

論文95-32B-9-6

웨이브렛 변환평면에서의 병렬 신호 추정 알고리즘의 제안

(Suggestion of the Parallel Algorithm for the Signal Estimation in the Wavelet Transform Domain)

金鍾元*, 金成煥**

(Jong Weon Kim and Sung Hwan Kim)

요 약

본 논문에서는 칼만 필터의 연산량 부담을 줄이면서 효과적으로 신호를 추정하기 위해 병렬로 칼만 필터를 적용하는 알고리즘을 제안하였다. 기준신호는 직교 웨이브렛 변환평면으로 대응되고, 따라서 자기상관행렬의 고유치는 시간평면보다 적게 퍼져있으며, 웨이브렛 변환평면에서 자기상관함수는 근사적으로 대각행렬이된다. 그러므로 변환된 신호는 각각의 직교성분들을 부분적으로 분리하여 처리할 수 있다. 칼만 필터는 이들 직교성분들에 병렬로 적용될 수 있으며, 연산량이 줄어든다. 웨이브렛 변환평면에서 병렬 칼만 필터를 적용할 수 있는 가능성을 이론적인 증명과 시뮬레이션을 통해서 검증하였다. 웨이브렛 변환평면에서의 고유치의 퍼짐은 시간평면에서 보다 16개의 데이터에 대해서 8.35배 적어졌으며, 연산량은 4차 칼만 필터에 대해서 1.4배, 128차 칼만 필터에 대해서 2.93배 감소하였다.

Abstract

This paper describes an algorithm that reduces computational requirement of the Kalman filter and estimates the signal efficiently. The reference signals are mapped onto the orthogonal wavelet transform domain so that the eigenvalue spread of its autocorrelation matrix could be smaller than that in the time domain. In the wavelet transform domain the autocorrelation matrix is nearly diagonal. Therefore, the transformed signal can be decomposed each orthogonal elements. The Kalman filter can be applied to each orthogonal elements and computational requirement is reduced. The possibility of applying the parallel Kalman filter was verified through the theory and simulation. The eigenvalue spread in the wavelet transform domain is smaller 8.35 times than that in the time domain and the computational requirement is reduced from 1.4 times to 2.93 times than that of the conventional Kalman filter.

* 正會員, 韓國科學技術研究院 研究開發情報센터 技術情報室

(Technical Information Dept., Korea R&D Information Center/KIST)

** 正會員, 서울시立大學校 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng. College of Eng., Seoul City Univ.)

※ 본 연구는 연암문화재단의 지원에 의해서 이루어졌음.

接受日字: 1994年7月6日, 수정완료日: 1995年9月1日

I. 서 론

주어진 신호로부터 미지의 신호를 추정하는 문제는 신호처리에 있어서 가장 중요한 문제이다. 많은 응용분야에서 원하는 신호는 유용하지 않거나 직접적으로 관측할 수 없으며, 관측이 가능한 신호는 원신호의 왜곡된 형태이다. 신호의 추정문제는 이같이 왜곡된 신호로부터 원신호를 복원해내는 것이다.^[1]

원신호를 복원하는 하나의 필터링 기법은 1940년대에 N. Wiener가 제안하였다.^[2] 이것은 원신호와 추정된 신호사이의 오차를 최소화한다는 관점에서 출발한 것으로, 현대의 필터링 기법에서 널리 사용되고 있으며, 1960년대에 R. E. Kalman은 Wiener 필터를 개선한 형태의 필터를 제안하였다.^[3]

칼만 필터는 부분최적의 가정 하에서(초기 입력 잡음 분산의 적절한 가정) 최적의 해를 빨리 구할 수 있다는 장점 때문에 계산량에 대한 부담에도 불구하고 많이 사용되고 있다. 특히 1970년대 마이크로프로세서가 개발된 이후로 지속적인 VLSI 기술의 발전으로 고속의 디지털 신호처리 칩이 등장하면서 더욱 각광을 받게 되었다. 특히 시변형태의 랜덤신호에 적용할 수 있다는 장점은 시스템의 실시간 구현을 위해서 적절한 알고리즘이 될 수 있다. 칼만 필터에 대한 광범위한 사용으로 계산량을 줄이기 위한 노력이 계속되었으며, 고속 칼만 필터 알고리즘이 나오면서 계산량에 대한 부담은 현저하게 낮아졌고 신호처리의 다양한 분야에서 계속적으로 사용되고있다.

Kitagawa와 Gersh는 시변신호인 지진파를 해석하면서 칼만 필터를 사용하였으며, Moser는 이 알고리즘을 실시간 처리에 응용할 수 있도록 하였다.^[4-5] 비록 고속 칼만 필터 알고리즘에 의해서 계산량에 대한 부담이 낮아지기는 하였지만 음성신호처리나 생체신호의 인식과 같이 높은 샘플링 주파수에 적용하기에는 비용적인 측면을 무시할 수 없다. 따라서 더욱 계산량을 절감할 수 있는 알고리즘의 개발과 함께 저가격의 디지털 신호처리 칩으로 구현하는 것이 요구된다.

본 연구에서는 신호를 직교변환평면(orthogonal transform)으로 이동시킨 후 신호모델을 세우고, 직교화된 신호에 대해서 시간평면보다 낮은 차수의 칼만 필터를 병렬로 적용할 수 있도록 함으로써 계산량을 줄이고 최적해에 빨리 도달할 수 있는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 직교변환은 다해상도(multiresolu-

tion)해석에 널리 사용되는 웨이브렛 변환(wavelet transform)을 사용하였다. 알고리즘의 타당성을 검토하기 위해서 실제로 非定常 시변신호(nonstationary time varying signal)를 수집하여 시간평면과 웨이브렛 변환평면에서의 자기상관(autocorrelation)행렬을 구하였으며, 자기상관행렬의 고유치를 구하여 그 분포 정도를 계산하였고, 일반적인 칼만 필터를 적용하였을 때 요구되는 계산량과 제안된 병렬 칼만 필터의 계산량을 비교하였다. 또한 두 평면에서 추정한 시변신호의 추정 평균자승오차(MSE : mean square error)를 비교하였다.

II. 웨이브렛 변환

웨이브렛 이론은 다양한 신호처리 응용분야에 대해서 독립적으로 개발되어왔던 많은 기술에 대한 통합된 틀을 제공한다. 예를 들어 최근의 컴퓨터 비전에 사용되는 다해상도 신호처리, 음성과 영상 압축을 위해서 개발된 부대역 부호화(subband coding), 응용수학(applied mathematics)에서 개발된 웨이브렛 수열 전개 단일이론에대한 서로 다른 관점으로 인식되어왔다. 사실 웨이브렛 이론은 매우 넓은 영역을 차지한다. 웨이브렛 이론은 연속시간과 이산시간의 두경우를 다루고 신호처리에서의 많은 연구에 적용될 수 있는 일반적인 기술을 제공하고, 따라서 여러 분야에 응용할 수 있다.^{[6]-[9]}

특히 웨이브렛 변환은 非定常신호(nonstationary signal)의 해석에 대해서 지금까지 고전적으로 사용되어왔던 short-time Fourier 변환(STFT)이나 Gabor 변환과는 다른 관점을 제공하고 있어서 관심을 끌고있다. STFT와 웨이브렛 변환사이의 기본적인 차이점은 STFT가 하나의 해석 윈도우(window)를 사용하는데 비해서 웨이브렛 변환은 높은 주파수에서는 짧은 윈도우를 사용하고 낮은 주파수에서는 긴 윈도우를 사용한다는 것이다. 따라서 웨이브렛 변환을 "Constant-Q" 또는 상대대역폭 정수주파수(constant relative bandwidth frequency) 분석이라고 부르기도 한다. 또한 웨이브렛 변환은 Wigner-Ville 분포에 근거한 시간-주파수 해석과도 관계가 있다.^[10]

웨이브렛 변환을 정의하기 전에 허용함수를 정의한다. 어미 웨이브렛이 되기 위한 함수는 허용적이어야한다. 웨이브렛 또는 어미 웨이브렛이 되기 위한 함수는

진동하고 빠른 시간에 영으로 감소해야 한다. 이러한 조건이 웨이브렛의 적분 값이 영(웨이브렛의 직류성분이 영)으로 되는 조건과 합쳐지면, 어미 웨이브렛이 되기 위한 함수로서 만족하는 세 가지의 비견고적 허용성 조건이 된다. 원칙적으로 허용함수는 대역통과 신호이다. 이들 신호는 직류성분을 가질 수 없고, 감소되므로 무한대의 주파수 성분도 가질 수 없다. 매체나 자유 공간을 통해서 전송되는 대부분의 신호들은 유한주기, 대역통과 신호이므로 이러한 조건이 극히 제한적인 것은 아니다.

하나의 $L^2(R)$ 함수(유한에너지 함수 - 독립적인 변수의 범위에 대해서 square integrable) g 는 다음조건을 만족하면 허용함수이다.

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1)$$

여기서 $G(\omega)$ 는 g 의 Fourier변환이다. 대부분의 자연적인 신호는 허용함수로 분류할 수 있다.

웨이브렛 변환 연산자 W_g 는 실수나 복소수 값을 갖는 유한에너지 또는 $L^2(R)$ 신호를 다음과 같이 대응시킨다. $W_g: L^2(R) \rightarrow L^2(R \setminus \{0\}) \times R$. 주어진 허용함수 웨이브렛 g 에 대해서 임의의 신호 $y(t)$ 의 웨이브렛 변환은 다음과 같이 정의된다.

Wavelet domain coeff at scale a and translation τ

$$\begin{aligned} &= W_g y(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int y(t) g^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \\ &= \langle y, \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \rangle = \langle y, g_{a,\tau} \rangle = \langle y, U(a, \tau)g \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 “*”는 공액복소수를 나타내고, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적 (correlation integral에 대한 약식표기)이다. 웨이브렛 요소 $g_{a,\tau}$ 는 unitary affine mapping $U(a, \tau): g(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ 로 정의된다. 즉 $g_{a,\tau}$ 는 $g(t)$ 가 축척(scale) 파라미터 a 에 의해서 축척되고 병진(translation) 파라미터 τ 에 의해서 이동된 형태이다. 축척은 임의의 영이 아닌 실수, $R \setminus \{0\}$, 가 될 수 있다. “unitary”라는 용어는 축척된 어미 웨이브렛의 에너지를 원래의 어미 웨이브렛의 에너지와 동일하게 유지되도록 $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ 의 항으로 처리된 에너지 정규화를 의미한다. 어미 웨이브렛은 단일의 허용성 상수 C_g 를 갖도록 정규화될 수 있다. 단일 허용성 상수는 등방성의 웨이브렛 변환(에너지가 시간이나 공간평면과 웨이브렛 평면에서 같다.)이 되도록 상수를 허용한다. 이것은 임의의 (a, τ) 에서 웨이브렛 계수가 축척의 넓은 범위에 대해

서 잘 비교되거나 결합되도록 한다. 연속(continuous) 웨이브렛 변환에 대해서 어미 웨이브렛의 선택은 허용성 조건에 의해서만 제한된다. 이것은 관심 있는 특정한 응용분야에서 최적의 동작을 위해서 자유롭게 어미 웨이브렛을 선택할 수 있도록 한다.

웨이브렛의 변형된 집합들이 어떻게 하나의 신호로 근사화되는 지를 검토하는 것에 의해서 역변환의 구조가 웨이브렛변환으로부터 구성될 수 있다. 하나의 특정한 웨이브렛으로부터 발생된 웨이브렛의 집합은 하나의 신호의 근사치(그 신호의 웨이브렛 평면 표현)를 구성하는데 사용될 수 있다. 이 신호는 웨이브렛 집합(축척되고 이동된 어미 웨이브렛들)에 대한 가중된 합(weighted sum 또는 적분)에 의해서 근사화된다. 각각의 가중된 웨이브렛은 구성블록으로 동작하고 모든 블록이 함께 더해질 때, 하나의 근사치가 형성된다. 웨이브렛 집합의 요소에 대해서 적당한 가중치를 구하기 위해서 근사화될 신호를 웨이브렛 집합의 각 요소에 투사(projection)한다. 각 투사의 결과는 어미 웨이브렛 g 에 대한 신호 $y(t)$ 의 웨이브렛 계수라고 불리는 스칼라 값 또는 $W_g y(a, \tau)$ 이다.

식 (2)에서 정의된 투사 프로세스는 일종의 상관관계(correlation : 두신호가 얼마나 잘 정합 되는가의 측도)이다. 정합 되거나 비교되는 신호는 원신호 $y(t)$ 와 어미 웨이브렛의 축척되고 이동된 형태로 $g\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ 이다.

웨이브렛 역변환은 식 (2)에서 설명된 웨이브렛 변환으로부터 유도된다. 어떠한 변환을 적용하여 신호를 합성하는 동작과 역변환은 동일성연산이다. 즉 원래의 함수가 구해진다.

$y(t)$ 와 $g(t)$ 가 유한 에너지함수($L^2(R)$ 에서) 이고 $g(t)$ 가 $(a, \tau) \in (R \setminus \{0\}) \times R$ 에서 $g_{a,\tau} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ 를 갖는 허용 어미 웨이브렛이면 웨이브렛 역변환 W_g^{-1} 는 축척-병진평면 $H(a, \tau)$ 에서의 평면을 1차원의 시간 또는 공간 평면($W_g^{-1}: L^2(R \setminus \{0\}) \times R \rightarrow L^2(R)$)으로 대응시킨다.

$$\begin{aligned} &W_g^{-1}: H(a, \tau) \rightarrow p(t) \\ p(x) &= \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \frac{drda}{a^2} \end{aligned} \quad (3)$$

축척-병진평면이 어미 웨이브렛 g 또는 $H(a, \tau) = W_g y(a, \tau)$ 에 대한 $y(t)$ 의 웨이브렛변환인 경우에 다음과 같이 된다.

$$W_g^{-1} : W_g y(a, \tau) \rightarrow y(t) \tag{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_g y(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \frac{d\tau da}{a^2}$$

역변환은 축척되고 이동된 형태의 어미 웨이브렛이 적절하게 가중된 합에 의해서 원래의 신호를 생성한다. 가중치는 웨이브렛 계수 $W_g y(a, \tau)$ 이다. 역변환은 2차원 축척-병진 공간에 대한 합이다. 시간과 공간 평면 함수는 웨이브렛 평면 계수 $H(a, \tau)$ 또는 $W_g y(a, \tau)$ 와 어미 웨이브렛 g 로부터 생성된다. 식 (4)의 역변환을 즉시 정의하는 대신에 식 (3)의 보다 일반적인 형태가 어미 웨이브렛에 대한 웨이브렛 변환과의 종속성을 강조하기 위해서 도입되었다.

지금까지 유도된 연속 웨이브렛 변환은 이산(discrete)형태로 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} g(a_0^{-j} t - kT) \quad \text{: 이산 웨이브렛} \tag{5}$$

$$W_{g_{j,k}} = \int y(t) g_{j,k}^*(t) dt \quad \text{: 이산 웨이브렛 변환}$$

$$y(t) = C_g \sum_j \sum_k W_{g_{j,k}} g_{j,k}(t) \quad \text{: 이산 웨이브렛 역변환}$$

이산 웨이브렛 변환은 다단계 필터뱅크로서 구현이 가능하며 그림 1에 웨이브렛 변환 구조를 나타내고, 그림 2에 웨이브렛 역변환 구조를 나타내었다¹⁶⁾. 필터뱅크에 의한 웨이브렛 변환에서 $h(n)$ 은 반대역 고역통과 필터를, $g(n)$ 은 반대역 저역통과 필터를 나타낸다.

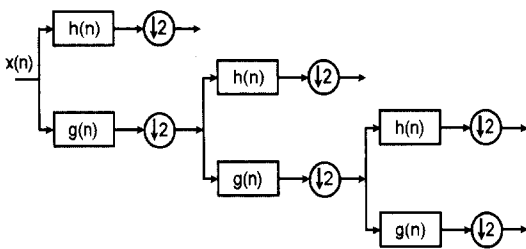


그림 1. 웨이브렛 변환 구조
Fig. 1. Structure of the wavelet transform.

III. 웨이브렛 변환평면 병렬 신호추정 알고리즘 제안

1. 웨이브렛 변환평면에서의 신호모델

신호처리하려는 원신호 $d(n)$ 에 대한 웨이브렛 변환평면에서의 표현은 식 (6)과 같이 표현될 수 있다.

$$d(n) = \sum_{j,k} h_{j,k} \sum_i g_{j,k}(n-i) y(n-i) \tag{6}$$

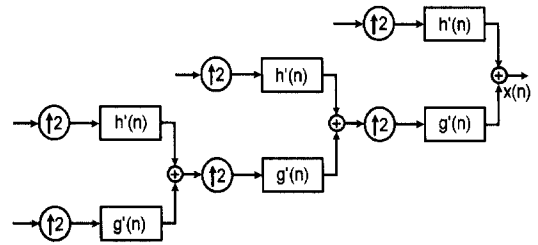


그림 2. 웨이브렛 역변환 구조
Fig. 2. Structure of the inverse wavelet transform.

콘벌루션 $\sum_i g_{j,k}(n-i) y(n-i)$ 와 같은 $z_{j,k}(n)$ 으로 구성된 벡터 $z(n)$ 과 $h_{j,k}$ 로 구성된 벡터 h 로 표기하기로 한다. h 의 성분이 $z(n)$ 의 성분에 대해 적당한 순서로 놓여있다고 가정하면 식(6)을 식(7)로 나타낼 수 있다.

$$d(n) = h^T z(n) \tag{7}$$

웨이브렛 변환평면에서의 신호모델을 이용하여 식(8)과 같이 원신호 $d(n)$ 을 추정할 수 있다.

$$\hat{d}(n) = \sum_{j,k} \hat{h}_{j,k} \sum_{i=1}^m g_{j,k}(n-i) y(n-i) \tag{8}$$

$z(k)$ 와 h 를 정의했을 때와 비슷하게 두벡터 $z_1(k)$ 와 \hat{h} 를 도입할 수 있다. 따라서 식(8)은 식(9)로 나타낼 수 있다.

$$\hat{d}(n) = \hat{h}^T z_1(n) \tag{9}$$

식(9)의 벡터들을 식(7)의 벡터들과 쉽게 관련시키기 위해서 $h^T = [h_1^T, h_2^T]$ 이고 $(n) = [z_1^T(n), z_2^T(n)] z^T$ 이라고 가정하자. h_2 는 신호모델의 계수벡터(coefficient vector)이고 $z_2(n)$ 는 원신호 $d(n)$ 을 추정하는데 사용되지 않은 웨이브렛에 대한 콘벌루션 벡터이다. 이러한 일반적인 설정을 통해서 축소된 차수의 모델링(reduced order modeling)의 가능성을 찾을 수 있다.

신호모델링의 궁극적인 목표는 원신호와 추정된 신호사이의 MSE를 최소화하는 것이다.

$$E[|e(n)|^2] = E[|d(n) - \hat{d}(n)|^2] \tag{10}$$

행렬 $E[z_1^*(n)z_1^T(n)]$, $E[z_1^*(n)z_2^T(n)]$, $E[z_2^*(n)z_2^T(n)]$

을 각각 R_{11} , R_{12} , R_{22} 로 정의하자. 그러면 식(10)을 최소화하는 신호모델의 계수 \hat{h}_o 는

$$\hat{h}_o = h_1 + R_{11}^{-1}R_{12}h_2 \quad (11)$$

이고 MSE의 최소 값은 다음과 같이 된다.

$$J_{\min} = h_2^H(R_{22} - R_{12}^H R_{11}^{-1}R_{12})h_2 \quad (12)$$

R_{11} 의 고유치(eigenvalue)의 퍼져있는 정도가 작으면 알고리즘의 수치적 특성에 좋은 영향을 줄 수 있다. 시간평면에서 선형예측을 통해 신호를 모델링 한다는 것은 현재와 과거의 입력신호와 과거의 출력신호의 선형적 결합으로 나타내는 것이다. 벡터적으로 나타낸다면, 입력신호와 출력신호는 각각 하나의 벡터축을 형성하게 되고 현재의 입력이 각각의 벡터축에 투사된다고 할 수 있다. 이러한 투사를 통한 신호의 모델링에서 일반적으로 각 벡터 축들간의 직교성(orthogonality)이 성립되어 있지 않기 때문에 중첩되어 모델링 되는 부분이 생기게되고, 충분한 차수의 모델링이 이루어지지 않기 때문에 원신호를 정확히 모델링 하는데 방해요소가 되며, 모델링 오차를 일으킨다.

이러한 관점에서 볼 때, 임의의 신호를 직교투사를 통해서 모델링 할 수 있다면, 중첩되어 모델링 되는 부분에 의한 모델링 오차를 줄일 수 있게되어 보다 정확한 모델링이 가능하게 되며, 입력 자기상관함수가 대각 행렬화 되어 칼만 필터에 적용되는 데이터를 분리할 수가 있다. 따라서 웨이브렛 변환을 이용한 직교변환으로 데이터를 분리할 수 있고, 분리된 각 부분에 대해서 칼만 필터를 동시에 병렬로 적용할 수 있다.

직교투사를 적용할 수 있는 가능성은 입력의 자기상관함수의 고유치 분포와 관련이 있으므로 이에 대한 해석이 필요하다. 먼저 일반성을 주기 위해서 관측된 입력신호의 전력(power)이 1이라고 가정하자.

$$E\{y(n)^2\} = 1 \quad (13)$$

$Tr(A)$ 는 케적이고 $Det(A)$ 는 자승행렬 A 의 행렬 값이라고 하면, 행렬이론^[11]으로부터

$$\lambda_{\max} \leq Tr(A) \quad (14)$$

2보다 큰 N 에 대해서 일반적으로 다음과 같이 된다.

$$\lambda_{\min} \geq Det(A) \quad (15)$$

그러므로 그 비율 $\gamma(A)$ 는 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 에 대한 상한

(upper bound)으로 사용될 수 있다.

$$\gamma(A) = \frac{Tr(A)}{Det(A)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Det(\Lambda^{-2}R_{22}) &= Det(\Lambda^{-2})Det(R_{22}) \\ &= Det(\Lambda^{-2})Det(R_{yy}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Tr(\Lambda^{-2}R_{22}) &= Tr(R_{yy}) \\ &= N \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 R_{22} 는 웨이브렛 변환평면에서의 입력 자기상관함수, R_{yy} 는 시간평면에서의 입력 자기상관함수, Λ^2 은 (i, i) 번째 값이 추정전력(윈도우를 이동시켜 평균값을 구한 것)인 $N \times N$ 대각 행렬, N 은 입력신호의 개수이다. 따라서

$$\gamma(\Lambda^{-2}R_{22}) = Det(\Lambda^2)\gamma(R_{yy}) \quad (19)$$

$Tr(\Lambda^2) = N$ 이므로, $Det(\Lambda^2)$ 는 항상 1보다 작거나 같다. 그러므로

$$\gamma(\Lambda^{-2}R_{22}) \leq \gamma(R_{yy}). \quad (20)$$

즉, 적당히 선택된 직교변환 W_g 에 대해서 고유치가 시간평면보다 퍼져있는 정도가 작을 것이 기대된다. 이 증명의 중요성은 웨이브렛 변환평면으로 이동된 신호를 정확히 모델링할 수 있는 가능성과 직교성분끼리 분리되어 병렬로 칼만 필터를 적용할 수 있는 가능성을 제시한다는 것이다. 본 연구에서는 직교변환으로 웨이브렛 변환을 선택하였으며, 어미 웨이브렛으로는 연산량이 적고 일반적으로 널리 사용되는 Daubechies의 D4 웨이브렛을 사용하였다.^[8-9]

2. 병렬 신호 추정 알고리즘

웨이브렛 변환평면으로 이동된 신호는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(n) = W_{g,i}y(n) \quad (21)$$

시간평면에서 관측되어 식(21)로 변환된 신호는 식(9)와 같이 시간평면에서의 원신호를 추정하는데 사용할 수 있다. 따라서 원신호 $d(n)$ 은 식(22)처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} d(n) &= \sum_{i=1}^m h_i(n)z(n-i) + w(n) \\ \hat{d}(n) &= \sum_{i=1}^m \hat{h}_i(n)z(n-i) \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)의 신호모델은 다음과 같이 동일한 상태공간 방정식으로 변환할 수 있다.

$$x(n+1) = A(n)x(n) + u(n) \quad (23)$$

$$y(n) = C(n)x(n) + u(n) \quad (24)$$

여기서 추정되는 신호모델 파라미터는 $x(n)$ 이다.

$$x(n) = \begin{bmatrix} h_1(n) \\ \vdots \\ h_m(n) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$A(n) = I, \quad I: \text{identity matrix} \quad (26)$$

$$u(n)^T = [v_1(n+1) \ v_2(n+1) \ \cdots \ v_m(n+1)] \quad (27)$$

$$C(n) = [z(1) \ z(2) \ \cdots \ z(m)] \quad (28)$$

라하자. $u(n)$ 의 공분산(covariance)은 식(29)로 표현한다.

$$\text{cov}[u(n)] = V(n) = \begin{bmatrix} V_1(n+1) & 0 & & \\ 0 & V_2(n+1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_m(n+1) \end{bmatrix} \quad (29)$$

신호모델 파라미터 추정 알고리즘들은 매 이산샘플시 간마다 시스템의 상태, 즉 n 에서의 신호모델 파라미터의 추정을 계산하는데 적용할 수 있다. 파라미터의 추정을 위하여 상태공간 방정식을 풀기 위한 과정은 식(30)~식(32)와 같다.^[12]

$$\hat{x}(n+1/n) = [A(n) - K(n)C(n)] \hat{x}(n/n-1) + K(n)d(n) \quad (30)$$

$$K(n) = A(n)P(n/n-1)C(n)^T \cdot [C(n)P(n/n-1)C(n)^T + W(n)]^{-1} \quad (31)$$

$$P(n+1/n) = A(n) \cdot [P(n/n-1) - P(n/n-1)C(n)^T \cdot (C(n)P(n/n-1)C(n)^T + W(n))^{-1} \cdot C(n)P(n/n-1)] A(n)^T + V(n) \quad (32)$$

$$= E\{ [x(n+1) - \hat{x}(n+1/n)] \cdot [x(n+1) - \hat{x}(n+1/n)]^T | z(1), \dots, z(n) \}$$

여기서 $\hat{x}(n+1/n)$ 은 n 번째 구간에서 관측된 데이터로 주어진 $x(n+1)$ 의 추정을 나타내며, $P(n+1/n)$ 은 그 시간의 추정오차 공분산이다.

식(23)~식(29)에 걸쳐서 표시된 상태공간 방정식은

시간평면에서의 칼만 필터를 적용하기 위한 알고리즘과 동일한 형태로써, 웨이블릿 변환평면에서 칼만 필터를 병렬로 적용할 수 있도록 하기 위한 기본 설정이다. 식(22)에서 원신호를 추정하기 위해서 사용되는 웨이블릿 변환된 신호는 시간평면에서의 신호를 서로 다른 해상도를 갖는 영역으로 대응이 되어있다. 따라서 고유치의 퍼진 정도가 작게되고, 입력 자기 상관함수가 근사적으로 대각행렬이 되므로 웨이블릿 변환평면에서는 신호를 분리하여 처리할 수 있다. 이를 도식적으로 나타내면 그림 3과 같다.

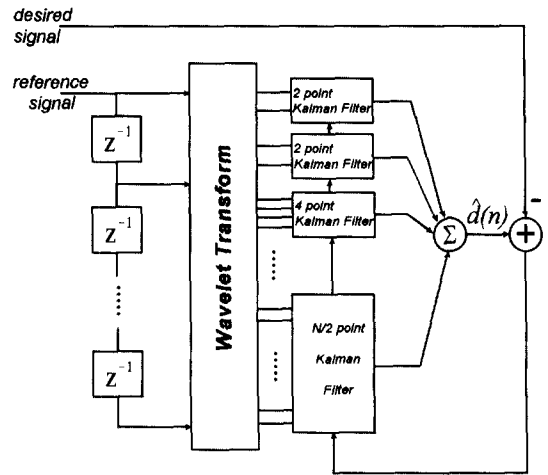


그림 3. 병렬 웨이블릿 변환평면 신호추정 알고리즘
Fig. 3. Parallel algorithm for the signal estimation in the wavelet transform domain.

그림 3에서 웨이블릿 변환된 신호는 직교성분들의 집합으로 이루어져 있다. 이 신호들은 웨이블릿 변환된 전체 N 개 데이터의 $1/2, 1/4, \dots, 4/N, 2/N, 2/N$ 의 집합으로 각각 나뉘어진다. 마지막 $2/N$ 는 웨이블릿 변환을 위한 피라미드(pyramid) 알고리즘의 마지막 단계에서 $2/N$ 의 직교성분들이 둘로 되는 것이다.^[13] 다른 집합으로 나뉘어진 신호들은 서로 직교성분이므로 각각의 데이터 개수에 맞는 차수의 칼만 필터를 적용할 수 있다.

IV. 알고리즘의 시뮬레이션 및 고찰

1. 시뮬레이션 방법

본 논문에서는 제안된 알고리즘의 타당성을 검토해 보기 위하여 간단한 시험신호(test signal)로써 非定

常 시변신호를 수집하고, 시간평면에서의 칼만 필터와 연산량을 비교하였으며, 두 평면에서의 고유치 분포와 자기상관함수의 비교 및 관련파라미터에 대해서 고찰하고, 추정된 신호의 평균자승오차를 검토하였다.

非定常 시변신호는 적당한 힘을 주고 팔을 움직이면서 이두박근(biceps)으로부터 근전도(electromyogram) 신호를 수집한 것이다. 정상인의 이두박근에서 가장 근신호가 잘 검출되는 부분에 표면전극(TECA, NCS 2000)을 부착한 뒤 14Kg의 부하를 들어올렸다가 내리는 동작을 수행할 때 신호를 수집하였다. 팔의 갑작스러운 굴곡운동은 운동의 시작부분에서 근육에 힘이 가해지기 때문에 시변신호가 얻어진다. 이때의 샘플링 주파수는 1024Hz, 증폭율은 2000배, 저역통과 필터는 0.5~500Hz로 설정하고 1초간 데이터를 수집하였다.

수집된 신호를 추정하는데는 시간평면과 웨이브렛 변환평면의 차수를 동일하게 하여 시물레이션 하였다.

2. 시물레이션 결과 및 고찰

일반적으로 시간평면에서 칼만 필터를 적용할 때 필요한 계산량은 식(30)~식(32)로 부터 얻을 수 있다. 마이크로 프로세서를 이용하여 어떠한 알고리즘을 수행할 때 수행시간에 큰 영향을 주는 요소는 계산에 요구되는 곱셈의 양이다. 원신호를 추정하기 위해서 사용되는 기준신호 데이터가 N 개 필요하다고 할 때 시간평면에서의 칼만 필터는 식(30)을 계산하는데 $A(n)$ 은 단위행렬이므로 $2N^2 + N$ 의 곱셈이 요구되고, 식(31)에서 $P(n/n-1)C(n)$ 의 계산에 N^2 , 이것을 저장한 후 사용하면 $C(n)P(n/n-1)C(n)$ 에 N^2 의 곱셈이 요구된다. 식(32)에서는 $P(n/n-1)C(n)$ 과 $C(n)P(n/n-1)C(n)$ 은 식(31)에서 계산된 결과를 이용할 수 있으므로 $C(n)P(n/n-1)$ 만 계산하면 N^2 의 곱셈이 요구되므로, 전체적으로 $5N^2 + N$ 의 곱셈이 요구된다. 그림 4와 같이 분할된 웨이브렛 변환평면의 데이터에 대해서 칼만 필터를 적용할 때 그 계산량은 다음과 같이 주어진다.

$$\sum_{i=1}^M [5(\frac{N}{2^i})^2 + (\frac{N}{2^i})] + [5(2)^2 + 2] + 4N, \text{ where } M = \log_2 N - 1 \tag{33}$$

식(33)에서 $4N$ 은 웨이브렛 변환을 하기 위해서 요구되는 곱셈의 양이다. 따라서 웨이브렛 변환평면에서 칼만 필터를 병렬로 적용하는 알고리즘이 기준신호 데이터가 증가함에 따라서 더욱 적은 계산량을 요구한다

는 것을 알 수 있다. 기준신호 데이터 량에 따른 계산량을 그림 4에 나타내었다.

그림 4에서 4차 칼만 필터를 적용할 때 제안된 병렬 칼만 필터 알고리즘은 1.4배의 계산량이 절감되었으며, 128차인 경우에는 2.93배 절감되었다.

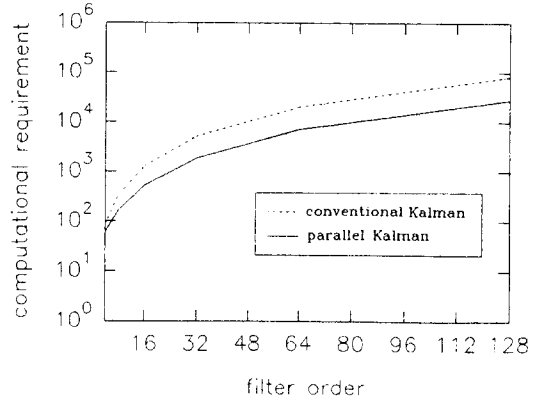


그림 4. 두 평면에서의 계산량 비교

Fig. 4. Comparison of computational requirement in the both domain.

시간평면의 데이터를 웨이브렛 변환평면으로 넘겼을 때 신호들은 직교성분끼리 나뉘어지고, 따라서 입력 자기상관함수가 근사적으로 대각행렬이되며, 고유치의 퍼짐 정도가 작게된다는 것은 III절에서 증명하였다. 여기서 실제로 얻은 시변신호에 대해서 시간평면과 웨이브렛 변환평면에서 데이터가 16개와 4개일때의 입력 자기상관함수를 구하고, 고유치와 행렬값, 행렬의 제적, 고유치의 최대값과 최소값의 비율을 구해서 비교하였다. 그림 5는 시물레이션에 사용된 시변신호이다.

표 1은 시간평면과 웨이브렛 변환평면에서 16개와 4개의 데이터에 대하여 구한 입력의 자기상관행렬과 그 행렬의 고유치를 나타낸 것이고, 표 2는 관련된 파라미터를 구한 것이다. 여기서 k 는 이산시간(discrete time)을 나타내며 r_k 는 해당 이산천이 시간에서의 자기상관 값이다. 신호들이 서로 직교성분들로 이루어져 있다면 이론적으로 입력의 자기상관행렬은 $R(0)$ 를 제외한 나머지 값들은 영(zero)인 대각행렬로 나와야 한다. 그러나 실제로 얻어지는 물리적인 신호들은 서로 완전한 직교성분들로 이루어지지 않았기 때문에 이러한 값을 기대할 수 없다. 표 1에서 16개의 데이터에 대한 시간평면의 입력 자기상관행렬은 정규화한 값에

대해서 $R(0)$ 성분의 10%이하로 떨어지는 천이시간은 11번째 이후이고, 웨이브렛 변환평면에서는 4번째 이후이다. 특히 원신호의 추정에 4개의 데이터타를 사용하는 경우에는 시간평면에서는 10%이하로 떨어지지 않는 것을 관측할 수 있다. 이것은 직교변환인 웨이브렛 변환을 이용하므로써 얻어질 수 있는 결과이다.

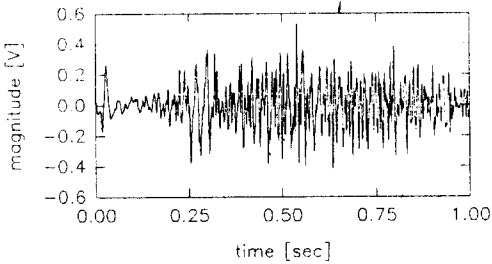


그림 5. 시뮬레이션에 사용된 非定常 시변신호
Fig. 5. Nonstationary time-varying signal used simulation.

이로부터 웨이브렛 변환평면에서의 입력 자기상관행렬이 근사적으로 대각행렬을 이루고 있다는 것을 알 수 있다. 또한 웨이브렛 변환평면에서의 입력 자기상관행렬의 고유치가 시간평면보다 16개의 데이터에 대해서 8.35배, 4개의 데이터에 대해서 1.53배 적게 퍼져 있다. 입력 자기상관행렬과 그 행렬의 고유치로부터 웨이브렛 변환평면에서 신호를 분리하여 처리하는 것이 가능하다는 것을 알 수 있고, 따라서 제안된 알고리즘이 타당성을 갖는다는 것을 나타낸다.

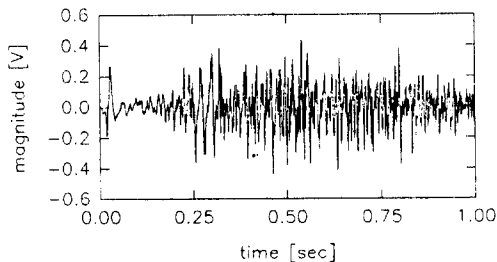


그림 6. 제안된 알고리즘에 의해서 추정된 신호
Fig. 6. Estimated signal using proposed algorithm.

표 2에서 시간평면이나 웨이브렛 변환평면에서의 고유치의 최소값(λ_{\min})이 입력 자기상관행렬의 행렬값 ($Det(R)$)보다 크고, 최대값(λ_{\max})은 입력 자기상관행

렬의 꺾적($Tr(R)$)보다 작다. 고유치의 최소값에대한 최대값의 비율($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$)에 대한 상한 값으로서 행렬 값에 대한 꺾적의 비($\chi(R)$)를 사용할 수 있다는 것도 나타난다. 이는 식(14)부터 식(16)에 정의된 조건들을 만족함을 직접적으로 증명한다. 이러한 조건들을 근거로 하여 웨이브렛 변환평면에서 병렬로 칼만 필터를 적용할 수 있다.

그림 5는 시뮬레이션에 사용된 신호를 나타내고 있으며, 그림 6은 제안된 알고리즘에 의해서 추정된 신호를 나타내고 있다.

표 1. 시간평면과 웨이브렛 변환평면의 입력 자기상관 행렬과 고유치

Table 1. The input autocorrelation matrix and its eigenvalue in the time and the wavelet transform domain.

| $R_{yy}(k)$ | | | | $R_{zz}(k)$ | | | |
|-------------|----------|-----|-----------|-------------|-----------|-----|-----------|
| k | r_k | k | r_k | k | r_k | k | r_k |
| 0 | 1.000000 | 8 | 0.313064 | 0 | 1.000000 | 8 | 0.064454 |
| 1 | 0.806675 | 9 | 0.257713 | 1 | 0.209784 | 9 | 0.049463 |
| 2 | 0.739484 | 10 | 0.197780 | 2 | -0.128629 | 10 | 0.022667 |
| 3 | 0.628253 | 11 | 0.117234 | 3 | -0.115894 | 11 | -0.068490 |
| 4 | 0.514697 | 12 | 0.012993 | 4 | 0.141731 | 12 | 0.011112 |
| 5 | 0.454161 | 13 | -0.027870 | 5 | 0.043899 | 13 | 0.193916 |
| 6 | 0.403598 | 14 | -0.052057 | 6 | -0.064702 | 14 | 0.218294 |
| 7 | 0.357882 | 15 | -0.077771 | 7 | -0.278809 | 15 | -0.053090 |

Autocorrelation matrix (N = 16)

| $R_{yy}(k)$ | | | | $R_{zz}(k)$ | | | |
|-------------|----------|-----|-----------|-------------|-----------|-----|-----------|
| k | r_k | k | r_k | k | r_k | k | r_k |
| 0 | 1.000000 | 2 | -0.288650 | 0 | 1.000000 | 2 | -0.060516 |
| 1 | 0.233382 | 3 | -0.407204 | 1 | -0.075085 | 3 | -0.363773 |

Autocorrelation matrix (N = 4)

| $R_{yy}(k)$ | | | | $R_{zz}(k)$ | | | |
|-------------|--------|-----|--------|-------------|--------|-----|--------|
| k | r_k | k | r_k | k | r_k | k | r_k |
| 0 | 0.1747 | 8 | 0.1050 | 0 | 1.0020 | 8 | 0.6120 |
| 1 | 0.1735 | 9 | 0.0969 | 1 | 0.9892 | 9 | 0.5258 |
| 2 | 0.1533 | 10 | 0.2396 | 2 | 1.0343 | 10 | 1.3841 |
| 3 | 0.1527 | 11 | 0.5548 | 3 | 1.0628 | 11 | 0.2722 |
| 4 | 0.1617 | 12 | 0.8368 | 4 | 0.8680 | 12 | 0.2137 |
| 5 | 0.1841 | 13 | 1.0839 | 5 | 0.8580 | 13 | 1.5191 |
| 6 | 0.1950 | 14 | 3.6188 | 6 | 0.7464 | 14 | 2.1280 |
| 7 | 0.2016 | 15 | 8.0676 | 7 | 0.6541 | 15 | 2.1302 |

Eigenvalue (N = 16)

| $R_{yy}(k)$ | | | | $R_{zz}(k)$ | | | |
|-------------|--------|-----|--------|-------------|--------|-----|--------|
| k | r_k | k | r_k | k | r_k | k | r_k |
| 0 | 1.2381 | 2 | 0.5881 | 0 | 1.0744 | 2 | 1.3645 |
| 1 | 0.4745 | 3 | 1.6994 | 1 | 0.9786 | 3 | 0.5825 |

Eigenvalue (N = 4)

표 2. 두 평면에 대한 입력 자기상관 행렬의 관련 파라미터

Table 2. Parameters of the input autocorrelation matrix in the two domain.

| Parameters | λ_{min} | λ_{max} | $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ | $De(K/R)$ | $Tv(K/R)$ | $\gamma(K/R)$ |
|----------------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|-----------|-----------|---------------|
| Time Domain(N=16) | 0.0969 | 8.0676 | 83.257 | 2.975E-8 | 16 | 5.378E8 |
| Time Domain(N=4) | 0.4745 | 1.6994 | 3.581 | 0.5870 | 4 | 6.814 |
| Wavelet Domain(N=16) | 0.2137 | 2.1302 | 9.968 | 0.0707 | 16 | 226.31 |
| Wavelet Domain(N=4) | 0.5825 | 1.3645 | 2.342 | 0.8537 | 4 | 4.685 |

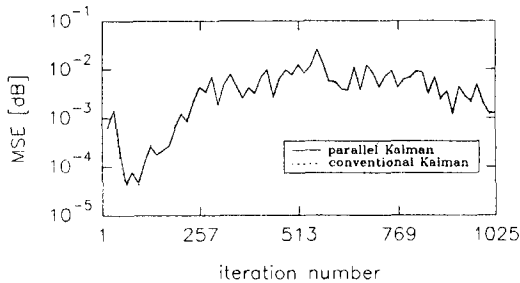


그림 7. 각 평면의 평균자승오차

Fig. 7. Mean square error in the each domain.

그림 7은 시간평면에서의 칼만 필터 알고리즘에 의해서 추정된 시변신호의 평균자승오차와 웨이브렛 변환평면 병렬 칼만 필터 알고리즘에 의해서 추정된 시변신호의 평균자승오차이다. 평균 자승 오차는 1초간 수집된 1024샘플에 대해서 16샘플씩 64블록으로 구분하여 구한 것이다. 그림 7에서 보는 것처럼 두 평면에서 추정된 신호의 평균자승오차가 거의 유사하다는 것을 관측할 수 있다. 이것은 웨이브렛 변환평면에서 세워진 신호모델이 수치적인 정확성을 유지하면서 직교 성분들의 집합에 대해서 칼만 필터를 병렬로 적용할 수 있다는 것을 의미한다. 웨이브렛 변환평면에서의 병렬 알고리즘은 시간평면에 비해서 수치적 정확도를 개선하고, 계산량을 줄이기 때문에 칼만 필터를 이용한 신호추정문제에서 매우 유용할 것이다. 또한 계산량의 절감으로 샘플링 주파수를 높일 수 있게 되고, 샘플링

주파수의 증가는 원신호에의 빠른 수렴성을 갖게 한다.

V. 결 론

칼만 필터는 잡음으로 왜곡된 원신호를 정확히 복원하기 위한 최적의 필터로서 실시간 처리를 할 수 있는 구조를 갖고 있기 때문에 광범위한 분야에서 사용되고 있으나, 계산량에 대한 부담은 아직까지 문제가 되고 있는 부분이다.

본 논문의 알고리즘은 신호를 직교변환평면으로 이동시키므로써 병렬로 칼만 필터를 적용할 수 있게 하여 계산량을 절감하였다. 이러한 점은 샘플링 주파수를 높여 신호의 추정속도를 높일 수 있는 장점을 제공하며 특히 허반신 마비 환자의 보행 자동제어를 위한 비정상 근전도 신호처리에 응용이 기대된다. 그리고 최근 들어 많이 연구되고 있는 병렬처리 프로세서를 이용한다면, 저가로 고성능의 신호추정기를 구현할 수 있을 것이다.

앞으로 보다 효과적인 알고리즘이 되기 위해서는 적용하고자 하는 신호에 최적인 어미 웨이브렛을 선정하는 방법에 대한 연구와 신호를 분리하기에 충분한 고유치 분포정도에 대한 이론적인 분석이 계속 되어야 할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구를 위하여 많은 도움을 주신 미국 버지니아 주립대학의 Lawrence H. Phillips 교수님께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- [1] S. J. Orfanidis, Optimum Signal Processing : An Introduction, New York, McGraw Hill Inc., 2nd Ed., 1988.
- [2] N. Wiener, Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, New York: Wiley, 1949.
- [3] R.E.Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. Basic Eng. Trans. ASME*, vol.32, pp. 35-45, 1960.
- [4] G. Kitagawa and W. Gersch, "A Smoo-

- thness priors time-varying AR Coefficient modeling of nonstationary covariance time series," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-30, pp.48-56, Jan. 1985.
- [5] A.T.Moser and D.Graupe, "Identification of Nonstationary Models with Application to Myoelectric Signals for Controlling Electrical Stimulation of Paraplegics," IEEE Trans. ASSP, vol.37, No. 5, pp.713-719, May, 1989.
- [6] O.Rioul and M.Vetterli, "Wavelets and Signal Processing," IEEE SP Magazine, pp. 14-38, Oct., 1991.
- [7] S.G.Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation," IEEE Trans., Pattern Ana. and Machine Intel., vol.11, No.7, pp. 674-693, July, 1989.
- [8] I.Daubechies, "Orthonormal basis of compactly supported wavelets," Comm. Pure Applied Math., vol.41, pp. 909-996, 1988.
- [9] I.Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis," IEEE Trans., Infor. Theory, vol.36, No. 5, pp. 961-1005, Sep., 1990.
- [10] Y.Meyer, Wavelets: Algorithms and Applications., Translated by R.D.Ryan, Philadelphia, SIAM, 1993.
- [11] G.Strang, Linear Algebra and its Applications, 3rd Ed., Florida, Harcourt Brace Jvanovich, Inc., 1988.
- [12] S.M.Bozic, Digital and Kalman filtering. England. The Gresham, 1979.
- [13] A.N.Akansu, R.A.Haddad, Multiresolution Signal Decomposition, NewYork Academic Press, 1992.

 저 자 소 개

金 鍾 元(正會員) 第 30卷 6號 參照

현재 한국과학기술 연구원 연구개발정보센터 기술정보실 선임연구실

金 成 煥(正會員) 第 30卷 6號 參照

현재 서울대학교 전자공학과 교수