

論文95-32B-10-1

비선형 시스템의 샘플링을 전제한 입출력 디커플링 (Sampled Input-output Decoupling of The Nonlinear Systems)

金容敏*, 李鴻奇**, 全洪兌*

(Yong-Min Kim, Hong-Gi Lee, and Hong-Tae Jeon)

요약

비선형 시스템의 입출력 디커플링 제어는 효과적인 출력 제어 방식으로 알려져 왔다. 본 논문에서는 샘플링을 전제할 때 (실제 응용면에서) 이 기법의 문제점을 지적하고, 비선형 시스템의 내재된 구조(inherent structure)를 이용하여 새로운 디지털 입출력 디커플링 피드백을 구한다. 또 우리의 새로운 기법의 효율성(정밀성)을 간단한 컴퓨터 모의 실험을 통하여 확인한다. 마지막으로 디지털 보상 회로도 설계한다. 우리가 연구한 문제는 시스템의 대수학적인 면과 기하학적인 면을 고려한 이론 연구일 뿐만 아니라 로봇, 항공기, 자동차 등의 제어에 응용이 가능한 실용적인 연구이기도 하다.

Abstract

Input-output decoupling is well-known to be effective in the control of the nonlinear systems. This paper points out some problems of this technique in applications, and obtains a new digital input-output decoupling feedback law by using the inherent structure of the system. The effectiveness (accuracy) of our new control technique are confirmed by simple computer simulations. Finally, a digital compensator is also designed. The problems we study are of importance in the field of nonlinear control of robots, aerospace navigation, and vehicular control. The methodology to be employed involves both algebraic and geometric aspects of the systems.

I. 서론

로봇과 항공기 같은 복잡한 시스템의 이용이 증가함에 따라 최신 제어 기법의 응용에 대한 많은 연구

가 진행되고 있다. 또 이런 복잡한 시스템의 작동에는 엄격한 제한 요소(정밀성, 안정성 등)가 요구되므로 고도의 제어 기법이 요구된다. 이런 이유로 최근 20년간 비선형 제어 시스템 이론이 급속도로 발달하였다. 이에 따라, 최근에는 비선형의 비선형 항들을 무시함으로써 근사적으로 선형 시스템으로 고려하여 선형 피드백을 사용하는 기존의 제어 방식보다는 비선형 피드백을 사용하는 비선형 제어 방식들이 많이 연구되고 있다. 마이크로 프로세서 등의 발달로 비선형 함수를 피드백 시키기가 쉬워졌기 때문이다. 본 논문에서 다루는 문제는 비선형 입출력 디커플링 (decoupling) 제어 기법에 관한 것이다.

* 正會員, 中央大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chung-Ang Univ.)

** 正會員, 中央大學校 制御計測工學科
(Dept. of Control & Instrumentation Eng.,
Chung-Ang Univ.)

※ 본 논문은 92년 한국과학재단의 연구비에 의하여 연구되었음.

接受日字: 1995年9月1日, 수정완료일: 1995年10月2日

입출력 디커플링 제어는 피드백을 사용하여 복잡한 고차의 시스템 입출력 관계를 저차의 독립된 시스템으로 분해함으로써 (parallel decomposition) 출력을 효과적으로 제어하는 것이다. 선형 시스템의 디커플링 제어 문제를^[1] 비선형 피드백을 사용하여 Isidori et al.^[2], Ha and Gilbert^[3], Niemeijer^[4] 등이 연속 및 이산 비선형 제어 시스템의 경우에까지 일반화하였다. 그러나, 비선형 시스템의 경우에는 디커플링에 필요한 피드백이 복잡한 비선형 함수이므로 실제 응용의 온 라인 (on-line) 적용을 위해서는 디지털 컴퓨터의 사용이 불가피하다. 만일 피드백을 가하기 위해 디지털 컴퓨터를 사용하면 샘플링 (sampling) 구간 사이에서는 피드백되는 입력이 상수 (constant) 가 되어야 하므로, 2절에서 보인바와 같이 연속 제어 시스템에 대한 피드백에 의해서는 샘플링을 전제한 경우에 입출력 디커플링이 보장될 수 없다. 샘플링이 피드백 선형화에 미치는 영향에 대해서는 초보적인 연구 결과들이^[5, 6, 7, 8] 발표되었으나, 입출력 디커플링 등 합성 문제들에 미치는 영향에 대해서는 아직 보고된 바가 없다. 샘플링의 영향을 제외한 비선형 시스템의 입출력 디커플링 등의 문제들은 참고 문헌 [9, 10] 등에서 발견할 수 있고, 입출력 디커플링 문제와 유사한 입출력 선형화 문제는 참고 문헌 [11, 12] 등에서 찾을 수 있다.

본 논문에서는 샘플링이 비선형 시스템의 입출력 디커플링 제어에 미치는 영향을 줄이거나 제거하는 새로운 디지털 입출력 디커플링 제어 시스템을 개발한다. 본 논문과 비슷한 연구 결과는 참고 문헌 [13] 에서 찾을 수 있는데, 참고 문헌 [13] 은 샘플링이 비선형 시스템의 피드백 선형화에 미치는 영향을 줄이는 디지털 피드백과 좌표 변환에 관한 연구이다. 3절에서 보듯이 디커플링 문제에서는 주어진 출력 함수만 고려하기 때문에 참고 문헌 [13] 의 상태 변수 선형화 (feedback linearization) 의 경우와 달리 추가의 조건 없이 오차를 임의로 줄이는 디지털 피드백을 구할 수 있다.

2절에서는 비선형 시스템의 입출력 디커플링 제어의 정의 및 필요 충분조건 등을 요약하고, 또 샘플링이 디커플링에 미치는 영향을 보인다. 3절에서는 샘플링의 영향을 없애거나 줄이는 새로운 디지털 디커플링 피드백을 발견하고, 이의 유용성을 간단한 모의 실험을 통하여 5절에서 보인다. 4절에서는 우리의 제어 기법에

적합한 디지털 보상 회로를 설계한다.

II. 비선형 시스템의 입출력 디커플링과 샘플링의 영향

이 절에서는 비선형 시스템의 입출력 디커플링 제어의 정의 및 필요 충분 조건 등을 요약하고, 또 샘플링이 디커플링에 미치는 영향을 예제를 통해서 보인다.

다음과 같은 형태의 비선형 시스템 (affine nonlinear system) 을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^m$ 이고, f 와 g 는 해석적 벡터장 (analytic vector field) 이고 h 는 해석적 함수 (analytic function) 라고 가정한다. 비선형 시스템의 입출력 디커플링 문제는 피드백

$$u(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t) \quad (2)$$

을 가하여 페루프 시스템의 출력 y 와 새로운 입력 v 와의 관계가, y_i 는 v_i 와 초기 상태 $x(0)$ 만의 함수가 되게 하는 것이다. 여기서 새로운 입력은 $v \in R^m$ 이고, $\beta(x(t))$ 는 nonsingular $m \times m$ matrix 이다. 디커플링 문제의 필요 충분조건과 디커플링을 시키는데 필요한 피드백은 다음과 같다. [11, 12] 우선 y_1 부터 y_m 에 대하여 $y_i^{(\rho_i)} (\equiv \frac{d^{\rho_i}}{dt^{\rho_i}} y_i)$ 가 입력 u 의 함수가 되는 가장 작은 정수 ρ_i 라고 정의하고 (즉, ρ_i 는 characteristic number 이다),

$$\gamma(x) \equiv \begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A(x) \equiv L_{g_i} \gamma(x) &\equiv \begin{pmatrix} L_{g_i} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_{g_i} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} L_{g_i} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_i} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_i} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_i} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

라고 정의한다. 여기에서 L 은 Lie Derivative 이다. ([11, 12] 참조). 시스템 (1)이 입출력 디커플링이 가능하기 위한 필요충분조건이

$$\rho_i < \infty, \quad \text{for } i = 1, \dots, m \quad (5a)$$

$$\text{rank } (A(x)) = m \quad (5b)$$

입은 잘 알려져 있다. 만일 시스템이 조건 (5)를 만족하면,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)} \end{pmatrix} = L_{(f+gu)}\gamma(x) = L_f\gamma(x) + L_g\gamma(x)u \quad (6)$$

$$= L_f\gamma(x) + A(x)u$$

가 되어

$$L_f\gamma(x) + A(x)u = v \quad (7a)$$

즉,

$$u(t) = * -A(x(t))^{-1}L_f\gamma(x(t)) + A(x(t))^{-1}v(t) \quad (7b)$$

$$* \equiv \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t)$$

라고 두면, 페루프 시스템은

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\alpha(x(t)) + g(x(t))\beta(x(t))v(t)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (8)$$

가 되고 시스템 (8)은 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)}(t) \\ y_2^{(\rho_2)}(t) \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

즉 시스템이 디커플 되어 n 차의 복잡한 시스템이 m 개의 저차의 (간단한) 선형 입출력 시스템들로 parallel 하게 분해된다. 이 경우 y_1, y_2, \dots, y_m 들을 v_1, v_2, \dots, v_m 으로서 각각 독립적으로 제어할 수 있다.

그러나, 실제로 피드백 (7b)를 가하는데는 (7b)식이 비선형이므로 마이크로프로세서등을 이용하여 (10)식과 같은 피드백을 가할 수밖에 없다.

$$u(t) = -A(x^k)^{-1}L_f\gamma(x^k) + A(x^k)^{-1}v^k, \quad kh \leq t < (k+1)h \quad (10)$$

여기서 $x^k \equiv x(kh)$ 이고, v^k 는 $t = kh$ 일 때의 새로운 디지털 입력이고, h 는 샘플링 간격이다. (출력함수 $h(x)$ 와 혼동할 경우가 없으므로 중복 사용한다). 따라서 (10) 식의 피드백을 사용한 시스템은

$$\begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)}(t) \\ y_2^{(\rho_2)}(t) \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)}(t) \end{pmatrix} = \frac{d\gamma(x)}{dt} = L_f\gamma(x(t)) - A(x(t))A(x^k)^{-1}L_f\gamma(x^k) \quad (11)$$

$$+ A(x(t))A(x^k)^{-1}v^k, \quad kh \leq t < (k+1)h$$

가 되어, 식 (9)의 디커플된 관계를 만족하지 못한다. 이를 다음의 간단한 예제로서 확인할 수 있다.

예제 2. 1 : 다음의 시스템을 고려하자.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = h(x)$$

그러면 $y_1 = \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_2$ 이므로 $\rho_1 = 1$ 이고, $y_2 = \dot{x}_3 = u_2$ 이므로 $\rho_2 = 1$ 이다. 따라서,

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ 이고,}$$

$$\dot{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= L_f\gamma(x) + L_g\gamma(x)u$$

$$= L_f\gamma(x) + A(x)u$$

이다. 여기서 $A(x)$ 의 rank 가 2이므로 주어진 시스템은 입출력 디커플링이 가능하고 디커플링 시키는 피드백은 식 (7)에 의해

$$u = -A(x)^{-1}L_f\gamma(x) + A(x)^{-1}v = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

이다. 이 경우

$$\dot{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

이므로, y_1 은 v_1 과 초기 조건만의 함수이고, y_2 는 v_2 와 초기 조건만의 함수이다.

그러나, 샘플링을 전제로한 제어인 경우 (디지털 제어의 경우), 우리가 가하는 피드백은 $kh \leq t < (k+1)h$ 에서

$$u = -A(x(kh))^{-1}L_f\gamma(x(kh)) + A(x(kh))^{-1}v(kh), \quad kh \leq t < (k+1)h$$

이므로,

$$\begin{pmatrix} y_1((k+1)h) \\ y_2((k+1)h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3(t) - x_3(kh) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(kh) \\ v_2(kh) \end{pmatrix}$$

이다. 따라서, Taylor 정리에 의하여

$$y((k+1)h) = y(kh) + h\dot{y}(kh) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}(kh) + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} x_2(kh) \\ x_3(kh) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1(kh) \\ v_2(kh) \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2!} \begin{pmatrix} \dot{v}_2(kh) \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 되어, $y_1((k+1)h)$ 는 $v_1(kh)$ 와 $v_2(kh)$ 모두에 종속된다. 즉, 입출력 디커플링은 이루어지지 않는다.

Ⅲ. 비선형 시스템의 샘플링을 전제한 입출력 디커플링

샘플링을 전제로한 제어의 경우 2절의 피드백 (2.10)식은 더 이상 입출력을 디커플링시키는 피드백이 못된다는 것도 보였다. 물론 예제 1의 경우와 같은 선형 시스템의 경우는 입출력을 디커플링시키는 (10)식과는 다른 디지털 피드백을 정확히 구할 수가 있다. 즉,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1((k+1)h) \\ y_2((k+1)h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(kh) \\ y_2(kh) \end{pmatrix} + \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & 1 + \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(kh) \\ u_2(kh) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(kh) \\ y_2(kh) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & h + \frac{h^2}{2} \\ 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(kh) \\ u_2(kh) \end{pmatrix} \\ &= y(kh) + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(kh) + h \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(kh) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(kh) \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$\begin{pmatrix} y_1((k+1)h) \\ y_2((k+1)h) \end{pmatrix} = y(kh) + h v(kh)$$

이 되어야 하므로

$$\begin{aligned} u(kh) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 - \frac{h}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(kh) + v(kh) \right\} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(kh) + \begin{pmatrix} 1 & -1 - \frac{h}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v(kh) \end{aligned}$$

그러나, 비선형의 경우에는 잊식과 같이 미분방정식의 해를 구하는 것이 불가능하다. 따라서, 샘플링 구간 h 에 대하여 보다 높은 차수로 근사시킬 수밖에 없다.

샘플링을 전제로한 비선형 시스템의 경우, Taylor정리에 의하여 출력을 아래의 식으로 표현할 수 있다. (이제부터는, $y((k+1)h)$, $y(kh)$ 등을 각각 $y(k+1)$, $y(k)$ 등으로 간략히 나타내기로 한다).

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= y_1(k) + h y_1^{(1)}(k) + \dots + \frac{h^{\rho_1}}{\rho_1!} y_1^{(\rho_1)}(k) \\ &\quad + \frac{h^{\rho_1+1}}{(\rho_1+1)!} y_1^{(\rho_1+1)}(k) + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} y_m(k+1) &= y_m(k) + h y_m^{(1)}(k) + \dots + \frac{h^{\rho_m}}{\rho_m!} y_m^{(\rho_m)}(k) \\ &\quad + \frac{h^{\rho_m+1}}{(\rho_m+1)!} y_m^{(\rho_m+1)}(k) + \dots \end{aligned} \quad (12b)$$

또한 이 식은 Lie Derivatives 를 사용하여 (13)식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= h_1(x^k) + h L_f h_1(x^k) + \dots + \frac{h^{\rho_1}}{\rho_1!} \{ L_f^{\rho_1} h_1(x^k) \\ &\quad + [L_g L_f^{\rho_1-1} h_1(x^k)] u^k \} + \frac{h^{\rho_1+1}}{(\rho_1+1)!} \{ L_f^{\rho_1+1} h_1(x^k) \\ &\quad + [L_g L_f^{\rho_1} h_1(x^k)] u^k + \sum_{j=1}^m L_g L_g L_f^{\rho_1-1} h_1(x^k) u_j^k \} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m L_g (L_g L_f^{\rho_1-1} h_1(x^k) u_j^k) u_i^k + \dots \end{aligned} \quad (13a)$$

⋮

$$\begin{aligned} y_m(k+1) &= h_m(x^k) + h L_f h_m(x^k) + \dots + \frac{h^{\rho_m}}{\rho_m!} \{ L_f^{\rho_m} h_m(x^k) \\ &\quad + [L_g L_f^{\rho_m-1} h_m(x^k)] u^k \} + \frac{h^{\rho_m+1}}{(\rho_m+1)!} \{ L_f^{\rho_m+1} h_m(x^k) \\ &\quad + [L_g L_f^{\rho_m} h_m(x^k)] u^k + \sum_{j=1}^m L_g (L_g L_f^{\rho_m-1} h_m(x^k) u_j^k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m L_g (L_g L_f^{\rho_m-1} h_m(x^k) u_j^k) u_i^k \} + \dots \end{aligned} \quad (13b)$$

(13)식을 (16)식과 같이 간단한 벡터 식으로 표현하기 위하여 (14)식과 (15)식을 정의한다.

$$y(k+1) = [y_1(k+1) \quad y_2(k+1) \quad \dots \quad y_m(k+1)]^T \quad (14a)$$

$$\Gamma(x^k) \equiv \begin{pmatrix} h_1(x^k) + h L_f h_1(x^k) + \dots + \frac{h^{\rho_1-1}}{(\rho_1-1)!} L_f^{\rho_1-1} h_1(x^k) \\ \vdots \\ h_m(x^k) + h L_f h_m(x^k) + \dots + \frac{h^{\rho_m-1}}{(\rho_m-1)!} L_f^{\rho_m-1} h_m(x^k) \end{pmatrix} \quad (14b)$$

$$w_i \equiv \left(-\frac{h^{\rho_i-1}}{(\rho_i-1)!} \quad \frac{h^{\rho_i-2}}{(\rho_i-2)!} \quad \dots \quad \frac{h^{\rho_i+1}}{(\rho_i+1)!} \right)^T \quad i=0,1,2,\dots \quad (14c)$$

$$\bar{w}_i \equiv \left(\frac{(\rho_i+1)!}{h^{\rho_i+1}} \quad \frac{(\rho_i+2)!}{h^{\rho_i+2}} \quad \dots \quad \frac{(\rho_i+d)!}{h^{\rho_i+d}} \right)^T \quad i=0,1,2,\dots \quad (14d)$$

$$a_0(x^k) \equiv \begin{pmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x^k) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x^k) \end{pmatrix} \quad (14e)$$

$$b_0(x^k) \equiv \begin{pmatrix} [L_g L_f^{\rho_1-1} h_1(x^k)] \\ \vdots \\ [L_g L_f^{\rho_m-1} h_m(x^k)] \end{pmatrix} \quad (14f)$$

$$c_i(x^k, u^k) \equiv \begin{pmatrix} h_1^{(\rho_i+d)} \\ \vdots \\ h_m^{(\rho_m+1)} \end{pmatrix} \quad i=1,2,3,\dots \quad (14g)$$

또, 두 벡터의 연산 "*"을 다음의 식 (15)로 정의한다.

$$D * E = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 e_1 \\ d_2 e_2 \\ \vdots \\ d_m e_m \end{pmatrix} \quad (15)$$

위 정의 (14)과 (15)를 사용하면, 출력 식 (3.2)는 (16)식으로 나타낼 수 있다.

$$y(k+1) = \Gamma(x^k) + w_0 * \{ a_0(x^k) + b_0(x^k) u^k \} + \sum_{i=1}^m w_i * c_i(x^k, u^k) \quad (16)$$

우리가 구하는 디지털 피드백을 (17)식으로 가정하여

$$u^k \equiv \alpha_0(x^k) + \beta_0(x^k)v^k + \sum_{i=1}^{\infty} h^i \beta_i(x^k, v^k) \quad (17)$$

(18)과 같은 디커플링된 입출력 관계를 얻는 게 본 논문의 목적이다.

$$y(k+1) = \Gamma(x^k) + w_0 * v^k \quad (18)$$

이를 위하여 다음과 같은 정의를 도입한다:

$$\begin{aligned} c_i(x^k, u^k) &= c_i(x^k, \alpha_0 + \beta_0 v^k + h\beta_1 + h^2\beta_2 + \dots) \\ &\equiv c_i^0(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0) + hc_i^1(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0, \beta_1) \\ &\quad + h^2 c_i^2(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \beta_2) + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h^j c_i^j(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0, \dots, \beta_j) \end{aligned} \quad (19)$$

(19)식의 정의를 이용하여, (16)식에 (17)식의 피드백을 가하고, 같은 h 의 멱항(power term)의 계수를 고려하면, 우리가 구하는 디지털 피드백(17)의 각 항들은 (20)식과 같이 됨을 쉽게 알 수 있다:

$$\alpha_0(x^k) = -b_0(x^k)^{-1} a_0(x^k) \quad (20a)$$

$$\beta_0(x^k) = b_0(x^k)^{-1} \quad (20b)$$

$$\beta_1(x^k, v^k) = -h^{-1} b_0(x^k)^{-1} \bar{w}_0 * w_1 * c_1^0(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0) \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(x^k, v^k) &= -h^{-2} b_0(x^k)^{-1} \bar{w}_0 * \{w_1 * hc_1^1(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0, \beta_1) \\ &\quad + w_2 * c_2^0(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0)\} \end{aligned} \quad (20d)$$

...

$$\begin{aligned} \beta_i(x^k, v^k) &= -h^{-i} b_0(x^k)^{-1} \bar{w}_0 * \\ &\quad \left\{ \sum_{j=1}^i h^{(i-j)} w_j * c_j^{(i-j)}(x^k, v^k, \alpha_0, \beta_0, \dots, \beta_{(i-j)}) \right\}, \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (20e)$$

(20)식에서 $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ 를 순서대로 계속 구할 수 있고, 현실적으로 우리가 원하는 차수(정밀도)만큼만 계산하고 나머지는 오차항으로 둘 수 있다. 시스템 출력식을 안정화 하기 위해 추가로 극점 배치(pole assignment)를 할 경우는 간단히 (20a)식의 α_0 만 변화시키면 된다. 간단한 예제 3.1과 3.2에 이상의 결과를 적용하여 새로운 디지털 디커플링 피드백 제어 시스템을 설계한다.

예제 3.1 : 다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = h(x)$$

$\dot{y}_1 = -x_2^2 + u_1, \dot{y}_2 = u_1 + u_2$ 이므로, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ 이다. 또한,

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + h \left\{ \begin{pmatrix} -x_2^k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix} \right\} + \frac{h^2}{2!} \begin{pmatrix} -2x_2^k u_1^k + u_2^k \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{3!} \begin{pmatrix} -2(u_1^k + u_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이므로

$$a_0 = \begin{pmatrix} -x_2^k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} -2x_2^k(u_1^k + u_2^k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} -2(u_1^k + u_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = c_4 = \dots = 0$$

이다. (19)식의 정의에 의해

$$\begin{aligned} c_1(x, \alpha_0 + \beta_0 v + h\beta_1 + \dots) &= \begin{pmatrix} -2x_2 \{ (\alpha_0)_1 + (\alpha_0)_2 + (\beta_0)_1 v + (\beta_0)_2 v \} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + h \begin{pmatrix} -2x_2 \{ (\beta_1)_1 + (\beta_1)_2 \} \\ 0 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} -2x_2 \{ (\beta_2)_1 + (\beta_2)_2 \} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &\equiv c_1^0(\alpha_0, \beta_0) + hc_1^1(\alpha_0, \beta_0, \beta_1) + h^2 c_1^2(\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \beta_2) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x, \alpha_0 + \beta_0 v + h\beta_1 + \dots) &= \begin{pmatrix} -2x_2 \{ (\alpha_0)_1 + (\alpha_0)_2 + (\beta_0)_1 v + (\beta_0)_2 v \}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + h \begin{pmatrix} -4x_2 \{ (\alpha_0)_1 + (\alpha_0)_2 + (\beta_0)_1 v + (\beta_0)_2 v \} \{ (\beta_1)_1 + (\beta_1)_2 \} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &\equiv c_2^0(\alpha_0, \beta_0) + hc_2^1(\alpha_0, \beta_0, \beta_1) + h^2 c_2^2(\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \beta_2) + \dots \end{aligned}$$

여기서, $(\beta_0)_i$ 는 β_0 행렬의 i 번째 행(row)이고 $(\alpha_0)_i, (\beta_1)_i$ 등은 각각 α_0, β_1 벡터의 i 번째 항(element)이다.

따라서, (20)식에 의하여

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} -x_2^k \\ -x_2^k \end{pmatrix}, \quad \beta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} x_2^k v_2^k \\ -x_2^k v_2^k \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (v_2^k)^2 \\ -\frac{1}{3} (v_2^k)^2 \end{pmatrix}, \dots$$

이고, 디지털 피드백은 (17)식에 의하여

$$u^k = \begin{pmatrix} -x_2^k \\ -x_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_2^k v_2^k \\ -x_2^k v_2^k \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (v_2^k)^2 \\ -\frac{1}{3} (v_2^k)^2 \end{pmatrix} + \dots$$

이고, 출력 식은 디커플링이 되어

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix}$$

이다. 단일,

$$u^k = \begin{pmatrix} -x_2^k \\ -x_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_2^k v_2^k \\ -x_2^k v_2^k \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (v_2^k)^2 \\ -\frac{1}{3} (v_2^k)^2 \end{pmatrix}$$

로 두면 입출력 관계는

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix} + O(h^2)$$

이 되어 그만큼 샘플링 오차가 생긴다. 여기서 $O(\dots)$

는 big oh 함수이다. 이와 같이 오차를 임의로 원하는 차수만큼 줄이는 디지털 피드백을 발견할 수 있다.

예제 3. 2 : 다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = h(x)$$

$$y_1^{(1)} = x_2, \quad y_1^{(2)} = x_3^2 + u_1 + u_2, \quad y_1^{(3)} = 2x_3 u_2, \quad y_1^{(4)} = 2u_2^2,$$

$$y_2^{(1)} = u_2$$

이므로 $\rho_1 = 2, \rho_2 = 1$ 이다. 또한,

$$y_1(k+1) = x_1^k + hx_2^k + \frac{h^2}{2!} \{ (x_3^k)^2 + u_1^k + u_2^k \} + \frac{h^3}{3!} 2x_3^k u_2^k + \frac{h^4}{4!} 2 (u_2^k)^2$$

$$y_2(k+1) = x_3^k + hu_2^k$$

이므로,

$$a_0 = \begin{pmatrix} (x_1^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 2x_3^k u_2^k \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 2 (u_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = c_4 = \dots = 0$$

이다. 따라서,

$$c_1(x, a_0 + \beta_0 v + h\beta_1 + \dots) = \begin{pmatrix} 2x_3 \{ (\alpha_0)_2 + (\beta_0)_2 v \} \\ 0 \end{pmatrix} \\ + h \begin{pmatrix} 2x_3 (\beta_1)_2 \\ 0 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 2x_3 (\beta_2)_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ \equiv c_1^0(\alpha_0, \beta_0) + hc_1^1(\alpha_0, \beta_0, \beta_1) + h^2 c_1^2(\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \beta_2) + \dots$$

$$c_2(x, a_0 + \beta_0 v + h\beta_1 + \dots) = \begin{pmatrix} 2 \{ (\alpha_0)_2 + (\beta_0)_2 v \}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + h \begin{pmatrix} 4 \{ (\alpha_0)_2 + (\beta_0)_2 v \} (\beta_1)_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ \equiv c_2^0(\alpha_0, \beta_0) + hc_2^1(\alpha_0, \beta_0, \beta_1) + h^2 c_2^2(\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \beta_2) + \dots$$

이고, (20)식에 의하여

$$a_0(x^k) = - \begin{pmatrix} (x_3^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_0(x^k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1(x^k, v^k) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} x_3^k v_2^k \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2(x^k, v^k) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} (v_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 디지털 피드백

$$u^k = \begin{pmatrix} - (x_3^k)^2 + v_1^k - v_2^k \\ v_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} x_3^k v_2^k \\ 0 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} (v_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots$$

을 사용하여

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k + hx_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ h \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix}$$

와 같은 디커플된 입력력 관계식을 얻을 수 있다.

IV. 디지털 보상 회로

이 절에서는 전 절에서 발견한 디지털 피드백 제어에 적합한 디지털 보상 회로를 추가로 걸어 주려고 한다. 입력력 디커플링 및 안정화(pole assignment)에 의하여 출력과 새로운 입력 사이의 관계는 다음과 같다.

$$y(k+1) = A_c y(k) + B_h v(k) \quad (21)$$

(A_c : stable matrix, B_h : nonsingular matrix)

여기서 $\{y^d(kh)\}_{k=0}^{\infty}$ 를 원하는 출력 함수라고 하고, $y(kh)$ 가 $y^d(kh)$ 를 따라가는 제어를 하려고 한다. 이 경우

$$y^d(k+1) = A_c y^d(k) + B_h v^d(k) \quad (22)$$

$$v^d(k) = B_h^{-1} \{y^d(k+1) - A_c y^d(k)\}$$

로부터 $v^d(k)$ 를 구하여 $v(k) = v^d(k)$ 로 하여 (4. 1) 식에 걸어 주면 된다. 그러나, 이 경우에 새로운 입력과 출력 사이의 관계를 고려하면 개루프(open loop) 제어이다. (그림 1 참조). 따라서, 실제 출력과 원하는 출력의 오차를 보상하는 제어를 발견하고자 한다.

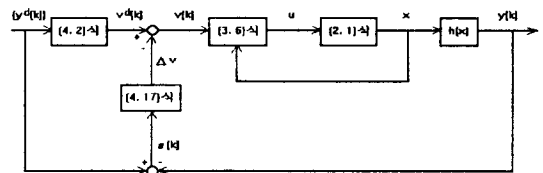


그림 1. 디지털 보상회로

Fig. 1. Digital Compensator.

먼저 $\epsilon(k) = y^d(kh) - y(kh)$ 라고 정의하면

$$\begin{aligned} \epsilon(k+1) &= A_c \epsilon(k) + B_h \{v^d(k) - v(k)\} \\ &= A_c \epsilon(k) + B_h \Delta v(k) \end{aligned} \quad (23)$$

가된다. 여기서 $\Delta v(k)$ 는 다음의 비용 함수 (cost function) 를 최소화하는 값으로 한다.

$$J = \frac{1}{2} \epsilon(k_f)^T S \epsilon(k_f) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_f-1} \{ \epsilon(k)^T Q \epsilon(k) + \Delta v(k)^T R \Delta v(k) \} \quad (24)$$

여기서, R 은 positive definite 인 대칭 행렬 (symmetric matrix) 이고 k_f 는 제어가 끝나는 시간이라고 가정한다. 이상의 최적 제어 문제는 다음과 같은 방법으로 쉽게 풀 수 있다. (참고문헌 [14] 참조). 우선 비용 함수 J 를 최소화하는 최적 제어

$\Delta v(k)$ 를 구하기 위해 Lagrange multiplier $\lambda(k), (k=1, \dots, k_f)$ 를 도입하여 다음과 같이 Hamiltonian을 정의한다.

$$H(\epsilon(k), \Delta v(k), \lambda(k+1), k) = \frac{1}{2} \epsilon(k)^T Q_c \epsilon(k) + \frac{1}{2} \Delta v(k)^T R \Delta v(k) + \lambda(k+1)^T (A_c \epsilon(k) + B_h \Delta v(k)) \quad (25)$$

이산 제어 시스템의 최적화 조건인 Euler-Lagrange 식을 이용하여 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta v(k)} = 0 = R \Delta v(k) + B_h^T \lambda(k+1) \quad (26a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon(k)} = \lambda(k)^T = \epsilon(k)^T Q + \lambda(k+1)^T A_c \quad (26b)$$

$$\lambda(k_f) = S \epsilon(k_f) \quad (26c)$$

R 은 nonsingular 이므로 (26a)식으로부터

$$\Delta v(k) = -R^{-1} B_h^T \lambda(k+1) \quad (27)$$

을 얻을 수 있고, 이 식을 시스템 식(21)에 대입하면

$$\begin{aligned} \epsilon(k+1) &= A_c \epsilon(k) - B_h R^{-1} B_h^T \lambda(k+1) \\ \epsilon(0) &= \epsilon_0 \end{aligned} \quad (28a)$$

또, (4. 6b)식의 양변을 transpose 취하면

$$\lambda(k) = Q \epsilon(k) + A_c^T \lambda(k+1) \quad (28b)$$

$\epsilon(k)$ 와 $\lambda(k)$ 의 선형 차분 방정식 (4. 8a)식과 (4. 8b)식을 풀면 되는데 이 식들은 경계 조건이 초기와 말기에 대한 부분적인 조건으로 Two Point Boundary Value Problem 이다. 이 TPBVP을 "sweep method"를 이용하여 푼다. 즉, 위 문제의 해를

$$\lambda(k) = M(k) \epsilon(k) \quad (29)$$

라고 가정하자. 여기서 $M(k)$ 는 $M(k_f) = S$ 인 $m \times m$ 행렬이다. (4. 9)식으로부터,

$$\lambda(k+1) = M(k+1) \epsilon(k+1) \quad (30)$$

을 얻을 수 있는데 이것을 (4. 8a)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\epsilon(k+1) = A_c \epsilon(k) - B_h R^{-1} B_h^T M(k+1) \epsilon(k+1) \quad (31)$$

이 식으로부터 $\epsilon(k+1)$ 와 $\epsilon(k)$ 의 관계를 다음과 같

이 얻을 수 있다.

$$\epsilon(k+1) = [I + B_h R^{-1} B_h^T M(k+1)]^{-1} A_c \epsilon(k) \quad (32)$$

(4. 8b)식과 (4. 12)식으로부터

$$\begin{aligned} M(k) \epsilon(k) &= Q \epsilon(k) + A_c^T M(k+1) [I + B_h R^{-1} B_h^T M(k+1)]^{-1} A_c \epsilon(k) \\ \{ M(k) - Q - A_c^T M(k+1) [I + B_h R^{-1} B_h^T M(k+1)]^{-1} A_c \} \epsilon(k) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

(4. 13)식은 임의의 $\epsilon(k)$ 에 대해서 만족해야 하므로

$$M(k) - Q - A_c^T M(k+1) [I + B_h R^{-1} B_h^T M(k+1)]^{-1} A_c = 0$$

이다. 즉,

$$\begin{aligned} M(k) &= Q + A_c^T M(k+1) [I + B_h R^{-1} B_h^T M(k+1)]^{-1} A_c \\ &= Q + A_c^T [M(k+1)^{-1} + B_h R^{-1} B_h^T]^{-1} A_c \end{aligned} \quad (34)$$

$M(k_f) = S$ 와 (4. 14)식으로부터 $M(k), k=0, 1, \dots, k_f$ 의 값을 모두 구할 수 있다. 또 (4. 10)식과 (4. 12)식을 (4. 7)식에 대입하여 최적 제어 식(4. 15)을 구한다.

$$\Delta v(k) = R^{-1} B_h^T [M(k+1)^{-1} + B_h R^{-1} B_h^T]^{-1} A_c \epsilon(k) \quad (35)$$

실제 문제에서는 종종 $k_f = \infty$ 인 regulator 문제로 한 $M(k)$ 를 상수 값으로 적용한다. 즉, $M(k)$ 를

$$\bar{M} = Q + A_c^T [\bar{M}^{-1} + B_h R^{-1} B_h^T]^{-1} A_c \quad (36)$$

를 만족하는 \bar{M} 라고 두고,

$$\Delta v(k) = -R^{-1} B_h^T [\bar{M}^{-1} + B_h R^{-1} B_h^T]^{-1} A_c \epsilon(k) \quad (37)$$

이상의 디지털 제어 시스템의 블록도 (Block Diagram) 은 그림 1과 같다. 이 절에서 사용한 보상 회로는 전 절의 샘플링을 전제로한 디커플링과 더불어, 샘플링으로 야기되는 오차 및 부정확한 모델링 등을 추가로 보상한다.

V. 모의 실험

이 절에서는 2절의 기존의 디지털 피드백을 사용한 경우보다 3절의 새로운 디지털 피드백을 사용한 경우가 더 정밀하다는 것을 간단한 모의 실험을 통하여 보인다. 입출력 디커플링을 정확히 비교하기 위해 4절의 디지털 보상 회로는 사용하지 않는다.

모의 실험 1 : 다음 시스템의 입출력 디커플링을 고

려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_1 + u_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 $a=1.0$ 이라고 가정한다. 입력을 샘플링 구간 사이에서 상수라고 가정할 때 시스템 (38)의 출력식은 다음과 같다:

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + h \left\{ \begin{pmatrix} -x_2^{k2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix} \right\} + \frac{h^2}{2!} \begin{pmatrix} -2x_2^k(u_1^k + u_2^k) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{3!} \begin{pmatrix} -2(u_1^k + u_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

y_1 과 y_2 가 디커플된 두 subsystem 의 pole 을 각각 -1 과 -1 로 한다고 가정하면, 종래의 디지털 피드백은 (40)식과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix} &= \alpha_0 + \beta_0 v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} x_2^k \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} x_2^k - x_1^k + v_1^k \\ -(x_2^k)^2 + x_1^k - x_2^k - v_1^k + v_2^k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

3절의 식 (20)식에 의하여 β_i 들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\beta_1 = -\frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_2^k(-x_2^k + v_2^k) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^k(-x_2^k + v_2^k) \\ x_2^k(x_2^k - v_2^k) \end{pmatrix} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2(-x_2^k + v_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_2^k - v_2^k)^2 \\ -\frac{1}{3}(x_2^k - v_2^k)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41b)$$

...

따라서, 새로운 2차와 3차의 디커플링 디지털 피드백 u_{D1} , u_{D2} 를 (17)식에 의하여 각각 다음과 같이 얻었다.

$$u_{D1}(k) = \begin{pmatrix} x_2^k - x_1^k + v_1^k \\ -(x_2^k)^2 + x_1^k - x_2^k - v_1^k + v_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_2^k(-x_2^k + v_2^k) \\ x_2^k(x_2^k - v_2^k) \end{pmatrix} \quad (42a)$$

$$u_{D2}(k) = \begin{pmatrix} x_2^k - x_1^k + v_1^k \\ -(x_2^k)^2 + x_1^k - x_2^k - v_1^k + v_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_2^k(-x_2^k + v_2^k) \\ x_2^k(x_2^k - v_2^k) \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_2^k - v_2^k)^2 \\ -\frac{1}{3}(x_2^k - v_2^k)^2 \end{pmatrix} \quad (42b)$$

그런데, 시스템의 초기치와 새로운 입력 v 를 다음과 같이 가정할때:

$$\begin{aligned} y_1(0) = x_1(0) = 5 & : & y_2(0) = x_2(0) = 10 \\ u_1(t) = 1 & : & v_2(t) = 1 \end{aligned} \quad (43)$$

샘플링을 무시한 출력식

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) + y_1(t) &= v_1(t) \\ \dot{y}_2(t) + y_2(t) &= v_2(t) \end{aligned} \quad (44)$$

로부터

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 5e^{-t} + 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \\ y_2(t) &= 10e^{-t} + 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다. (45)식의 출력 값과 가까운 수를 샘플링의 영향이 적은 것이다.

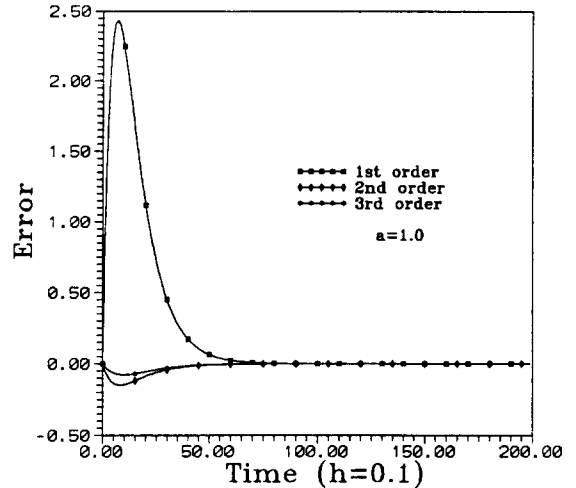


그림 2. 출력 y_1 의 오차

Fig. 2. Output y_1 error.

그림 2에, 종래의 디지털 피드백 (40)식과 우리의 새로운 2차와 3차의 디지털 피드백 u_{D1} , u_{D2} ((42)식) 를 사용하여 얻은 출력 y_1 의 (45)식의 값과의 오차를 보였다. 이 그림에서 보듯이 근사 차수를 높일수록 더 정밀한 제어가 가능하다는 것을 알 수 있다. 그림 3와 그림 4 에서는 견실성 (robust) 문제를 고려하여, 각각 $a=0.99$ 와 $a=1.01$ 로 하여 같은 모의 실험을 한 결과이다. 본 모의 실험에서는 3차 디지털 피드백까지만 고려했지만, 더 정밀한 제어를 요할 시는, 시스템에 따라서 원하는 만큼의 더 고차의 디지털 피드백을 사용하면 된다.

모의 실험 2 : 다음 시스템의 입출력 디커플링을 고려하자.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ ax_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = f(x) + g(x)u \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = h(x)$$

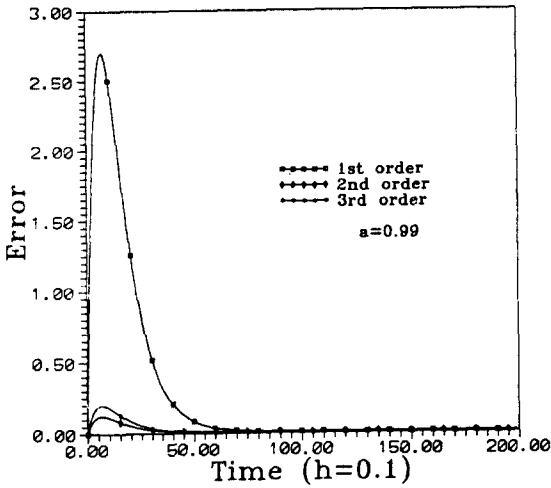


그림 3. 출력 y_1 의 오차
Fig. 3. Output y_1 error.

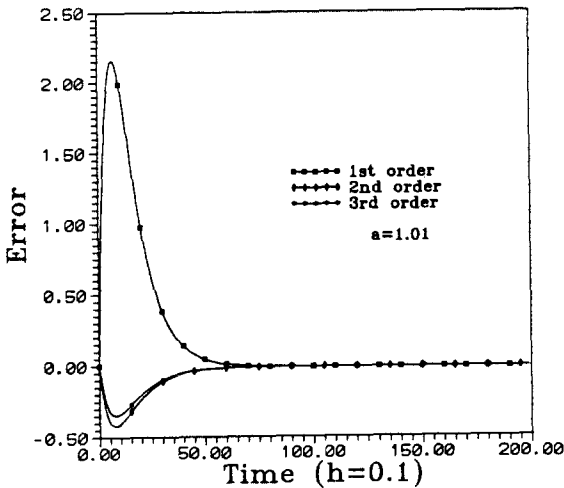


그림 4. 출력 y_1 의 오차
Fig. 4. Output y_1 error.

여기서도 $a=1.0$ 이라고 가정한다. 입력을 샘플링 구간 사이에서 상수라고 가정할 때 시스템 (46)의 출력 식은 다음과 같다:

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_2^k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^2 \\ 2! \end{pmatrix} * \left\{ \begin{pmatrix} (x_3^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix} \right\} \\ + \begin{pmatrix} h^3 \\ 3! \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2x_3^k u_2^k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^4 \\ 4! \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2(u_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

모의 실험 1과 다른 점은 여기서는 $\rho_1 \neq \rho_2$ 인 점이다. y_1 과 y_2 가 디커플된 두 subsystem 의 pole 을 각각 $-1 \pm i$ 과 -1 로 한다고 가정하면, 종래의 디지털 피드백은 (48)식과 같다.

$$\begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix} = a_0 + \beta_0 v \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ - \begin{pmatrix} (x_3^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_2^k + 2x_1^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix} \right\} \quad (48) \\ = \begin{pmatrix} -(x_3^k)^2 - 2x_2^k - 2x_1^k + x_3^k + v_1^k - v_2^k \\ -x_3^k + v_2^k \end{pmatrix}$$

3절의 식 (20)식에 의하여 β_i 들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2x_3^k(-x_3^k + v_2^k) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -2/3 x_3^k(-x_3^k + v_2^k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49a)$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2x_3^k \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \cdot 4 \\ 1/2 \cdot 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2(-x_3^k + v_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ = \begin{pmatrix} -1/6 x_3^k(-x_3^k + v_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49b)$$

따라서, 새로운 2차와 3차의 디커플링 디지털 피드백 u_{D1} , u_{D2} 를 (17)식에 의하여 각각 다음과 같이 얻었다.

$$\begin{aligned} u_{D1}(k) &= \begin{pmatrix} -(x_3^k)^2 - 2x_2^k + x_3^k + v_1^k - v_2^k \\ -x_3^k + v_2^k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -2/3 x_3^k(-x_3^k + v_2^k) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(x_3^k)^2 - 2x_2^k - 2x_1^k + x_3^k + v_1^k - v_2^k - 2/3 hx_3^k(-x_3^k + v_2^k) \\ -x_3^k + v_2^k \end{pmatrix} \quad (50a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{D2}(k) &= u_{D1} + h^2 \begin{pmatrix} -1/6 x_3^k(-x_3^k + v_2^k)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(x_3^k)^2 - 2x_2^k - 2x_1^k + x_3^k + v_1^k - v_2^k - 2/3 hx_3^k(-x_3^k + v_2^k) - h^2/6 x_3^k(-x_3^k + v_2^k)^2 \\ -x_3^k + v_2^k \end{pmatrix} \quad (50b) \end{aligned}$$

그런데, 시스템의 초기치와 새로운 입력 v 를 다음과 같이 가정할때:

$$\begin{aligned} y_1(0) = x_1(0) = 4 &; \quad y_1(0) = x_2(0) = 1 &; \quad y_2(0) = x_3(0) = 10 \\ v_1(t) = 2 &; \quad v_2(t) = 2 \end{aligned} \quad (51)$$

샘플링을 무시한 출력식

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) + 2 y_1(t) + 2 y_1(t) &= v_1(t) \\ \dot{y}_2(t) + y_2(t) &= v_2(t) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + e^{-t}(3 \cos t + 5 \sin t) \quad , \quad t \geq 0 \\ y_2(t) &= 2 + 8e^{-t} \quad , \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (53)$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다. (53)식의 출력 값과 가까운 수를 샘플링의 영향이 적은 것이다.

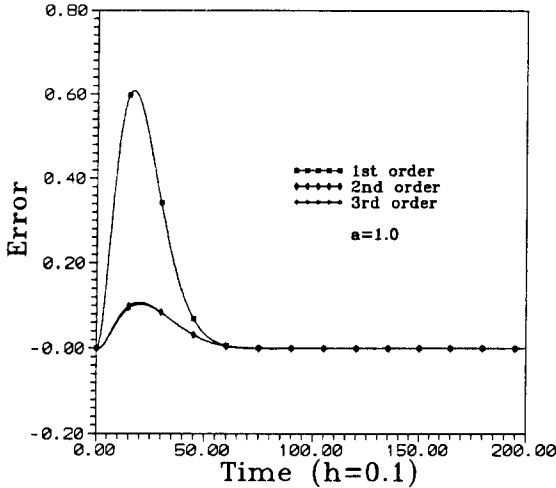


그림 5. 출력 y_1 의 오차

Fig. 5. Output y_1 error.

정밀한 제어가 가능하다는 것을 알 수 있다.

그림 6와 그림 7에서는 견실성 (robust) 문제를 고려하여, 각각 $a=0.99$ 와 $a=1.01$ 로 하여 같은 모의 실험을 한 결과이다. 본 모의 실험에서 보듯이 1차 근사 (종래의 방법) 와 2차 근사와는 상당한 차이를 보인다.

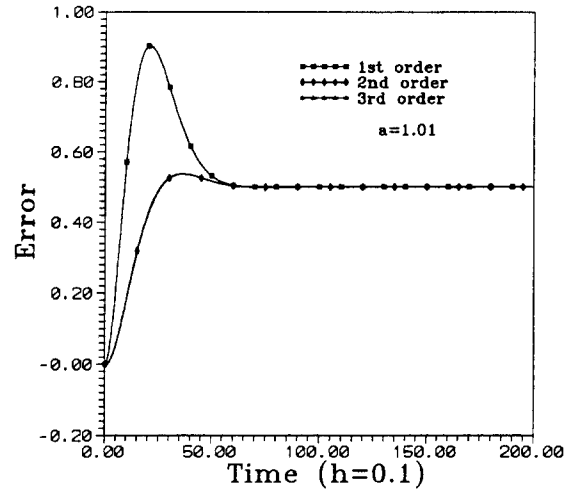


그림 7. 출력 y_1 의 오차

Fig. 7. Output y_1 error.

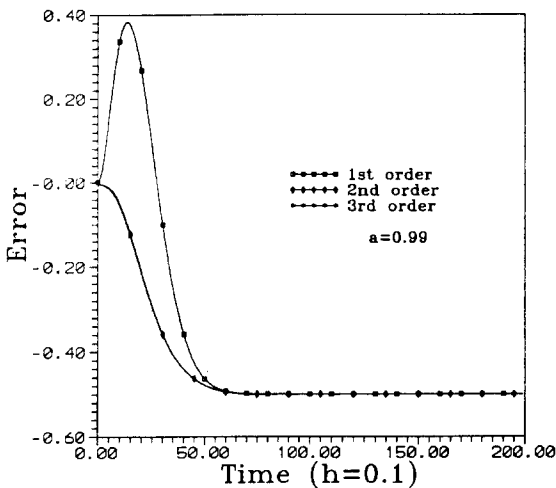


그림 6. 출력 y_1 의 오차

Fig. 6. Output y_1 error.

그림 5에, 종래의 디지털 피드백 (48)식과 우리의 새로운 2차와 3차의 디지털 피드백 u_{D1} , u_{D2} ((50)식)를 사용하여 얻은 출력 y_1 의 (53)식의 값과의 오차를 보였다. 이 그림에서 보듯이 근사 차수를 높일수록 더

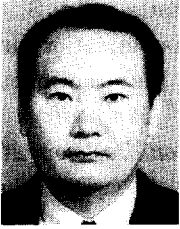
VI. 결 론

비선형 시스템의 입출력 디커플링 제어는 효과적으로 출력을 제어할 수 있으므로 아주 중요한 제어 기법들 중의 하나이다. 그러나 2절에서 보인바와 같이 실제 응용적인 측면에서 샘플링의 문제가 발생한다. 따라서, 다른 많은 비선형 제어 기법의 경우와 마찬가지로 이 경우도 이 샘플링의 영향을 상쇄하는 디지털 제어 기법이 필요하다. 3절에서 새로운 디지털 피드백으로 샘플링을 전제한 입출력 디커플링의 경우 이 샘플링의 영향을 원하는 만큼 정밀하게 없앨 수 있다는 것을 보였다. 5절의 모의 실험 결과에서 보듯이 우리의 새로운 디지털 피드백은 정밀성 (accuracy) 뿐만 아니라 견실성 (robustness) 까지 개선시킨다. 특히, 1차 근사와 2차 근사의 차이는 크다. 4절의 추가 디지털 보상 회로를 사용함으로써 더 정밀하고 견실한 제어를 할 수 있다. 본 연구는 이론적일 뿐만 아니라 실용적인 것으로서 전기 자동차, 로봇트, 항공기 등의 제어에 응용할 수 있다. 본 논문의 개념을 Dynamic 피드백의 경우에 까지 확장하는 것은 앞으로의 연구 과제이다.

참 고 문 헌

- [1] W. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 3rd. , Springer-Verlag New York Inc. , 1985.
- [2] A. Isidori, A. J. Krener, C. Gori-Giogi, and S. Manaco, "Nonlinear decoupling via feedback. A differential geometric approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 26, 1981, pp. 331-345.
- [3] I. J. Ha and E. G. Gilbert, "A complete characterization of decoupling laws for a general class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 31, 1986, pp.823-830.
- [4] H. Nijmeijer, "Local (dynamic) input-output decoupling of discrete time nonlinear systems," *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, Vol. 4, 1987, pp.237-250.
- [5] A. Arapostathis, B. Jakubczyk, H. G. Lee, S. I. Marcus, and E. D. Sontag, "The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization," *System & Control Letters*, Vol. 13, 1989, pp. 373-381.
- [6] J. W. Grizzle, "Feedback linearization of discrete-time systems," in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 83, Springer-Verlag, 1986, pp.273-281.
- [7] B. Jacobzyk and E. D. Sontag, "The effect of the sampling on the feedback linearization," *Proceedings of 26th IEEE Conference on Decision and Control*, Los Angeles, CA, December 1987, pp. 1374-1379.
- [8] H. G. Lee, A. Arapostathis, and S. I. Marcus, "Remarks on discretization and linear equivalence of the continuous time nonlinear systems," *Proceedings of 26th IEEE Conference on Decision and Control*, Los Angeles, CA, December 1987, pp. 1783-1785.
- [9] A. Isidori and A. Ruberti, "On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, Vol. 4, 1984, pp. 17-22.
- [10] H. G. Lee, and S. I. Marcus, "On input-output linearization of discrete time nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, Vol. 8, 1987, pp 249-259.
- [11] A. Isidori, *Nonlinear control systems*, 2nd ed. , Springer-Verlag, 1989.
- [12] H. Nijmeijer, and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York Inc.
- [13] 이 흥기, 전 흥태, 김 찬호, "비선형 시스템의 디지털 Feedback 선형화 기법," 대한 전자공학회 논문지, 31-B권, 6호, 1994, pp. 33-42
- [14] A. P. Sage and C. C. White, *Optimal System Control*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1977.

저 자 소 개



金 容 敏(正會員)

1961年 9月 10日生. 1982年 2月
중앙대학교 전자공학과 졸업.
1984年 2月 중앙대학교 대학원
전자공학과 졸업(공학석사). 1993
年 3月 ~ 현재 중앙대학교 대학원
전자공학과 박사과정 재학중.

1984年 1月 ~ 1991年 2月 금성 중앙연구소 선임연구
원. 1991年 3月 ~ 현재 충청전문대학교 전자통신과
조교수. 주관심 분야는 비선형 시스템 이론, 로보틱스
등임.

李 鴻 奇(正會員) 第 31卷 第 6號 參照

현재 중앙대학교 제어계측공학과 부
교수

全 洪 兌(正會員) 第 31卷 第 6號 參照

현재 중앙대학교 전자공학과 교수