

論文95-32B-10-2

구조적불확실성을 갖는 제어시스템의 Root Clustering 해석

(A Certain Class of Root Clustering of Control Systems with Structured Uncertainty)

趙泰信*, 金永喆*

(Tae Shin Cho and Young Chol Kim)

요약

본 논문은 특성방정식이 구간 다항식군(interval polynomial family) 또는 폴리통 다항식군(polytope of polynomial family)으로 주어진 구간시스템(interval system)의 견실한 근군(root clustering) 문제를 제시한다. 복소평면에서 D-영역을 감쇄비(damping ratio)와 강인성여유(robustness margin)를 근사적으로 만족하는 포물선, 좌쌍곡선(left-hyperbola) 또는 타원으로 고려한다. 그때 유리사상함수(rational function mapping)를 이용하여 간단한 D-안정도 판별법을 제시한다. λ 또는 ω 의 sweeping 계산없이 견실한 D-안정도가 절대적 판별법에 의해 결정된다.

Abstract

This note presents the robust root clustering problem of interval systems whose characteristic equation might be given as either a family of interval polynomials or a family of polytopes. Corresponding to damping ratio and robustness margin approximately, we consider a certain class of D-region such as parabola, left-hyperbola, and ellipse in complex plane. Then a simpler D-stability criteria using rational function mapping is presented and proved. Without λ or ω sweeping calculation, the absolute criteria for robust D-stability can be determined.

I. 서론

본 논문은 구조적 계수 불확실성을 갖는 선형시불변계의 견실한 성능해석으로써 특성다항식의 매개변수 섭동에 대한 견실한 근군(robust root clustering) 문제를 다루게 된다. 즉, 원하는 제동특성과 안정도 여유를 나타내는 복소평면상의 부분영역을 D-영역이라할

때, 설계된 제어기가 구간 플랜트(interval plant)를 포함하는 피드백 시스템의 모든 특성근을 D-영역 안에 존재하게 하는지를 판별하는 문제이다.

이러한 문제의 기본적인 해는 주로 카리토노프 정리(Kharitonov theorem)^[1]와 모서리정리(edge theorem)^[6]에 근거한 결과로 C.B. Soh^[5] 등은 실수 구간다항식이 μ 의 감쇄비를 갖기 위한 충분조건을 제시하였는데, 8개의 복소계수 카리토노프 다항식이 Hurwitz이면 된다. 또한 Y.C. Soh^[4] 등은 구간다항식이 좌섹터(left sector)에 근을 갖기 위한 필요충분조건을 보였는데 특별히 선택된 유한개의 다항식이 단지 좌섹터 안에 근이 존재하면 된다. 그러나 위 두 결과들은 D-영역이 좌섹터로 한정되었고 구간다항식일 때만 적용가능하다. 일반적인 D-영역과 폴리통 다항식

* 正會員, 忠北大學校 工科大学 電子工學科

(Dept. of Electronics, College of Engineering, Chungbuk National Univ.)

※ 본 연구는 한국전력공사의 지원에 의하여 기초전력공학연구소 주관으로 수행되었음. 전력기술기초연구 중기과제(94-지-2)

接受日字: 1995年3月29日, 수정완료일: 1995年10月4日

에 대해 적용 가능한 가장 일반적인 방법은 Bartlett 등^[6]에 의해 발표된 모서리정리(edge theorem)이다. 즉 폴리톱다항식의 모든 근이 복소평면의 D-영역 안에 근이 존재하기 위한 필요충분조건으로써 폴리톱의 모든 외모서리(exposed edge)의 근이 그 영역 안에 존재하면 된다. 그러나 반복적으로 근을 구해야하는 계산부담이 요구된다.

본 논문에서는 D-안정영역을 좌쌍곡선(left-hyperbola)이나 좌포물선(left-parabola)함수로 표현한 경우, 구간 플랜트를 포함한 피드백시스템의 절대적 D-안정도를 판별하기 위한 좀 더 단순화된 방법을 제시하고자한다. 유리사상함수에 의해 복소평면 s에 정의된 D-영역을 또다른 복소평면의 좌반평면으로 사상시키면, 구간 다항식은 폴리톱으로, 폴리톱도 폴리톱 다항식으로 사상되는 성질을 이용한다. 폴리톱의 Hurwitz 판별은 외모서리에 대해 Barmish^[3]의 결과를 적용함으로써 유한개의 고유치 계산으로 D-안정도에 대한 절대적 판별을 구하게 된다. 적절한 예제를 통해 이 방식과 기존의 다른 방식과의 차이를 보이코자 한다.

II. 구조적 불확실성을 갖는 시스템의 Root Clustering 해석

1. 정의

구조적 불확실성(structured uncertainty)을 갖는 시스템의 특성다항식은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$P(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i \tag{1}$$

여기서, $q^T = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_k]$ 는 불확정 매개변수공간 Q내에서 변화한다.

$$Q = \{ q \mid q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 1, 2, \dots, k \} \tag{2}$$

여기서 상첨자 -, +는 q_i 의 하한치, 상한치를 표시해준다.

식(1), (2)로서 표현되는 다항식군을 다시쓰면 다음 식으로 표현된다.

$$P = \{ P(s, q) \mid q \in Q \} \tag{3}$$

그리고 P의 모든 근이 복소평면에 미리 설정해준 D-영역 내에 존재하면, 시스템은 D-안정(D-stable)이라고 부르기로 한다.

정의1(구간다항식) : 식(1), (2)에서

$$q = [q_0 \ q_1 \ \dots \ q_i \ \dots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$a_i(q) = q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Q = \{ q \mid q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 0, 1, \dots, n \}$$

이면 다음 식(4)의 다항식을 구간다항식이라 한다.

$$P(s, q) = \sum_{i=0}^n q_i s^i \tag{4}$$

정의2(정점다항식) : 식(1), (2)에 대해서 P는 많아 야 2^k 개의 극점을 가지며 i번째 정점은 다음 식(5)로 표현한다.

$$q_i = [q_1^i \ q_2^i \ \dots \ q_k^i]^T$$

여기서, $q_j^i = q_j^-$ 또는 q_j^+ , $j = 1, 2, \dots, k$

$$P_i(s) = \sum_{j=0}^n a_j(q_i) s^j \tag{5}$$

정의3(폴리톱 다항식) : m개의 정점다항식간의 컨벡스 쉘(convex hull)을 폴리톱 다항식이라 한다. 즉,

$$P = \{ P(s) = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i(s) \mid \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \} \tag{6}$$

여기서, $P_i(s)$ 는 폴리톱 P의 정점다항식이다.

폴리톱 P의 모서리(edge)는 두 정점의 컨벡스 결합이고, P와 P의 지지 초평면(supporting hyperplane) 사이의 교집합으로 표현되는 모서리이다.

정의4(Root clustering) : 다항식 $P(s)$ 의 모든 근의 집합을 $P(s)$ 의 스펙트럼 (spectrum) σ 로 표시한다. 즉,

$$\sigma(P(s)) = \{ s \in C \mid P(s) = 0 \}$$

복소평면에서 두 변수 x와 y의 연속함수로 D-영역을 다음과 같이 놓으면

$$D = \{ (x + iy) \mid f(x, y) < 0 \}$$

근군(root clustering) 문제는 다음과 같이 주어지는 조건식을 만족하는지를 검증하는 것이다

$$\sigma(P(s)) \subset D$$

2. 문제의 설정

다음의 피드백시스템을 고려한다.

<그림1>과 같은 단일 입출력(SISO) 피드백시스템에서, 플랜트는 매개변수 섭동을 가지며 제어기 C(s)는 선형 보상기이다.

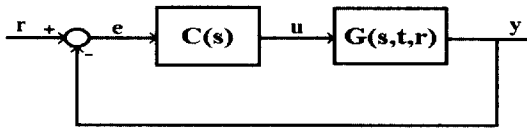


그림 1. 피드백 시스템
Fig. 1. Feedback System.

플랜트 전달함수 $G(s)$ 는 다음 식으로 놓는다.

$$G(s, t, r) = \frac{N(s, t)}{D(s, r)} = \frac{t_m s^m + t_{m-1} s^{m-1} + \dots + t_0}{r_n s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \dots + r_0} \quad (7-a)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } t_i &\in [t_i^-, t_i^+], \quad i = 0, 1, \dots, m \\ r_j &\in [r_j^-, r_j^+], \quad j = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7-b)$$

여기서 $n \geq m$ 이고 $D(s, r)$, $N(s, t)$ 는 식(7-b)의 조건 하에서도 서로소(coprime)라고 가정한다.

보상기 전달함수 $C(s)$ 는 다음 식으로 놓는다.

$$C(s) = \frac{C_1(s)}{C_2(s)} = \frac{n_p s^p + n_{p-1} s^{p-1} + \dots + p_0}{d_i s^i + d_{i-1} s^{i-1} + \dots + d_0} \quad (8)$$

$(l \leq m-1, p \leq n-1)$

따라서 피드백시스템의 특성다항식 $\Delta(s)$ 는 다음 식으로 표현한다.

$$\Delta(s) = C_1(s)N(s, t) + C_2(s)D(s, r) \quad (9-a)$$

$\Delta(s)$ 를 다항식으로 표현하면,

$$\Delta(s, q) = \delta_n(q) s^n + \delta_{n-1}(q) s^{n-1} + \dots + \delta_0(q) \quad (9-b)$$

$(\bar{n} = n + m - 1)$

여기서, 실계수 t_i, r_j 의 집합을 Q_C 라 하면 식(2)에 대응하는 불확실한 매개변수 벡터 q 는 다음과 같다.

$$q^T = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_k], \quad q_i \in Q_C, \quad k \leq (n+m+2) \quad (10)$$

식(9-b)는 식(10)의 q 에 따라 δ_k 가 q 에 1차 독립인 경우(Interval polynomial family: IPF)와 1차 종속인 경우(Polytopic polynomial family: PPF)로 나타나게 된다. $\Delta(s)$ 는 $C(s)$ 와 $G(s, t, r)$ 에 따라 구간다항식 또는 폴리톱 다항식으로 나타나게 된다.

본 논문에서는 하나의 강인한 성능해석으로서, 구조적 불확실성 $t \in T, r \in R$ 에 대해 특성다항식군 (9-b)의 모든 근이 <그림3>과 같은 D-영역에 존재하는지를 판별하는 조건을 구하고자 한다. 대개 <그림2>와 같은 감쇄비를 고려한 섹터영역과 강인성 여유를 두기 위한 허수축 이동을 고려하지만 본 논문에서는 하나의 연속

함수로 표현되는 <그림3>과 같은 좌쌍곡선, 좌포물선을 고려하기로 한다. 따라서 요구되는 피드백시스템 특성다항식군의 근 영역이 D-영역이라고 할 때, 문제는 (7-a), (7-b)로 표현되는 구간플랜트에 대해 보상기 $C(s)$ 가 D-안정을 보장하는 지이다. 이것은 $\Delta(s)$ 의 모든 근이 (7-b)의 섭동에도 불구하고 D-영역 안에 놓이게 됨을 의미한다.

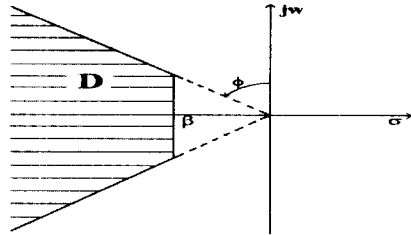


그림 2. 감쇄비 ϕ 와 안정도 여유 β 를 갖는 D-영역
Fig. 2. D-region defined with damping ratio ϕ and stability margin β .

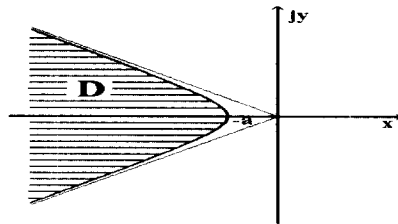


그림 3. 좌쌍곡선 D-영역
Fig. 3. Left-hyperbola D-region.

3. 기존의 D-안정도 해석 방식

(1) λ -sweeping 방식

제어계의 특성다항식군은 일반적으로 PPF, 다선형 (multilinear) 다항식으로 나타나며 이 경우에는 구간다항식으로 부터 생성된 4개의 카리토노프 다항식의 안정도가 전체의 IPF의 안정도에 대한 필요충분조건임을 의미한 카리토노프 정리^[11]는 적용될 수 없다. 1987년 Bartlett등은 PPF에 대한 일반해로 소위 모서리(Edge) 정리^[16]를 발표하였다.

이는 불확실성 매개변수 공간에서 주어진 폴리톱 다항식에 대해서, 모든 외모서리들의 근영역이 D-영역에 존재하기만 하면 전체 폴리톱의 근영역도 D-영역 내에 존재한다는 것이다. 즉 <모서리 정리>는 N개의 정점다항식에 대해 다음 컨벡스 결합들의 D-안정도가 전체 PPF P의 D-안정도를 보장한다는 뜻이다.

$$P = \{ P_{ij}(s, \lambda) = \lambda P_i(s) + (1 - \lambda) P_j(s), \lambda \in [0, 1], i, j = 1, 2, \dots, N \} \quad (11)$$

불확실성 매개변수 q_i 의 개수가 k 개 이면 2^k 개의 단점을 가지게 되므로 식(11)로 표현되는 총 모서리 수는 $N_c = k2^{k-1}$ 이다. 다시말해서 <모서리 정리>는 모든 외모서리들에 대응하도록 λ 를 0 부터 1까지 쓸면서 반복적으로 근을 구해야하기 때문에 λ -sweeping방식이라 부르기로 한다.

(2) 경계면 sweeping 방식

식(9-b)로 표현된 다항식을 고려할때, 복소평면에서 고정된 $z \in C$ 에 대해서 value set은 <정의2>에 주어진 정점다항식 집합 $\{p_i(z)\}$ 의 컨벡스 결합으로 구성된 다각형(polygon)으로 된다^[21].

즉, $p(z, Q) = \text{conv} \{ p_i(z) \}$.

영점 배타정리(Zero exclusion 정리)^[21]에 의하면 식(3)으로 정의된 다항식군 $P = \{ p(s, q) \mid q \in Q \}$ 가 강인한 D-안정이기 위한 필요충분조건은 모든 $z \in \partial D$ (여기서는 ∂D 는 D영역의 경계를 표기함)에 대해서 모든 value set이 원점을 포함하지 않으면 된다. 즉, $0 \notin p(z, Q)$ 이면 P는 강인한 D-안정이다. D-안정영역의 경계를 따라 반복적으로 계산해야하기 때문에 경계면 sweeping방식으로도 불린다.

(3) 구간다항식의 제동비 판별방식

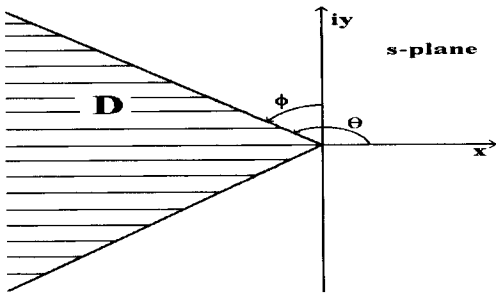


그림 4. 감쇄비를 고려한 D-영역
Fig. 4. D-region defined with damping ratio.

C.B. Soh^[5]와 Y.C. Soh^[4]는 D-영역이 감쇄비만을 고려한 섹터로 주어질 때의 판별조건을 제시하였다. 다음절의 주요결과와 비교하기 위해서 간단히 요약한다.

<그림4>의 섹터영역과 다음의 구간 다항식군 P_I 를 고려한다.

$$P_I = \{ P(s, q) : p(s) = \sum_{k=0}^n q_k s^k (q_0 \neq 0), q_k \in [q_k^-, q_k^+] \} \quad (12)$$

<그림4>의 섹터영역을 <그림5>의 Ω -영역으로 사상시

키는 선형사상 $e^{j\phi} : s \rightarrow z$ 를 이용하면, 변환된 다항식 P_{T_I} 는 다음과 같이 복소계수를 갖는 다항식군으로 나타난다.

$$P_{T_I}(s) = \sum_{k=0}^n (c_k + jd_k) s^k \quad (13)$$

여기서, $c_k \in [a_k, \beta_k], d_k \in [\tau_k, \zeta_k]$

C.B. Soh^[5]는 P_I 가 <그림4>의 섹터영역에 대해 D-안정이기 위해서는 다음의 계수섭동한계를 갖는 8개의 복소 카리토노프 정점다항식이 Hurwitz이면 충분함을 보였다.

$$\begin{aligned} \beta_k &= \max \{ p_i^- \cos k\phi, p_i^+ \cos k\phi \} \\ \alpha_k &= \min \{ p_i^- \cos k\phi, p_i^+ \cos k\phi \} \\ \zeta_k &= \max \{ p_i^- \sin k\phi, p_i^+ \sin k\phi \} \\ \tau_k &= \min \{ p_i^- \sin k\phi, p_i^+ \sin k\phi \} \end{aligned} \quad (14)$$

그러나 이 결과는 비선형 복소계수를 갖는 다항식군을 구간다항식군으로 처리하기 위해 계수섭동을 식(14)로 과포함(overbound)시키기 때문에 단지 충분조건에 불과하다. Y.C. Soh^[4]는 같은 문제에 대해 필요충분조건을 제시하였다.

이는 n 과 m 이 서로소인 정수이고 $1/2 \leq n/m \leq 1$ 일 때 $\theta = n\pi/m$ 라 놓을때, 실수 구간다항식이 <그림4>의 섹터영역에 대해 D-안정이기 위한 필요충분조건은 $2m$ 개의 정점다항식이 D-안정이어야한다는 것이다.

C.B. Soh와 Y.C. Soh의 결과는 단지 D-영역이 좌섹터와 구간 다항식으로 주어질 경우에 한하여 적용될 수 있다. C.B. Soh의 결과는 충분조건만을 제시했다. 또한 두방식 모두 강인성 여유를 고려하면 적용할 수 없다. 무엇보다도 <그림1>의 구간시스템의 특성 다항식은 일반적으로 폴립롭 다항식군으로 나타나기 때문에 위의 두 결과는 적용할 수 없다.

이러한 문제에 대해서 모서리 정리에서 유도된 value set과 영점 배타정리를 이용하면 해결할 수 있다. 복소평면에서 주어진 안정영역의 경계면을 따라 value set을 구해서 원점을 포함하는지를 판별하면 된다. 안정영역이 LHP, 좌반섹터, 단위원으로 주어지면 경계면을 표현하는 sweeping 함수를 쉽게 얻을 수 있으나 이러한 경우는 극히 제한적이다. 또한 정량적으로 안정도를 판별해주지 못할뿐아니라 너무 진부하다.

III. Robust Root Clustering

1. 사상함수의 정의

특성다항식의 전실한 근군 문제를 다루기 위해 먼저 복소평면에서 <그림3>과 다음의 개영역(open region)을 고려한다.

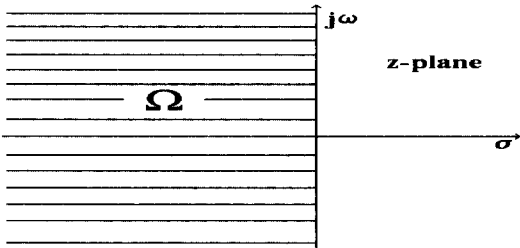


그림 5. 복소 z-평면에서의 LHP
Fig. 5. LHP in Complex z-plane.

<그림3>의 D-영역은 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$D = \{ (x+iy) : f(x,y) < 0 \} \tag{15-a}$$

여기서, $f(x,y) = \sum_{i,j} f_{ij} x^i y^j$ (15-b)

<그림5>와 같이 z-평면의 좌반평면을 $\Omega = C_-$ 라 놓는다.

대개 감쇄비를 고려한 섹터영역과 강인성 여유를 두기 위한 허수축 이동을 고려하지만, 본 논문에서는 식 (15-a), (15-b)와 같이 하나의 연속함수로 표현되는 좌쌍곡선, 좌포물선을 고려하기로 한다. 서론에서 언급한 바와 같이 이러한 문제는 모서리 정리나 value set의 ω -sweeping에 의해서도 판별할 수 있으나 진부하다. 여기서는 정량적으로 절대적 D-안정도를 판별할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

접근방법은 유리함수 사상을 이용하여 <그림3>의 D-영역을 <그림5>의 좌반평면 Ω -영역으로 변환하는 것으로부터 이루어진다.

다음 유리함수를 정의한다.

$$s = h(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)} \tag{16}$$

여기서, $\psi(z)$ 와 $\phi(z)$ 는 서로소(coprime)인 다항식이 다.

다항식 $\psi(z) - s\phi(z) = 0$ 인 집합은 다음 식으로 놓는다.

$$V(\psi(z) - s\phi(z)) = \{ s \mid \psi(z) - s\phi(z) = 0 \}$$

다음 정리는 $s \leftrightarrow z$ 상호간 1:1 대응관계를 나타내준

다.

정리1 [7]: $\psi(z)$ 와 $\phi(z)$ 가 서로소이고 $s = h(z) = \psi(z)/\phi(z)$ 를 유리사상(rational map)이라 놓자. Ω 를 복소평면(C)의 부분집합이라 놓으면 다음에 정의된 D-영역은 서로 등가이다.

(i) $D = C \setminus h(C \setminus \Omega)$

(ii) $D = \{ s \in C : h^{-1}(s) \subset \Omega \}$

(iii) $D = \{ s \in C : V(\psi(z) - s\phi(z)) \subset \Omega \}$ ■

여기서, <그림3>과 같이 감쇄비와 안정도를 만족하는 좌쌍곡선과 포물선함수를 D-영역으로 놓고 Ω 영역을 C_- (open LHP)로 한정시킨다.

$s = x + iy$ 와 함께 식(16)으로 부터 다음 식을 정의한다.

$$g(z) = \psi(z) - (x+iy)\phi(z) \tag{17}$$

식(17)에 대하여 Hurwitz 판별법을 적용하면 $V[g(z)] \subset C_-$ 이기 위한 j개의 부등식($\Delta_j(x,y) > 0, j = 1, 2, \dots$)으로부터 $\Omega \subset C_-$ 에 대응하는 s-평면의 D-영역이 얻어진다.

$$D \cap \{ (x+iy) : \Delta_j(x,y) > 0 \} \tag{18}$$

한 예로, 좌쌍곡선(left-hyperbola) 영역을 얻기 위한 사상함수를 아래와 같이 놓는다.

$$s = h(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)} = \frac{az^2 + 2bz - a}{1+z^2} \tag{19-a}$$

$$g(z) = (a-x-iy)z^2 + 2bz + c-x-iy \tag{19-b}$$

위 식(19-b)의 복소 다항식에 대해 Hurwitz 판별법을 적용하면 2개의 부등식이 얻어진다. 이 부등식은 다음의 좌쌍곡선 영역(단, a, b > 0)으로 표현된다.

$$D = \{ (x+iy) : 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \} \cap \{ (x-iy) : x < 0 \} \tag{20}$$

D-영역이 포물선일 때도 마찬가지로 방법으로 아래와 같은 사상함수를 사용해서 얻어진다.

$$s = h(z) = az^2 + z + b \tag{21-a}$$

$$D = \{ (x+iy) : ay^2 + x - b < 0 \} \tag{21-b}$$

D-영역이 타원일 때는 아래와 같다.

$$s = h(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)} = \frac{az^2 + 2bz + a}{z^2 - 1} \tag{22-a}$$

$$D = \{ (x+iy) : -1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \} \text{ (단, } a, b > 0 \text{)} \quad (22-b)$$

2. 주요정리

본 절에서는 복소평면에서 D-영역이 좌쌍곡선, 타원, 또는 포물선으로 주어질 때 구간 또는 폴리톱 다항식이 D-안정이기 위한 필요충분조건을 보인다.

먼저 폴리톱 다항식군 P_p 를 정의한다.

$$P_p = \{ P(s, q) \mid P(s, q) = \sum_{i=0}^n p_i(q)s^i, q \in Q \} \quad (23-a)$$

여기서, $p_i(q) = \gamma_i^T q + \beta_i$ (23-b)

γ_i 와 β_i 는 상수이고, $\gamma_i \in \mathbb{R}^k, q \in \mathbb{R}^k, \beta_i \in \mathbb{R}$.

$q_i \in [q_i^-, q_i^+]$. Q는 k-차원 초직사각형(hyperrectangle)이다.

이제 s-평면에서 정의된 좌-쌍곡선 영역을 z-평면의 좌반평면으로 사상시키는 유리함수를 이용하여 식(23-a)의 다항식군을 z-평면으로 변환해보자. 즉 식(19)로부터

$$s = h(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)} = \frac{az^2 + 2bz - a}{z^2 + 1} \quad (24)$$

식(24)를 식(23-a)에 대입하면,

$$\begin{aligned} P_{TP} &= P(h(z), q) \\ &= \sum_{i=0}^n p_i(q) \psi^i(z) \phi^{-i}(z) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} t_j(q) z^j \end{aligned} \quad (25)$$

식(25)은 차수가 2배로 증가된 폴리톱 다항식이다. 이 변환된 다항식군을 P_{TP} 라 놓는다. 불확실한 계수가 k-차원이므로 식(25)의 정점다항식의 수는 2^k 개이고, 각각을 $P_{T1}^v, P_{T2}^v, \dots$ 라 놓는다. 매개변수공간의 박스 Q의 외모서리에 대응하는 다항식은 다음과 같이 정점다항식의 컨벡스 결합으로 표현된다.

$$P_{TP}^E(z) = \mu P_{T1}^v(z) + (1-\mu) P_{T2}^v(z), \mu \in [0, 1] \quad (26)$$

외모서리의 수는 $k2^{k-1}$ 개이고, 외모서리를 이루는 정점다항식 지수쌍의 조합을 N_E 라 하자. 즉,

$$N_E = \{ (i, j) \mid P_{ij}^E, i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots (i \neq j) \} \quad (27)$$

식(26)의 다항식 선분(segment)의 Hurwitz 안정은 다음의 정리 [2]에 의해 쉽게 판별할 수 있다.

정리2 [3]: 두개의 n차, 실수 다항식 $P_1(s)$ 와 $P_2(s)$ 의 컨벡스 결합이 Hurwitz이기 위한 필요충분조건은

(1) $P_1(s)$ 가 Hurwitz이고

(2) $\lambda_k [H^{-1}(P_1)H(P_2)] > 0, k=1, 2, \dots, n$

여기서, $H(P_i)$: 다항식 $P_i(s)$ 의 hurwitz 판별행렬.

$\lambda_k [M]$: 행렬 M의 k번째 고유치 ■

이제 상기 과정을 본래의 문제에 적용하면 다음 결과를 얻는다.

정리3: <그림1>의 피드백시스템에서 D-영역이 <그림3>과 같이 좌쌍곡선으로 주어졌을 때 제어기 C(s)가 구간시스템을 D-안정화시키는 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) 식 (16)으로 사상된 모든 정점다항식 $\delta_{T1}^v, \delta_{T2}^v, \dots, \delta_{Tn}^v$ 가 Hurwitz이고, \perp

(ii) $\lambda_{ij} [H(\delta_{T1}^v)^{-1}H(\delta_{Tj}^v)] > 0, (i, j) \in N_E \quad (28)$

여기서 \perp 은 외모서리의 갯수이고 δ_{Tj}^v 는 특성다항식(9-a)를 유리함수(24)으로 변환시킨 다항식군의 정점다항식이다.

<증명>

주어진 다항식 $\Delta(s) = \sum a_i s^i$ 에 대해서 $\Delta(s)$ 의 근의 집합을 $\sigma(\Delta)$ 라 놓는다. 증명을 위해 다음 보조정리를 인용한다.

보조정리4 [7]: <정리1>에서와 같이 s-평면에 정의된 D-영역과 z-평면의 좌반평면으로 정의된

Ω 영역을 고려한다. 상수 계수를 갖는 다항식 $\Delta(s)$ 가 $h(z) = \psi(z)/\phi(z)$ 에 의해 사상되어 $\Delta_T(z) = \Delta(\psi(z))/\phi(z) = \sum_{i=0}^n a_i \psi^i(z) \phi^{-i}(z)$ 로 나타날때, $\sigma(\Delta) \subset D$ 이기 위한 필요충분조건은 $\sigma(\Delta_T) \subset \Omega$ 이다. □

그런데 <그림1>의 피드백 시스템의 특성다항식(9-b)은 구간다항식군 Δ_I 또는 폴리톱 다항식군 Δ_P 로 나타남은 쉽게 알 수 있다. 더욱이, 식(24)에 의해 사상된 $\{\delta_T(s)\}$ 는 $\{\delta(s)\}$ 가 Δ_I 또는 Δ_P 이건 항시 폴리톱 다항식군 Δ_{TP} 로 나타낸다.

E 는 n-차 정점다항식의 컨벡스 조합이라 놓는다. 즉,

$$E = \{ \delta_i(s) \mid \delta_i(s) = \lambda \delta_{i1}^v(s) + (1-\lambda) \delta_{i2}^v(s), \lambda \in [0, 1], i, j \in N_E \}$$

$\delta_T(z)$ 의 정의로부터 E_T 의 집합을 다음과 같이 놓는다.

$$E_T = \{ \delta_{Tj}(s) \mid \delta_{Tj}(s) = \lambda \delta_{Tj1}^v(s) + (1-\lambda) \delta_{Tj2}^v(s), \lambda \in [0, 1], i, j \in N_E \}$$

(필요조건) : <그림1>의 피드백 시스템이 D-안정이라

고 가정한다. 그러면 모든 $\delta(s) \in \mathcal{D}_p$ 에 대해 $\sigma(\delta) \subset D$ 임을 의미하고 <보조정리4>에 의해 $\sigma(\delta_T) \subset \mathcal{Q}$ 가 성립한다. $\delta_T(s)$ 는 폴리통 다항식군이므로 모서리정리에 의해 $\sigma(E) \subset D$ 이면 $\sigma(E_T) \subset \mathcal{Q}$ (hurwitz)임을 의미하고 <정리2>에 의해 결국 정점 다항식과 이들의 컨벡스 결합은 조건 (i), (ii)를 만족해야 한다.

(충분조건) : 조건 (i)과 (ii)을 만족한다고 가정한다. 그땐 <정리2>에 의해 모든 $\lambda \in [0, 1]$ 와 N_E 에 대해서 $\sigma(E_T) \subset \mathcal{Q}$ 가 만족되므로 모서리정리에 의해 $\sigma(\delta_T) \subset \mathcal{Q} = C$ (Hurwitz)임을 의미한다. 이것은 <보조정리4>에 의해 $\sigma(\delta) \subset D$ 이므로 $C(s)$ 가 D-안정화시킴이 입증된다. ■

<그림1>과 같은 피드백시스템의 특성다항식은 일반적으로 폴리통 다항식군으로 나타난다. 폴리통 다항식군의 D-안정도는 모서리 정리나 영점배타 정리에 의해 판별할 수 있으나 λ 또는 ω sweeping을 필요로 하는 반복계산 방법이다. 위 주요결과에서 제시된 판별조건은 불확실한 계수의 수가 k개일때 k^{k-1} 개의 Hurwitz 행렬의 고유치 부호만을 조사하면 되기 때문에 절대적 D-안정도 판별이 용이하다.

부 언 : D-영역이 포물선(식21-b) 또는 타원(식22-b)으로 주어진 경우에도 식(21-a) 또는 식(22-a)에 의해 $s \rightarrow z$ 평면으로 사상된 다항식이 폴리통 다항식군으로 주어지기 때문에 위 <정리3>을 적용할 수 있다.

IV. 수 치 예

두가지 수치예를 통하여 <정리3>을 적용한 결과를 보이고, 기존의 방식인 모서리 정리를 이용한 λ -sweeping 방식과 value set을 이용한 경계면 sweeping 방식의 결과와 비교한다.

<예제.1> <그림1>에서

$$C(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad G(s, t, r) = \frac{t_0}{s^2 + r_1 s + 5}$$

여기서, $t_0 \in [35, 40]$, $r_1 \in [8, 10]$ 이다.

$$D = \{ (x+iy) : 1-x^2 + \frac{y^2}{4} < 0 \} \cap \{ (x+iy) : x < 0 \}$$

전체 시스템이 D-안정인지를 판별하라.

풀 이 : 전체 시스템의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\delta(s, t, r) = s^3 + (r_1 + 1)s^2 + (t_0 + r_1 + 5)s + 2t_0 + 5 \quad (29)$$

C_- 를 좌쌍극선인 D-영역으로 변환시키는 사상함수는 아래와 같다.

$$h(z) = \frac{z^2 + 4z - 1}{z^2 + 1}$$

변환된 폴리통 다항식은 다음과 같다.

$$\delta_T(z, t, r) = (3t_0 + 2r_1 + 12)z^6 + (4t_0 + 12r_1 + 40)z^5 + (7t_0 + 16r_1 + 80)z^4 + (8t_0 + 8r_1 + 80)z^3 + (5t_0 + 14r_1 - 20)z^2 + (4t_0 - 4r_1 + 24)z + t_0 \quad (30)$$

위 식의 t_0 와 r_1 의 정점으로 이루어진 4개의 정점다항식은 $\delta_{T1}^v(z, t_0^-, r_1^-)$, $\delta_{T2}^v(z, t_0^+, r_1^-)$, $\delta_{T3}^v(z, t_0^-, r_1^+)$, $\delta_{T4}^v(z, t_0^+, r_1^+)$ 로 얻어진다. 즉,

$$\delta_{T1}^v(z) = 133z^6 + 276z^5 + 453z^4 + 424z^3 + 267z^2 + 132z + 35$$

$$\delta_{T2}^v(z) = 148z^6 + 296z^5 + 488z^4 + 464z^3 + 292z^2 + 152z + 40$$

$$\delta_{T3}^v(z) = 137z^6 + 300z^5 + 485z^4 + 440z^3 + 295z^2 + 124z + 35$$

$$\delta_{T4}^v(z) = 152z^6 + 320z^5 + 520z^4 + 480z^3 + 320z^2 + 144z + 40$$

위 4개의 다항식에 대해 <정리3>의 조건 (i)은 만족하며 조건 (ii)를 판별하기 위해 Hurwitz 행렬식으로 이루어진 단일 행렬의 고유치를 구한 결과를 도표로 나타내었다.

고유값 no	1	2	3	4	5	6
λ_{12}	4.246	1.0	1.173	1.158	1.0994	1.143
λ_{13}	2.302	1.0	1.176	1.149	1.079	1.143
λ_{21}	1.351	0.788	0.971	0.875	0.65-j0.12	0.65+j0.12
λ_{31}	1.086	0.851	0.921	0.875	1.0	1.0

위 도표로부터 모든 고유치가 모두 0 보다 크므로 시스템은 D-안정하다.

별도의 방법으로써, <그림6>은 모서리정리를 이용하여 특성다항식 $\delta(s, t, r)$ 의 근이 D-영역에 존재하는지를 보인 것이다. <그림7>는 식(30)에 대한 value set의 주파수에 따른 움직임(motion)을 구한 것으로 원점을 포함하지 않으므로 Hurwitz 이고, <정리3>의 두조건을 만족하는 것과 등가이다.

<예제2> $t_0 \in [25, 30]$, $r_1 \in [6, 8]$ 이 주어질 때 <예제1>과 동일한 문제에 대해 D-안정 여부를 판별하라.

풀 이 : 매개변수 섭동범위가 다르므로 <예제1>과 4개의 정점다항식이 다르게 나타난다.

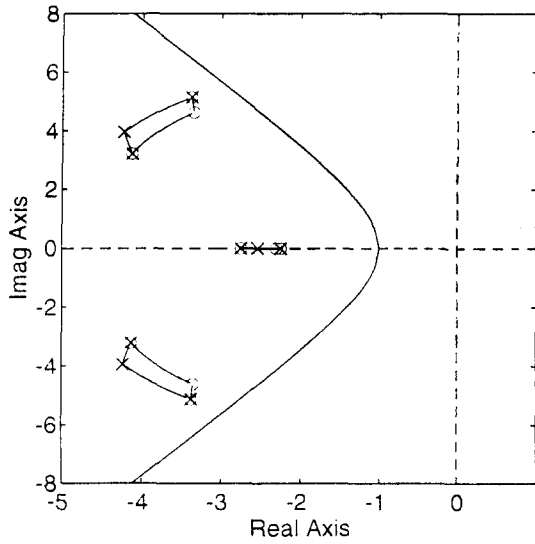


그림 6. 예제1의 근영역
Fig. 6. Root region of <Example.1>.

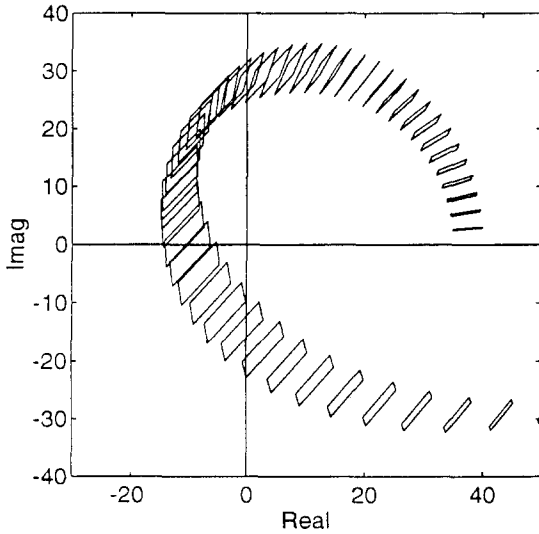


그림 7. 예제1의 value set
Fig. 7. The value set of <Example.1>.

$\delta_{71}^b(z) = 99z^6 + 212z^5 + 351z^4 + 328z^3 + 189z^2 + 100z + 25$
 $\delta_{72}^b(z) = 114z^6 + 232z^5 + 386z^4 + 368z^3 + 214z^2 + 120z + 30$
 $\delta_{73}^b(z) = 103z^6 + 236z^5 + 383z^4 + 344z^3 + 217z^2 + 92z + 25$
 $\delta_{74}^b(z) = 118z^6 + 256z^5 + 418z^4 + 384z^3 + 242z^2 + 112z + 30$

4개의 다항식에 대해 <정리3>의 조건중 조건 (i)은 만족한다. 조건(ii)를 판별하기 위해 고유치를 구한 결과를 도표로 나타내었다.

이 도표의 모든 고유치가 0 보다 크지 않으므로 시스템은 D-안정하지 않다. 또한, value set에 의한 방법

과 모서리 정리를 적용한 결과도 <그림8>, <그림9>에서와 같이 <정리3>의 방법과 같은 결과를 보이고 있다.

고유값 no	1	2	3	4	5	6
λ_{12}	-1.25	0.01	0.011	0.012	0.012	0.012
λ_{13}	-1.09	0.01	0.011	0.012	0.012	0.012
λ_{24}	0.016	0.007	0.009	0.008	0.007-j0.003	0.007+j0.003
λ_{34}	0.012	0.009	0.008	0.001	0.01	0.0083

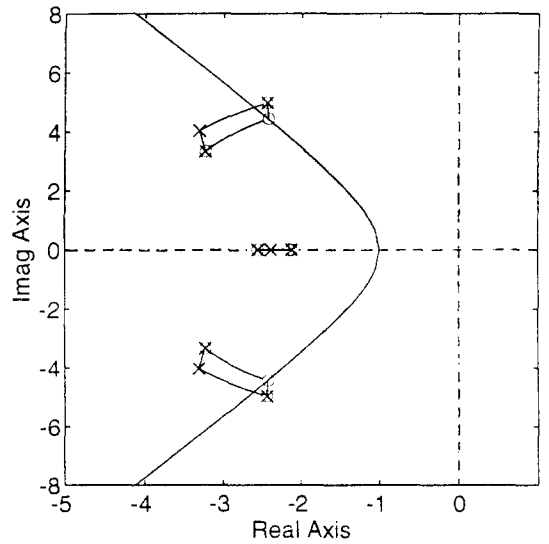


그림 8. 예제2의 근영역
Fig. 8. Root region of <Example. 2>.

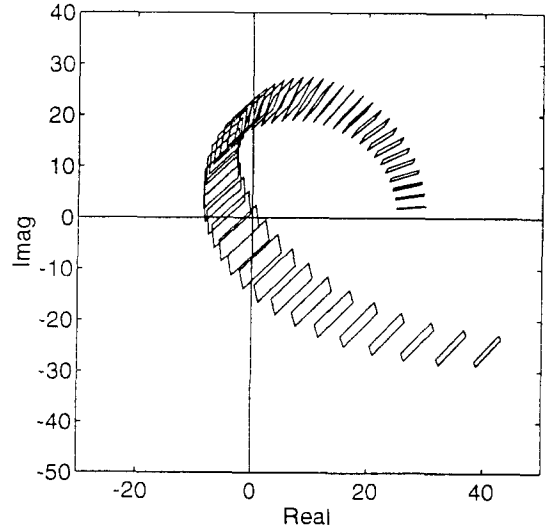


그림 9. 예제2의 value set
Fig. 9. The value set of <Example.2>.

V. 결론

구간 플랜트를 포함하는 피드백시스템의 특성방정식은 구간 다항식근 이거나 폴리통 다항식근으로 나타난다. 본 논문에서는 이러한 시스템의 페루프특성근이 주어질 불확실성 매개변수의 섭동에 대해 복소평면에 정의된 특정영역(D-영역)에 속하는지를 판별하는 견실한 근근 문제를 다루었다. D-영역은 좌-쌍곡선, 좌-포물선, 타원으로 표현되는 경우로 한정하였다. 이러한 근-영역은 감쇄비와 안정도 여유를 근사적으로 동시에 고려할 수 있는 장점이 있다.

s-평면에서 정의된 D-영역을 유리함수 사상을 이용하여 z-평면의 LHP으로 변환시킨 뒤, 변환함수의 Hurwitz조건을 구하였다. 폴리통 다항식근의 D-안정도는 모서리 정리나 영점배타 정리에 의해 판별할 수 있으나 λ 또는 ω sweeping을 필요로 하는 반복계산 방법이다. 본 논문에서 제시된 판별조건은 불확실한 계수의 수가 k개일 때 n^{k-1} 개의 Hurwitz 행렬의 고유치 부호만을 조사하면 되기 때문에 절대적 D-안정도 판별이 용이하다. 그러나 유리함수 사상에 의해 변환된 다항식의 차수가 2배로 증가함에 따라 고차 다항식의 경우 Hurwitz 행렬의 차수가 커지는 단점을 안고 있다. 견실한 근근을 고려한 고전적인 제어기 설계과정에서도 제시된 D-안정판별조건은 매우 효과적으로 적용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] V.L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear equation," *Differentsial'nye Uraveniya*, vol. 14, no.11, pp. 1483-85, 1979.

[2] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, 1994.

[3] A.C. Bartlett, C.V. Hollot, "A necessary and sufficient condition for schur invariance and generalized stability of

polytopes of polynomials," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, pp. 575-78, no.6, 1988.

- [4] Y.C. Soh, Y.K. Foo, "Generalization of strong kharitonov theorems to the left sector," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-35, pp.1378-82, no.12, 1990.
- [5] C.B. Soh, C.S. Berger, "Damping ratio of polynomial with perturbed coefficients," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, pp.1180-82, no.12, 1988
- [6] A.C. Bartlett, C.V. Hollot, and L. Huang, "Roots locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges," *Mathematics of Control, Signal, and Systems*, vol.1, pp. 61-71, 1988.
- [7] S. Gutman, *Root Clustering in Parameter Space*, Spinger-Verlag, New York, 1990.
- [8] V.L. Kharitonov, "On a generalization of a stability criterion," *Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR Seriya Fizika Matematika*, no.1, pp.33-57, 1978.
- [9] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1949.
- [10] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vols. I and II, Chelsea, New York, 1959.
- [11] H. Chapellat, S.P. Bhattacharyya, "A generalization of Kharitonov's theorem : Robust stability of interval plant," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-34, pp.306-311, 1989.
- [12] 조 태신, 김 영철, "Interval System의 Root Clustering 해석," 한국자동제어학술회의 논문집, pp.517-521, 1994

저 자 소 개



趙泰信(準會員)

1971年 2月 13日生. 1993年 2月 충북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1995年 2月 충북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 주관심분야는 강인제어이론, 이득계획제어, 다중모델적응

제어 등임



金永喆(正會員)

1954年 12月 29日生. 1981年 고려대학교 공대 전기공학과 졸업(공학사). 1983年 서울대 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 1987年 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1992年 1月 ~ 1993年 1月

미국 Texas A & M 대학 postdoc. 방문연구. 1987年 ~ 현재 충북대 공대 전자공학과 부교수. 주관심분야는 강인제어이론, QFT, 이득계획제어, 다중모델적응 제어 등임