

論文95-32A-9-9

# Wavelet 변환의 전자기학적 응용

## (Application of wavelet transform in electromagnetics)

金炯東 \*

(Hyeongdong Kim)

## 요 약

Wavelet변환 기법을 두가지 중요한 전자기학 문제에 적용하였다: 1)레이다 반향신호 해석과 2)wavelet변환을 이용한 전자파 산란. 주파수영역 레이다 반향신호는 작은 규모의 공진특성과 큰 규모의 산란 중심체(scattering center)의 정보로 이루어진 다양한 크기의 신호가 결합된 다중규모 신호이므로, wavelet 변환의 가장 중요한 특성인 다중 분해능에 의해 잘 분석될 수 있다. 입구가 개방된 도파관 공동(空洞)의 레이다 반향신호를 wavelet분석한 결과를 예제로 제시 하였다. 서로 다른 산란 메카니즘이 wavelet 영역에서 잘 분리되고 있다. 또한 wavelet 영역에서, 모멘트 방법의 임피던스 행렬이 매우 희소화(稀疏化)되는데, 이러한 희소 특성을 이용한 CGR(conjugate gradient)방법에 의해 선형방정식을 빠른 속도로 풀 수 있다. 예제로 2면체 반사판의 전자파산란에 적용하였으며 그 결과 수행시간이 매우 감소되었다.

## Abstract

Wavelet transform technique is applied to two important electromagnetic problems: 1) to analyze the frequency-domain radar echo from finite-size targets and 2) to the integral solution of two-dimensional electromagnetic scattering problems. Since the frequency-domain radar echo consists of both small-scale natural resonances and large-scale scattering center information, the multiresolution property of the wavelet transform is well suited for analyzing such multi-scale signals. Wavelet analysis examples of backscattered data from an open-ended waveguide cavity are presented. The different scattering mechanisms are clearly resolved in the wavelet-domain representation. In the wavelet transform domain, the moment method impedance matrix becomes sparse and sparse matrix algorithms can be utilized to solve the resulting matrix equation. Using the fast wavelet transform in conjunction with the conjugate gradient method, we present the time performance for the solution of a dihedral corner reflector. The total computational time is found to be reduced.

## I. 서 론

Wavelet변환 이론은 여러 응용과학분야에서 많은

관심의 대상이 되고 있다. 원래 wavelet변환은 STFT(short-time Fourier transform)의 고정분해능의 결점을 해결하기 위해 1984년 Morlet<sup>[1]</sup> 등에 의해 개발되었는데 신호해석, 음성신호처리, 화상신호 압축 등의 분야에서 성공적으로 적용되고 있다. 일반적으로 사용되는 고정분해능의 STFT와는 달리 wavelet변환

\* 正會員, 漢陽大學校 電波工學科

(Dept. of Radio Science and Engineering)

接受日字:1994年10月12日, 수정완료일:1995年9月14日

은 다중분해능의 특징을 가지고 있다<sup>[2]</sup>. 본 논문에서는 전자기학 분야에 wavelet 변환 기법을 적용하였다. 첫번째 예제로서 wavelet 변환을 레이더 반향신호를 분석하는데 적용하였는데 이는 다음과 같은 레이더 반향신호의 일반적인 특성 때문이다. 레이더 반향신호는 주파수영역에서 다양한 규모의 서로 다른 산란메카니즘으로 이루어져 있다.

예를 들면 높은 Q값을 갖는 공진현상은 주파수영역에서 짧은 영역에 걸쳐 일어나는 산란현상이고 반면에 산란 중심체로 부터의 반향신호는 주파수 전역에 걸쳐 큰 규모의 산란 현상이다. 한편 wavelet 변환을 시간영역이 아닌 주파수영역에서 적용함으로써 주파수영역에서는 다중분해능, 시간영역에서는 가변분해능의 특성을 갖게 된다.

따라서 다중규모의 주파수영역 레이더 반향신호를 나타내기 위해서는 wavelet 변환이 고정분해능의 STFT보다 훨씬 효과적이다. 시간영역에서 반향신호는 초기상태의 날카로운 피크와 후기상태의 미약한 공진신호로 이루어져 있다. 이는 초기에는 좋은 시간분해능을 요구하고 후기에는 좋은 주파수 분해능을 요구한다. 이러한 신호는 주파수 영역에서 적용된 wavelet 변환의 가변분해능에 의해 잘 표현될 수 있다. 결론적으로 레이더 반향신호를 분석하기 위해서는 STFT보다 wavelet 변환이 더 적절한데 그 예제로 입구가 개방된 도파관 공동의 레이더 반향신호 분석 결과를 제시하였다.

한편 wavelet 변환은 전자파 산란을 빠르게 계산하는데 적용될 수 있다. 전자파 계산에서 모멘트 방법이 가장 널리 사용되며 효과적인 방법으로 인식되고 있다. 그러나 모멘트 방법에서 임피던스 행렬을 만드는데 보통 짝 칸 밀집된 행렬이 생긴다. 이것이 유한요소법의 희소 행렬과 비교해 큰 단점이 되며 선형방정식을 푸는데 많은 시간을 소요한다. wavelet 영역에서는 모멘트 행렬이 희소화 되는데, 계산을 빠르게 하기 위해 CGR(Conjugate Gradient) 반복 알고리즘과 함께 사용될 수 있다. wavelet 영역에서의 행렬은 기존의 모멘트 방법의 임피던스 행렬을 기저함수 변환에 의해 구할 수 있다. 이것은 wavelet 기저함수를 이용해서 Galerkin 방법을 사용해 행렬을 구한 결과와 동일하다. wavelet 기법과 기존의 모멘트 기법을 비교하기 위해 2차원 2면체 반사판의 산란 계산을 위한 시간성능을 서로 비교하였다.

## II. Wavelet 변환

임의의 함수  $f(t)$ 의 연속 wavelet 변환  $W_f(a, b)$ 은 다음과 같이  $f(t)$ 와  $\psi(\frac{t-b}{a})$ 의 내적으로 정의된다<sup>[2]</sup>.

$$W_f(a, b) = |a|^{-1/2} \int f(t) \psi(\frac{t-b}{a}) dt \quad (1)$$

$\psi(t)$ 는 "mother wavelet"이라고 부르고 이를 압축, 팽창(a) 또는 이동(b)하여 생긴  $\psi(\frac{t-b}{a})$ 는 "wavelets"이라고 한다. Wavelet 이론에서 mother wavelet  $\psi(t)$ 는 소위 "admissibility condition" ( $\int \psi(t) dt = 0$ )을 만족해야한다. a가 변함에 따라 wavelet  $\psi(\frac{t-b}{a})$ 의 구간이 변하는 동시에 함유하는 주파수 성분이 따라 변한다. 즉 a가 증가하면 넓은 구간을 차지하는 낮은 주파수의 wavelet이 되고 a가 감소하면 좁은 구간을 차지하는 높은 주파수의 wavelet이 된다. 또한 b를 변화시키면 시간축을 이동시켜 b를 중심으로 국부화된 wavelet이 된다. 따라서 연속 wavelet 변환은  $f(t)$ 를 시간과 주파수영역에서 국부화시키는 기능을 가지고 있다. 한편 연속 wavelet 변환을 정보의 손실없이 a, b를 이산화시켜 이산 wavelet 변환을 구할 수 있다<sup>[3]</sup>.

$$W_f(m, n) = a_0^{-m/2} \int f(t) \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (2)$$

$a_0 = 2, b_0 = 1$ 에 대해서 wavelet이 직교 기저함수를 이루는 mother wavelet  $\psi(t)$ 이 존재하는데 Daubechies에 의해 처음 구해졌다<sup>[3]</sup>. 이산 wavelet 변환은 자료압축 기법으로 쓰일 수 있으며 화상자료 압축등에 성공적으로 쓰이고 있다.

## III. 레이더 반향신호의 wavelet 분석

일반적인 레이더 반향신호의 특성은 SEM(singularity expansion method)에 의해 잘 설명될 수 있다. SEM에 의하면 유한 목표물의 주파수 영역 반향신호는 자유공진 모드와 완전함수(entire functions)로 나타내진다<sup>[4]</sup>.

$$F(\omega) = \sum_n \frac{I_n}{\omega - \omega_n} + \sum_1 e_i(\omega) \quad (3)$$

식(3)의 첫번째 급수는 목표물의 공진을 나타내며

$\omega_n$ 는 복소 공진주파수를 갖는 공진 모드들의 발진계수이다. 이로부터 공진현상은 일반적으로 공진주파수,  $\omega_n$ , 를 중심으로 짧게 존재하는 작은 규모의 신호임을 알 수 있다. 공진의 Q 또는 크기는  $\omega_n$ 이 실주파수 축으로 부터 얼마만큼 떨어져 있는나에 의해 결정된다. 공진현상은 주파수영역에서 빠르게 발진하기 때문에 시간영역 레이더신호의 후기 상태에서 지배적인 역할을 한다. 레이더 반향신호를 완전하게 나타내기 위해서는 공진현상을 나타내는 급수식 외에 산란 중심체로부터의 산란을 나타내는 완전함수가 더해져야 한다. 이 완전함수는 주파수 영역에서 완만하게 변하는 넓게 존재하는 신호이기 때문에 시간영역 레이더 신호의 초기 상태에 날카로운 피크로 나타난다. 결론적으로 임의의 유한 크기 목표물의 주파수 영역 레이더 반향신호는 다양한 크기의 다중 규모 신호가 된다. 이러한 다중 규모 신호를 효과적으로 나타내기 위해서는 다중분해능의 특징을 갖는 wavelet변환을 사용하는 것이 바람직하다.

위에서 논의한 레이더 반향신호의 일반적인 다중규모 특성은 II장에서 정의된 연속 wavelet변환에 의한 시간-주파수 영역에서 잘 분석될 수 있다. 주파수 영역에서 적용한 연속 wavelet변환의 구체적인 절차는 참고문헌<sup>15)</sup>에 제시되어 있으며 본 논문에서 STFT와 비교제시하고자 한다. 예제로 그림 1에 제시한 바와 같이 지름이 1.75인치인 원형 실린더형 도파관의 레이더 반향신호를 고려하였다.

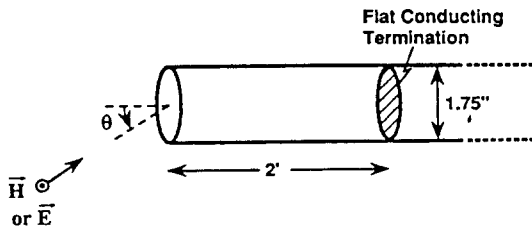
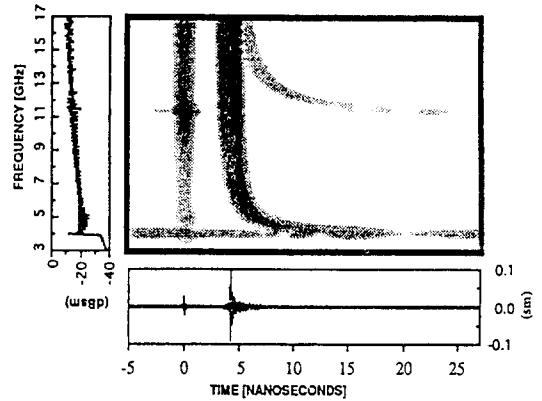


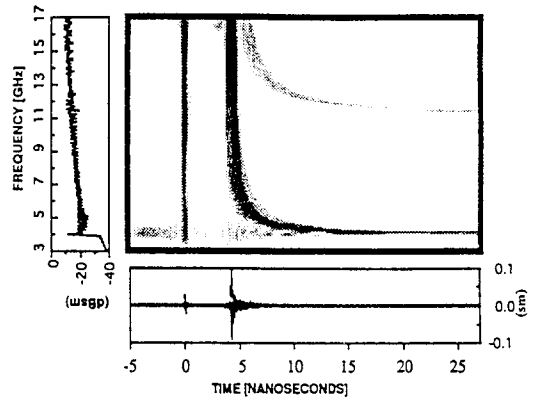
그림 1. 입구가 개방된 원형 도파관 공동의 구조  
Fig. 1. Geometry of the open-ended circular waveguide cavity.

그림 1에서 입구는 개방되어 있고 끝은 평탄한 도체로 막혀있다. 레이더 반향 신호를 구하기 위해 주파수 영역에서 컴퓨터에 의해 레이더 단면적을 계산하였다. 도파관 내부로부터의 신호를 구하기 위해 모드 전개 방법을 사용하였고 입구의 테두리로부터의 회절성분

도 고려하였다. 이러한 두 종류의 산란이 이 물체의 전체 산란파의 지배적인 성분이라는 것이 잘 알려져있다<sup>16)</sup>. 시간영역의 신호는 이렇게 구한 제한된 대역폭(2GHz에서 18GHz까지)의 주파수 영역신호를 역 푸리에 변환에 의해 구하였다.



(a) STFT (short-time Fourier transform).



(b) 연속 wavelet 변환.

그림 2. 수직 입사된 개방 도파관의 시간-주파수 영역에서 나타난 레이더 반향 신호

Fig. 2. Time-frequency representation of backscattered data from an open-ended cavity under normal incidence.

그림 2a는 수직으로 입사된 경우의 레이더 반향 신호를 STFT에 의해 시간-주파수 영역에서 국부화 시킨 것인데 폭 2GHz의 Kaiser-Bessel 윈도우를 사용했다. 또한 주파수영역의 레이더 신호와 시간 영역의 레이더 신호가 각각의 축에 함께 제시되어 있다. 나타난 시간-주파수 영역의 세기의 변화는 40dB이다. STFT에 의해 산란 메커니즘이 주파수 영역이나 시간 영역

에 비해 훨씬 명확하게 분석되고 있다.

주파수 영역에서 원형 도파관의  $TE_{11}$  모드의 차단 주파수(3.96 GHz)이하에서는 입구 테두리의 회절파만 존재하는 것을 알 수 있다. 3.96 GHz이상의 주파수에서는 회절파와 내부 산란파가 복잡하게 결합되어 있다. 시간영역에서는 회절파가 첫번째 펄스로 쉽게 인식되며 도파관 내부로 침투해 끝으로 부터 반사되어 되돌아온 두번째 펄스는 도파관 왕복시간 4.1ns후에 도달하고 있다. 그러나 두번째 펄스는 도파관 내부의 여러 가지 진행 모드와 분산 진행속도 때문에 분산되어 있다. 시간-주파수 영역에서 각각의 산란 메카니즘이 잘 분리되고 있음을 알 수 있다. 테두리로부터의 회절파와  $TE_{11}$  (차단주파수 3.96 GHz),  $TE_{12}$ (차단주파수 11.45GHz)의 두 모드가 명확하게 인식되고 있다. 각 모드의 위상속도가 전달시간에 비례하기 때문에 이 두 곡선은 도파관의 분산관계(dispersion relation)를 나타낸다. STFT는 시간 및 주파수 영역의 레이더 반향신호에 비해 많은 장점을 가지고 있으나 STFT의 고정 분해능에 의해 제한을 받고 있다. 이러한 단점은 그림 2b에 나타난 바와 같이 wavelet변환에 의해 해결될 수 있다. Wavelet변환은 초기에는 시간 분해능이 좋고 후기에는 주파수 분해능이 좋아진다. 그래서 wavelet변환은 STFT에 비해 초기의 산란 중심체, 후기의 공진현상 그리고 중간의 분산현상을 구별하기에 이상적인 분해능을 가지고 있다는 것을 알 수 있다.

IV. Wavelet 변환을 이용한 전자파산란

이산 wavelet변환의 자료압축의 특성은 전자파 산란을 빠르게 계산하는 데 사용될 수 있다. 이는 모멘트 방법에서 사용되는 적분 방정식의 그린함수가 레이더 반향신호와 마찬가지로 다중규모의 특성을 가지고 있기 때문이다. 예제로 그림 3의 2면체 반사판의 산란을 계산하기로 한다<sup>[7]</sup>.

TM 평면파가 입사될 때 반사판 표면에 유기되는 전류를 계산하기 위해서는 도체 위에서  $E_z=0$ 가 되는 경계조건을 사용해서 생기는 다음과 같은 적분방정식을 풀어야 한다.

$$\int_L J_z(\rho') G(\rho, \rho') d\rho' = -E_z^i(\rho) \quad (4)$$

식(4)에서 L은 반사판의 표면을 나타내고  $G(\rho, \rho')$ 은 그린함수로 2차원에서 Hankel함수가 된다. 여기에

펄스 전개함수와 포인트 정합을 사용한 모멘트 방법을 적용하면 다음과 같은 행렬식을 얻게 된다.

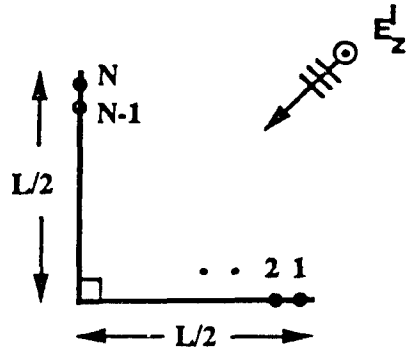


그림 3. TM 편파 입사의 2면체 반사판  
Fig. 3. A dihedral corner reflector under a TM-polarized plane wave incidence.

$$[Z][J] = [E] \quad (5)$$

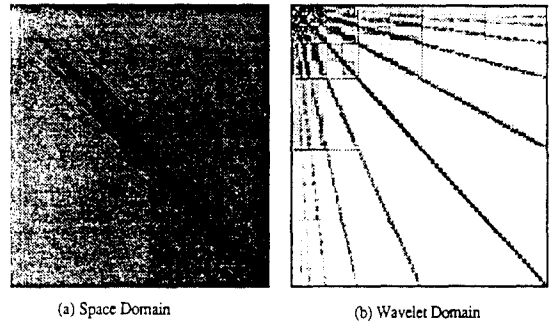


그림 4. (a)공간 영역과 (b)wavelet 영역에서 나타난 복소 임피던스 행렬의 그래프 스케일 일 화상. 나타난 임피던스 행렬의 변화는 60dB이다.

Fig. 4. Grayscale images of the magnitude of the complex impedance matrix in (a) the space domain, and (b) the wavelet domain. A dynamic range of 60 dB is shown.

(5) 식(5)에서 [Z]는 임피던스 행렬, [J]는 미지의 유기된 전류 그리고 [E]는 주어진 입사전계의 음의 값이다. 여기서 식(5)는 공간영역의 행렬식이라 불리운다. 그림 4-a는 각 면이  $1.92 \lambda$ 이고  $\Delta L = 0.03 \lambda$ 로 이산화시킨 2면체의 임피던스 행렬의 크기를 그레이 스케일로 나타낸 것이다. 공간영역 행렬의 최대 크기에 대한 최소 크기의 비가 -22 dB로 행렬이

전체적으로 밀집되어 있음을 관찰할 수있다.

한편 식(4)는 wavelet을 전개함수와 시험함수로 하는 Galerkin 모멘트 방법을 사용하여 wavelet영역에서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수있다.

$$[Z][J] = [E] \tag{6}$$

본연구에서는  $[E]$ 와  $[J]$ 를 직접 계산하지 않고 다음과 같이 공간영역의 결과로부터 기저함수 변환행렬  $[W]$ 에 의해 구하였다.

$$\begin{aligned} [E] &= [W][E], & [J] &= [W][J], \\ [Z] &= [W][Z][W]^T \end{aligned} \tag{7}$$

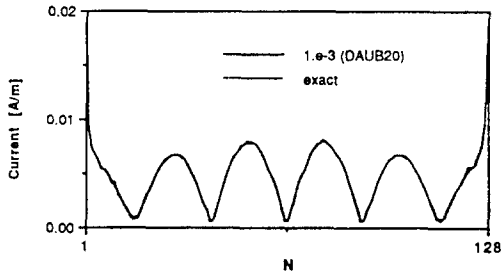


그림 5. 기존의 모멘트 방법과 Wavelet 영역 모멘트 방법에 의한 전류분포의 비교(DAUB4 wavelet과 임계값  $\tau=10^{-3}$ 을 사용)

Fig. 5. Comparison of the current solutions between by a conventional moment method and by a wavelet domain moment method (DAUB4 with a tolerance of 0.001).

식(7)에서 기저함수 변환행렬  $[W]$ 는 이산 wavelet변환을 나타낸다. 이산 wavelet 변환은 FFT와 같은 고속 알고리즘에 의해 수행될 수 있다. 본 연구에서 wavelet 영역의 행렬 방정식은 이러한 고속 알고리즘 FWT(Fast Wavelet Transform)에 의해 구해졌다<sup>[8]</sup>. Wavelet기저함수의 고유한 특성에 의해 wavelet 영역의 행렬의 대부분의 원소는 매우 작은 무시할만한 값을 갖는다. 따라서 충분히 작은 임계값  $\tau$  이하를 무시하면 그림 4-b에 보인 바와 같이 희소 행렬을 얻게 된다. Daubechies의 wavelet중에서 DAUB4<sup>[3]</sup>과 임계값  $\tau=10^{-3}$ 을 사용한 후 얻게 되는 희소행렬로부터 구한 유계 전류가 그림 5에 정확한 해와 잘 일치되는 것을 관찰할 수 있다. 이때 행렬의 희소율은 27.6% 이었다.

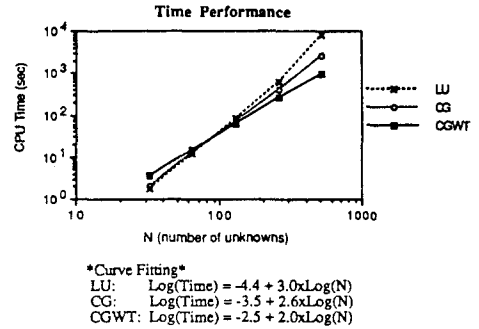


그림 6. LU분해법을 이용한 직접법(LU), 공간 영역의 반복법(CG)과 wavelet 영역의 반복법(CGWT)의 시간 성능 비교

Fig. 6. Time performance comparison between LU (direct matrix inversion using LU decomposition), CG (a conjugate gradient solver in the space domain) and CGWT (fast wavelet transform together with a conjugate gradient solver in the wavelet domain).

Wavelet영역에서의 행렬의 희소성은 CGR(Conjugate Gradient)방법을 사용한 반복법에서 계산시간을 줄이기 위하여 이용될 수 있다. 매 반복마다 수행 되는 행렬과 벡터의 곱은 행렬의 0가 아닌 원소의 수에 비례한다. 그림 6에 미지수가 증가하고 0.03  $\lambda$ 로 이산화한 2면체 반사판에 대해서 wavelet영역의 희소행렬을 이용하여 풀이하는데 걸리는 전체시간(CG WT)을 1)LU분해를 이용한 직접법 (LU)과 2)공간영역에서 사용한 CGR반복법(CG)과 비교하였다<sup>[8]</sup>. CGWT방법에서 사용된 wavelet은 DAUB4이었고 임계값은  $\tau=10^{-3}$ 이었다. 그림 6에 제시된 시간은 VAX Station 2000에서 측정된 결과이다. 이러한 수치결과에 곡선근사를 하면 각 방법의 계산량의 증가는 다음과 같다: 직접법(LU) -  $O(N^3)$ , 공간영역 반복법(CG) -  $O(N^{2.6})$ , wavelet영역 반복법(CGWT) -  $O(N^2)$ . Wavelet영역의 반복법에 대해서 다음과 같은 몇가지 사항이 논의될 수 있다. 첫째, 임피던스 행렬  $[Z]$ 의 고속 wavelet변환의 계산량은  $O(N^2)$ 이다. 둘째, wavelet변환은 단위변환(unitary operation)이기 때문에 행렬의 조건수(condition number)는 변하지 않는다. 따라서 임계치 이하 값을 무시함으로써 조건수가 약간 변하기는 하지만 CGWT에서 필요한 반복수는 공간영역의 반복수와 거의 같다. 셋째, 비진동핵 함수 (non-oscillatory kernels)에 대해서는,

wavelet영역에서 0이 아닌 원소수가  $O(N \log N)$ 이지만<sup>[9]</sup>, 본 연구의 진동 핵함수에 대해서는 최소성이  $O(N \log N)$ 과  $O(N^2)$ 의 사이에 있다. 네째, DAUB20<sup>[3]</sup>는 DAUB4보다 변환하는데 보다 더 많은 시간을 필요로 한다. 그러나 DAUB20를 사용하면 최소성이 더 증가한다.

## V. 결 론

최근에 개발된 wavelet변환 기법을 전자기학의 두 분야인 레이다 반향신호 해석과 wavelet영역의 모멘트 방법에 적용하였다. Wavelet변환은 빠르게 변하는 작은 규모의 신호와 느리게 변하는 큰 규모의 신호가 혼합된 다중규모 신호를 나타내는데 매우 효과적이다. 광대역 레이다 반향신호는 일반적으로 주파수 영역에서 빠르게 진동하는 공진특성과 완만하게 변하는 산란 중심체의 신호가 혼합된 다중규모 신호이다. 주파수 영역에서 적용된 Wavelet변환에 의해 구한 시간-주파수 영역에서 목표물(입구가 개방된 도파관 공동)의 공진 특성, 분산 현상, 산란 중심체의 여러 산란 메카니즘이 뚜렷하게 분리되고 있음을 알았다. 또한 wavelet변환을 모멘트 방법에 적용하였다. wavelet을 기저함수로 사용하여 최소화된 행렬식을 얻고, 여기에 CGR(Conjugate Gradient) 반복법을 이용하여 모멘트 행렬식을 빠르게 풀 수 있게 된다. 예제로 2면체 반사판의 산란 문제에 적용하였으며 직접법, 공간영역의 반복법과 비교하여 매우 감소된 계산량으로 빠르게 계산됨을 관찰하였다. 그러나 이에 대한 연구는 아직 초보적인 단계로 앞으로도 계속 수행되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

[1] P. Goupillaud, A. Grossman, and J. Morlet, "Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis," *Geo-*

*exploration*, vol. 23, pp. 85-102, 1984.

- [2] I. Daubechies, "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, pp. 961-1005, Sept. 1990.
- [3] I. Daubechies, "Orthogonal bases of compactly supported wavelets," *Comm. Pure Applied Math.*, 41, 1991, pp. 909-996.
- [4] C. E. Baum, "The singularity expansion method," in *Transient Electromagnetic Fields*, L. Felsen Ed. Newyork:Springer-Verlag, 1976, pp. 130-176.
- [5] H. Kim and H. Ling, "Wavelet analysis of radar echo from finite-size targets," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, no. 2, pp. 200-207, Feb. 1993.
- [6] H. Ling, S. W. Lee and R. Chou, "High-frequency RCS of open cavities with rectangular and circular cross section," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 37, pp. 648-654, May 1989.
- [7] H. Kim and H. Ling, "On the application of fast wavelet transform to the integral equation solution of electromagnetic scattering problems," *Micro-wave and Optical Technology Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 168-173, March 5, 1993.
- [8] W. H. Press et al., *Numerical recipes in FORTRAN*, 2nd ed, Cabbridge, U.K.: Cambridge university press, 1992, ch. 13.
- [9] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin, "Fast wavelet transforms and numerical algorithms I," *Comm. Pure Applied Math.*, 44, 991, pp. 18-30.

— 저 자 소 개 —

金炯東(正會員) 第32卷 A編 第2號 參照

현재 한양대학교 전파공학과