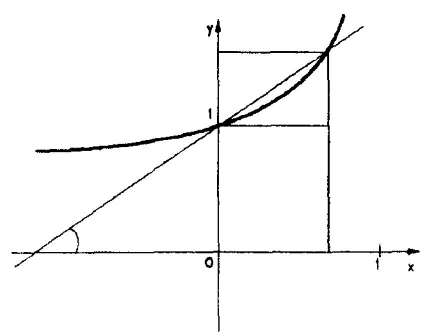
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=\frac{a^{x}(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$=a^{x}\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

은 구간 $[x, x+\Delta x]$에서 지수함수 증가의 평균 속도를 계산한 것이다. $[x, x+\Delta x]$에서 지수함수 증가의 평균 속도가 점 x에서 이 함수의 값에 $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$를 곱한 것임을 알 수 있다.

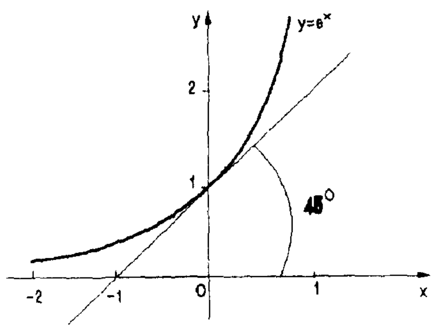
작은 Δx 값에 대하여 이 수가 어떻게 변하는가 고찰해 보자. $a^0 = 1$ 이므로 아주 작은 Δx 값에 대하여 $a^{\Delta x}$ 의 값은 1에 가까이 간다. 만약 함수의 그래프에서 점 (0,1)과 $(\Delta x, a^{\Delta x})$를 지나는 할선을 그으면, 이것의 기울기는

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\tan\alpha$$



Δx → 0 일때 할선은 점 (0 , 1)에서 함수의

그래프의 접선에 접근해간다. 이것은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 가 a^x와 x = 0의 도함수의 값의 곱에 가까이 간다는 것을 의미한다. 그러므로, 함수 $y = a^x$의 도함수를 구하려면, 0에서 이 도함수의 값만 알면된다. 이것을 K로 나타내면, 식 $(a^x)' = K a^x$을 얻는다. 즉, 지수함수의 도함수는 함수 자신과 비례한다. 비례 계수 K는 점 (0 , 1)에서 그은 접선의 기울기와 같다. 그래프에 의해 이 계수를 근사적으로 구할 수 있다. a = 10에 대해 K ≃ 2.3 이라는 것을 알기 때문에, $(10^x)' = 2.3 \cdot 10^x$. 다양한 a값에 대하여, 지수함수의 그래프들은 점 M (0,1)을 지난다. 이 점에서 접선을 그으면, 밑수 a가 커질 수록 접선이 더 가파르게 나타난다는 것을 알 수 있다. 즉, a = 2에 대하여 접선의 기울기는 0.693이고, a = 10에 대하여 접선의 기울기는 2.303이다. a가 연속적으로 2에서 10까지 변할때 점 M에서 기울기도 연속적으로 변하고, 이 기울기가 1이 되는 a의 값을 구할 수 있다는 것은 명백하다. 이와같은 밑수 a 를 문자 e로 나타낸다. 그러므로, e는 점 x = 0에서 함수 $y = e^x$의 접선의 기울기가 1이 되는 수이다. 즉, 이 점에서의 접선은 x축과 45 °를 이룬다.



지수함수의 도함수는 그 자신과 비례하기 때문에 수 e는 비례계수가 1인 그러한 밑수이다. 즉, e는 함수 $y = e^x$의 도함수가 자신과 같아지는 수 이다: $(e^x)' = e^x$.

④ 로그함수의 도함수

한국 교과서에서는

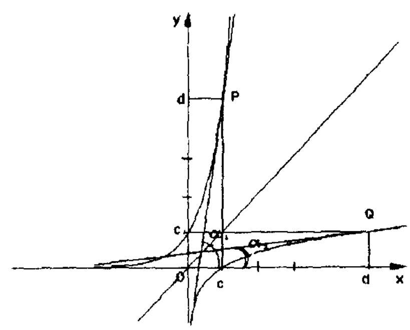
$$\lim_{\Delta x \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

와 도함수의 정의를 이용하여 로그함수의 도함수를 구하였다. 로그 미분법을 이용하여 임의의 실수 n에 대하여 $y = x^n$의 도함수는 $y' = nx^{n-1}$ 임을 증명하였다.

한국 교과서에서는 $(a^x)' = (\ln a)a^x$임을 지수함수의 도함수에서 증명하였으나 러시아 교과서에서는 로그함수의 도함수에서 다음과 같이 전개하고 있다.

직선 $y=x$에 대칭인 두 함수 $y=e^x$와 $y=\ln x$를 살펴보자.

$y=e^x$의 그래프에서 점 P (c , d) 를 선택한다(즉, d = e^c). 이것은 $y=\ln x$의 그래프의 점 Q (d, c)와 대칭이다(즉, $c=\ln d$). 이 점에서 각 그래프에 대한 접선도 또한 대칭이다.



$y=e^x$의 그래프에 대한 접선의 기울기 $K_1 = e^c$이다. α_1과 α_2를 접선과 x축과 이루는 각이라고 한다. 위 그림에서

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

임을 알 수 있다.

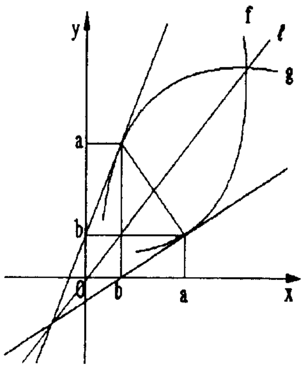
$K_1 = \tan \alpha_1 = e^c$ 이므로

$$K_2 = \tan \alpha_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)$$

$$= \cot \alpha_1 = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{e^c} = \frac{1}{d}$$

이다. 이와 같이, x = d 에서 함수 $y=\ln x$의 도함수는 $\frac{1}{d}$ 이므로 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$



$\ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 이므로,

$$(\ln_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

지수함수의 도함수 공식에 따라 $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = K a^x$. 이 때,

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

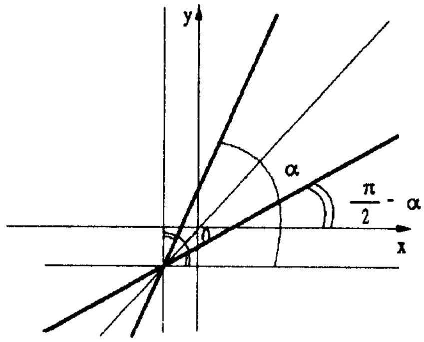
이다. $e^{\ln a} = a$, $a^x = e^{kx}$,

이 때, $K = \ln a$

$\therefore (a^x)' = Ke^{kx} = Ka^x$즉, $(a^x)' = (\ln a)a^x$

러시아에서는 역함수의 도함수를 학습하기 바로 전에 역함수의 존재 조건과 서로가 서로의 역함수가 되는 함수들의 성질, 역함수의 단조성등을 학습한 후에 이어서 역함수의 도함수가 지도되고 있다. 러시아 교과서에서만 취급하고 있는 역함수의 도함수의 내용 전개를 살펴보면 다음과 같다.

함수 f와 g를 서로 역함수라 하자. f'을 안다면 어떻게 g'을 구할 수 있는가?. 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 ∠XOY의 이등분선 l에 대하여 서로 대칭이다.



임의의 $x=a$를 선택하면 $f(a)=b$, $g(b)=a$ 점 (a, f (a)) = (a ,b)와 (b, g (b)) = (b, a)는 제시된 직선 l에 대하여 대칭이다. 곡선들이 대칭이므로, 이 곡선에 대한 접선들은 직선 l에 대하여 서로 대칭이다. 대칭으로 부터, 이 직선들 중 하나와 x축과의 각은 다른 직선의 y축과의 각과 같다는 것이 명백하다. 첫번째 직선이 x축과 각α를 이루면 이 직선의 기울기 $K_1 = \tan \alpha$이고 이때 두번째 직선의 기울기는

$$K_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{K_1}$$

($K_1 \neq 0$, 즉, 곡선에 대한 접선은 좌표축과 평행하지는 않다). 이와같이 직선에 대하여 대칭인 직선들의 기울기는 서로 역수이다. 즉, $K_2 = \frac{1}{K_1}$ 또는 $K_1 \cdot K_2 = 1$. 유도된 결론은 다음과 같다; 역함수의 도함수 값은 대응하는 점에서 서로 역수이다

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

2) 적분 지도 내용

적분은 한국과 러시아 두 나라 모두가 각각 중등 교육의 마지막 학년인 12학년과 11학년에서 다루고 있다.

(1) 도입

러시아 교과서의 도입부분은 적분의 임무, 적분의 기하학적 의미, 적분합, 면적의 증가속도, 적분 기호, 결론, 검사문제 등으로 하나의 중단원으로 다루어지고 있으며 내용 전개에 있어서도 적분의 학습에 필요한 기본적인 개념을 서술식으로 자세하게 설명해 나가고 있다.

(2) 적분의 기본 개념

적분의 기본 개념의 학습 지도 내용에 대하여 한국 교과서와 러시아 교과서를 비교하면 다음과 같다.

① 부정적분의 정의에 있어서 한국 교과서가 러시아 교과서보다 일반화된 정의를 하고 있다. 즉, 한국에서는 「 $F'(x)=f(x)$ 일 때, $\int f(x)dx = F(x)+C$, 러시아에서는 $F'(x)=f(x)$ 일때, $F(x)=\int f(x)dx$로 쓰고 있다.

② 러시아 교과서에서는 적분의 기하학적 의미를 하나의 소단원으로 배정하여 다루고 있다. 이 소단원에는 B.C 3세기에 아르키메데스가 발명한 면적 계산 방법을 설명하면서 적분을 면적으로 정의하고 있다.

(3) 적분의 계산

교과서의 내용 구성과 전개에 있어서 러시아 교과서와 한국 교과서의 차이가 가장 두드러지게 나타나고 있는 부분이다. 러시아 교과서는 일단 적분의 기본 개념을 충실히 다룬 다음 미분의 역연산에 의해 구한 간단한 적분표를 제시하였다.

한국 교과서는 각 학습 주제 마다 미분 공식에 의해 얻은 적분 공식을 설명한 후 예제와 문제를 많이 배당하여 적분 계산 능력을 숙달시키기 위한 내용으로 짜여져 있다.

러시아 교과서에는 본문 중에는 문제가 많지 않고 계산 능력의 숙달 보다는 설명하고 있는 원리의 의미를 파악하는 데 도움이 되는 간단한 예제들만 다루고 있다.

적분의 계산에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 3>).

<표 3> 적분의 계산에 대한 내용 비교

학 습 주 제	러시아	한국
x^n 의 부정적분	o	o
1/x의 부정적분	o	o
삼각함수의 부정적분	o	o
지수함수의 부정적분	o	o
치환적분법	x	o
우함수, 기함수의 정적분	x	o
부분적분법	x	o
정적분과 극한값	x	o
정적분의 가산성	o	o
정적분의 부등식	o	o

삼각함수에 관한 적분도 한국 교과서와 러시아 교과서가 공통적으로 다루기는 하지만 한국의 교과서는 삼각함수에 관한 공식과 치환적분법을 이용하여 복잡한 형태의 삼각함수의 부정적분도 다루고 있다. 러시아 교과서에서는 아주 기본적인 삼각함수의 부정적분인 $\sin x$, $\cos x$, $\sin(wx+\alpha)$, $\cos(wx+\alpha)$의 적분이 있다. 또한, 정적분을 무한 급수의 합으로 정의한 한국에서는, 무한 급수의 합을 정적분을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 있으나 러시아 교과서에서는 다루지 않고 있다.

(4) 적분의 응용

이 부분에서는 러시아 교과서의 학습 내용이 한국 교과서보다 많을 뿐만 아니라 물리의 내용이 많고 끝부분에는 간단한 미분방정식까지 다루고 있다.

적분의 계산 부분과는 달리 한국 교과서보다 러시아 교과서의 학습 내용이 두 배 이상 더 많다. 물리와 다른 교과와의 연계성이 강조되고, 적분의 개념을 확실히 하여 일상 생활에 적용할 수 있는 응용 문제를 많이 배당하고 있다.

적분의 응용에 대한 두 나라의 지도 내용을 표로 정리하면 다음과 같다(<표 4>).

<표 4> 적분의 응용에 대한 내용 비교

학 습 주 제	러 시 아	한 국
곡선과 x,y 축으로 둘러 싸인 도형의 넓이	o	o
두 곡선 사이의 넓이	o	o
일반 입체의 부피	o	o
회전체의 부피	x	o
운동거리	o	o
일	o	x
질량	o	x
전하	o	x
미분방정식	o	x
미분방정식의 풀이	o	x
조화진동의 방정식	o	x
지수승의 방정식	o	x

Ⅳ. 제언

(1) 학교수학에서의 미적분 내용이 논리적인 엄밀성과 병행하여, 직관적으로, 더우기 물리적인 내용과의 관련성을 통해서 보다 의미있게 지도될 수 있는 내용으로 교과서를 개발했으면 한다.

(2) 어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수함수이며, 미분계수가 항상 양인 함수는 단조증가함수임이 직관적으로 분명한데, 이를 평균값의 정리를 사용하여 증명하는 까닭이나, 간단히 귀납적으로 증명이 가능한 $y=x^n$의 도함수 계산 공식을 4단계로 나누어 증명하는 이유를 이해하는 학생들은 많지 않을 것이다. 지나치게 형식적인 증명과 복잡하고 많은 계산 문제는 필수 요소로 부터 제외시키고 개념 이해와 문제 해결, 수학의 응용을 더 강조하는 내용으로 교재를 구성했으면 한다.

(3) 미적분 교재를 그 기원이나 연구 목적을 고려하지 않고 직관과 응용에 등을 돌리면서 수학 내적인 체계로서 보다 엄격하게 논리적으로 다루고자 하는 교사의 태도는 형식주의 교육을 초래할 수 밖에 없을 것이다. 따라서, 교육 절차의 조직에서 학생들의 수학공부에 대한 흥미개발과 동기유발은 교사의 중요한 역할이라고 생각된다.

(4) 학생들에게 그 단원을 학습하는 의미를 파악하도록 하기 위해서 기본개념의 충분한 설명을 위한 도입 부분을 확대하여 교과서 개발을 했으면 한다.

(5) 우리나라에서도 서방에서처럼 러시아의 수학 교육 과정, 수학 교수법, 교육 심리, 평가, 교사 교육, 특수 교육 등에 대해 많은 연구가 진행되었으면 한다.

참 고 문 헌

고등학교 일반수학 (1991). 검인정 8종류.

고등학교 수학II (1991). 검인정 8종류.

박한식 (1982). 수학교육사. 서울: 교학사

우정호 (1990). 미적분 교재의 재음미. 사대논총. 제 41집. 서울대학교 사범대학.

이용곤, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 I. 한국수학교육학회 논문집. 제 34권 제 1호.

한인기, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 II. 한국수학교육학회 논문집. 제 34권 제 1호.

М.ИБАШМАКОВ (1991). АЛГЕБРА И АНАЛИЗА. МОСКВА ПРОСВЕНИЕ.

NCTM (1989). Curriculum and evalution standards for school mathematics. NCTM.

UNESCO (1986). Soviet Education. 29(8).