韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1995. 6. 제 34권, 제 1호, 131-136.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Jun. 1995, Vol. 34, No. 1, 131-136.

# 시간 종속적인 편미분방정식의 수치해에 대한 교육용 소프트웨어 ESPDE의 개발[1)]

김 영 호 (경북대) 김 상 동 (경북대)
신 동 호 (인제대) 유 승 목 (경북대)

## 1. 서론[1)]

편미분방정식중에서 시간종속적인 문제에 대한 해는 시간에 따라 변화한다. 그러므로 대학교나 대학원에서 수치해석이나 미분방정식과 같은 강의를 할 때 이러한 문제의 이론적인 해와 수치적인 근사해를 학생들에게 보다 잘 인식시키기 위해서는 컴퓨터를 이용하면 효과적인 도움을 받을 수가 있다. 예를 들어, 특정한 초기치가 주어진 뒤 시간이 흐름에 따라 이론적인 해와 수치적인 근사해를 컴퓨터로 구한 다음 출력하여 비교하면 초기치의 영향과 채택한 수치적 방법에 대한 성격을 파악할 수가 있다.

위에서 출력한다 했을때, 그 방법에는 크게 두 가지가 있을 수 있다. 한가지는 결과 자료의 수치값들을 출력하는 방법이고 다른 방법은 결과자료를 시각적으로 출력하는 방법이다. 두 방법 모두 장단점이 있겠으나 주로 첫째 방법은 특정한 결과값을 정확히 알고 싶을 때 사용되고 둘째 방법은 결과자료의 전반적인 특성을 살피고자 할 때 사용된다 하겠다. 후자는 그림을 그리기 위해서 별도의 software를 사용하거나 아니면 그림을 그려주는 subroutine을 프로그램해야 한다는 어려움이 있다. 그렇지만 시간종속적인 편미분방정식의 해를 이해시키고 수치자료를 분석하는데 있어서 아주 중요한 역할을 한다.

수치해석 및 편미분방정식 등의 강의를 할 때 학생들에게 예를 들어 미분방정식의 수치적인 근사해를 구하는 문제를 프로그램해서 그 결과를 제출하라는 숙제를 주면 자신의 프로그램과 그 프로그램을 실행해서 나온 일련의 수치들을 출력한 많은 종이를 단순히 제출하는 학생들이 많다. 정작 필요한 것은 자신이 찾은 수치들이 무엇을 의미하고 이론적으로 적합하냐에 대한 언급 및 분석인데 프로그램 작성 및 수정에 많은 신경을 쓰다 보니 이에 대해 소홀한 것 같다. 일련의 수치들은 해의 전반적인 양상을 살피는데는 큰 도움이 되지 못한다. 그러므로 결과자료들을 모아 그림을 그려서 분석하는 것이 문제를 이해하는데 필수적이다.

하지만 이 정도의 숙제를 제출하기 위해서는 학생들이 컴퓨터에 관한 다방면의 상식과 많은 시간의 할애가 요구된다. 이러한 이유때문에 교육용 소프트웨어개발의 필요성을 느꼈는데 이것이 바로 ESPDE이다. 이 소프트웨어는 사용자가 PC의 WINDOWS 사용법 정도만 알고 있으면 1차원 및 2차원에서의 hyperbolic 및 parabolic 방정식에서 다양한 초기치를 주었을 때 여러가지의 수치해를 이론해와 함께 시간이 지남에 따라 어떻게 전개되는지를 볼 수 있게 한다. 본론에서 ESPDE에 관한 자세한 설명을 하고자 한다.

## 2. 본론

먼저 1차원 hyperbolic 문제에서 ESPDE는

$$u_t + au_x = f(t, x) \quad (1)$$

1) 본 연구는 TGRC-KOSEF 의 전적인 도움에 의하여 이뤄졌습니다.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t, x) \quad (2)$$

와 같은 1계 및 2계 미분방정식들을 다룬다. 마찬가지로 2차원에서는

$$u_t + a u_x + b u_y = f(t, x, y) \quad (3)$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} - b^2 u_{yy} = f(t, x, y) \quad (4)$$

를 다룬다.

방정식 (1)의 경우에는 7가지 유한차분법들을 이용하였다. 만약 $h$와 $k$를 각각 공간과 시간에 대한 격자간격이라고 하면, $f=0$일 경우에 유한차분법들은 다음과 같다.

1. Forward-time forward-space[FTFS] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0$$

2. Forward-time backward-space[FTBS] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0$$

3. Forward-time central-space[FTCS] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

4. Lax-Friedrichs[Lax-Fri] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + a\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

5. Lax-Wendroff[Lax-Wen] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h}$$

$$- \frac{a^2 k}{2}\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

6. Crank-Nicolson[CN] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1} + v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{4h} = 0$$

7. Leapfrog[LF] 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

방정식 (2)의 경우에는 2개의 유한차분법을 다루었는데 다음과 같다.

1. Standard 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - 2v_m^n + v_m^{n-1}}{k^2} - a^2\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

2. Implicit 방법

$$\frac{v_m^{n+1} - 2v_m^n + v_m^{n-1}}{k^2}$$

$$- \frac{a^2}{4}\delta_x^2(v_m^{n+1} + 2v_m^n + v_m^{n-1}) = 0$$

여기서

$$\delta_x^2 v_p = \frac{v_{p+1} - 2v_p + v_{p-1}}{h^2}$$

을 의미한다.

2차원 문제에 해당하는 방정식 (3)과 (4)를 위해서는 지금 소개한 유한차분법들을 비슷하게 확장시켜서 사용하였다.

<그림 1>은 ESPDE를 실행시킨 결과 중 하나이다. 제일 위에는 메뉴판이 놓여있다. 메뉴 Equations는 hyperbolic과 parabolic을 선택한다. Input에서는 초기치 및 실행에 필요한 여러가지 값들을 입력한다. Option에서는 첫째 경계치 조건과 둘째 화면에 무엇을 출력할 것인지를 선택할 수 있다.

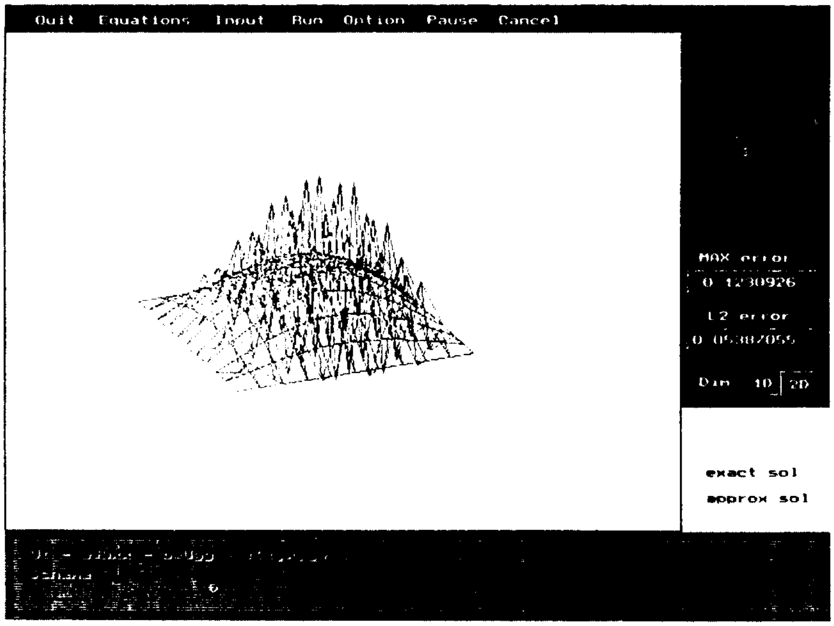
제일 밑의 길다란 직사각형에서는 실행한 결과가 어떤 Input으로 해서 나왔는지 설명한다. 즉 이 경우에는 1차원 1계 hyperbolic 방정식

$$u_t + a u_x = f(t, x)$$

을

$$f(t, x) = 0$$

이고 초기치는




< 그림 1 >

$$u(0,x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{if } |x|\le 1,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

일때 Lax-Friedrichs 방법을 사용하여 적당한 시간을 주고 난 뒤에 수치해와 이론적인 해가 어떻게 움직이는 것인지를 살핀 것이다.

실제로는 화면에 이론적인 해와 수치적인 해가 서로 다른 색깔로 표현되어 구별이 쉽다. 그리고 화살표에 해당하는 부분에는

$a$ = 1

$h$ = 0.05

$k/h$ = 0.8

$t$ = 1

등과 같은 사용자가 선택한 정보가 화면상에 출력되나 컬러화면을 흑백 레이저 프린터로 출력하는 과정에서 보이지 않게 되었다.

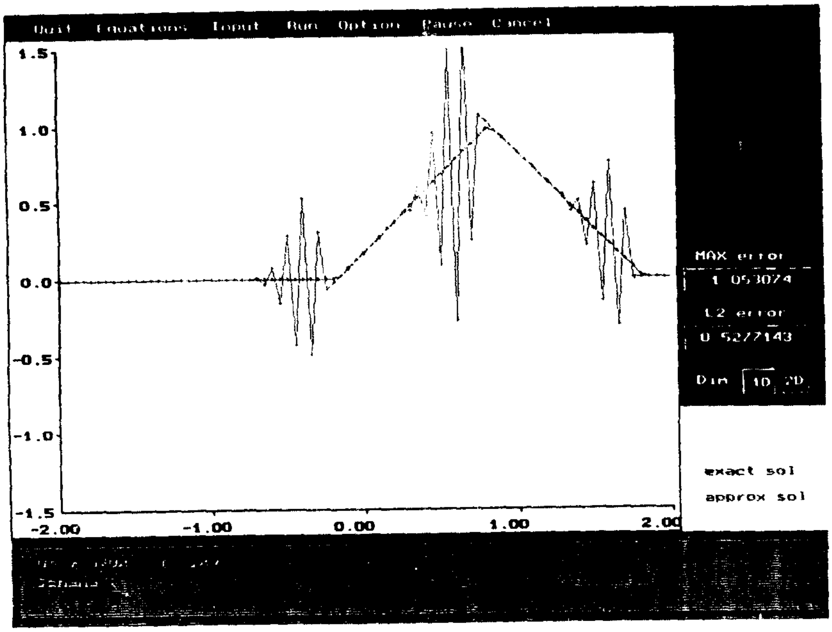
화살표 아래에는 시간이 $t=1$만큼 지난뒤에 수치해의 이론적인 해로부터의 오차를 2가지 측변에서 구한것을 보여주며 1차원을 선택하였다라는 것을 알 수 있게 한다. 비슷하게 2차원에서 실행한 결과를 <그림 2>에 보였다.

유한차분법들은 해가 안정되기 위해 만족해야 할 조건들이 있다. 만약

$$\lambda = k/h$$

라고 하면 1계 1차일 경우 조건은 아래 도표와 같다.

| 유한차분법 | 조건 |
|---|---|
| FTFS | $-1\le a\lambda\le 0$ |
| FTBS | $0\le a\lambda\le 1$ |
| FTCS | 항상 불안정 |
| Lax-Fri | $-1\le a\lambda\le 1$ |
| Lax-Wen | $-1\le a\lambda\le 1$ |
| CN | 항상 안정 |
| LF | $-1 < a\lambda < 1$ |




< 그림 2 >

<그림 3>은 $a=1$ $\lambda=1.1$ $t=0.8$로 선택할 때 Lax-Wen을 사용하면 위의 도표에 있는 조건을 만족하지 않아 수치해가 불안정해진 것을 보여준다. 마찬가지로 계수나 차원수가 달라도 비슷한 안정조건이 있는데 ESPDE는 이것을 확인시켜준다.

Parabolic 방정식은 각각 1차원 2차원에서

$u_t - a u_{xx} = f(t, x)$ (5)

$u_t - a u_{xx} - b u_{yy} = f(t, x, y)$ (6)

과 같은 형태의 식들을 다룬다.

식 (5)는, $f=0$일 때, 다음과 같은 유한차분법들을 이용한다.

1. FTCS

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = a\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

2. BTCS

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = a\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

3. CN

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = \frac{a}{2}\left(\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}\right)$$

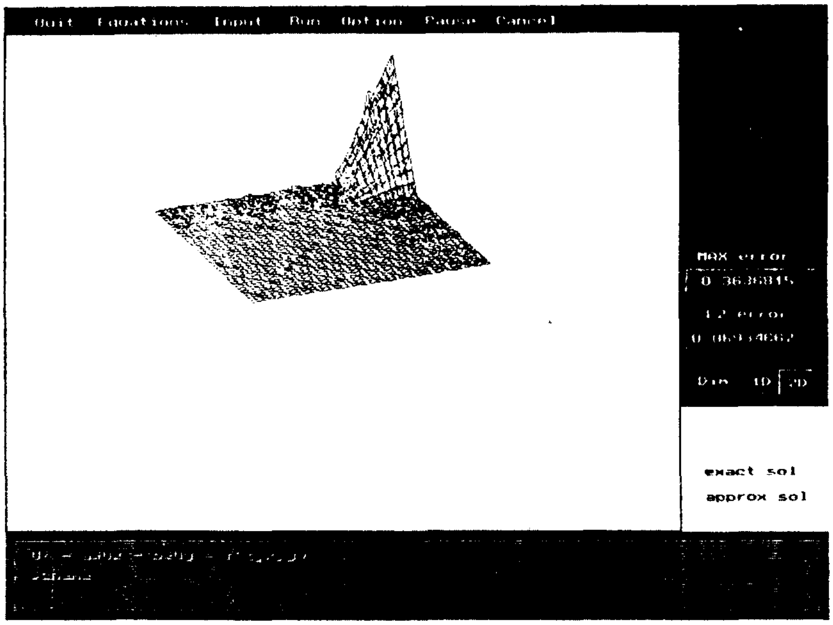
4. LF

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} = a\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

5. Du Fort Frankel

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} = a\frac{v_{m+1}^n - (v_m^{n+1} + v_m^{n-1}) + v_{m-1}^n}{h^2}$$

식 (6)도 위와 같은 유한차분법을 비슷하게 확장해서 사용할 수 있는데, 만약 $h_x$ 와 $h_y$를




< 그림 3 >

각각 $x$와 $y$축에서 사용한 격자간격이라 하고

$$\mu_x = k/h_x \quad \mu_y = k/h_y$$

라 하면 다음 도표와 같은 안정된 해를 갖기 위한 조건을 가진다.

| 유한차분법 | 조건 |
|---|---|
| FTCS | $0 \le a\mu_x + b\mu_y \le 0.5$ |
| BTCS | 항상 안정 |
| CN | 항상 안정 |
| LF | 항상 불안정 |
| Du Fort Fr. | 항상 안정 |

이 중에서 LF 방법은 항상 불안정한데 $a = b = ,1 \quad \mu_x = \mu_y = 0.2 \quad h_x = h_y = 0.1$, $t = 0.065$일 때 실행결과를 <그림 4>에 보였다.

## 3. 결론

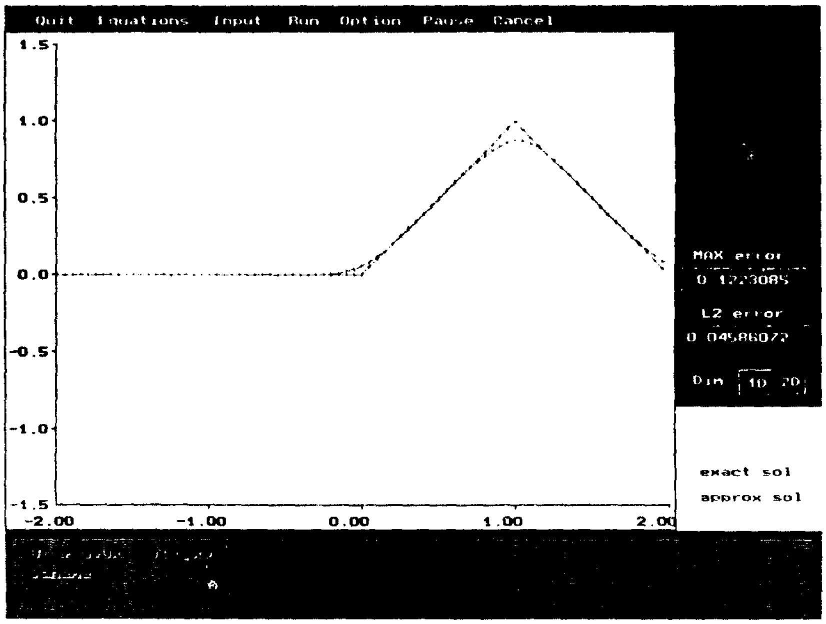
ESPDE는 공개 소프트웨어이며 교육용으로 개발되었다. 이 소프트웨어가 필요하면 언제든지 연락을 취하여 얻을 수가 있다. 지금까지는 편미분방정식에 대한 교육용 소프트웨어가 개발되어졌는데 앞으로는 상미분방정식에 대한 교육용 소프트웨어를 개발할 계획이다.

## 참 고 문 헌

Garabedian, P. (1964). Partial differential equations. New York : John Wiley.

John, F. (1981). Partial differential equations. Springer-Verlag.

Strikwerda, J. (1989). Finite difference schemes and partial differential equations. Wadsworth and Brooks/Cole.




< 그림 4 >

Eispack, Numerical algorithm group, 256 Banbury Rd., Oxford, UK.

IMSL, International Mathematical and Statistical Libraries, 7500 Bellaire Boulevard, Houston, TX 77036.

Linpack, Numerical Algorithm Group, 256 Banbury Rd., Oxford, UK.

Macsyma, Macsyma Inc., 20 Academy Street, Arlington, MA 02174.

Mathematica, Wolfram Research Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237.

Matlab, The Mathworks Inc., 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760.

Nag, Numerical Algorithm Group Inc., 1400 Opus Place, Suite 200, Downers Grove, IL 60515-5702.