

論文95-32B-6-9

연속정상 1차 Gauss-Markov 신호원에 대한 형태론적 여파기의 통계적 분석

(The Statistical Analysis of Morphological Filters for a Continuous Stationary 1st- Order Gauss-Markov Source)

金翰均*, 尹楨敏*, 羅相臣**, 崔太永**

(Han Gyoon Kim, Jung Min Youn, Sang Sin Na, and Tae Young Choi)

요약

본 논문에서는 쌍대적 관계를 갖는 형태론적 여파기(불림과 녹임, 불임과 열림, 불임-열림과 열림-불임)에 대한 확률적 관계를 분석하고 이를 이용하여 연속정상과정인 1차 Gauss-Markov 신호원에 대한 통계적 분석을 하였다. 그 결과, 쌍대적 관계에 있는 여파기들의 평균과 Skew는 서로 대칭이며 분산은 동일하였다. 또한, 이들 여파기의 통계특성이 입력 신호원의 상관 계수가 높을 수록 입력신호의 것과 유사함을 알 수 있었다.

Abstract

In this paper, the probabilistic relations of dual morphological operations, such as dilation and erosion, closing and opening, and close-open and open-close, and the statistical properties for a continuous stationary 1st order Gauss-Markov source are analyzed. The result is that the dual filters have symmetrical means and skews, and equal variances. Also, the statistics of morphological filters are very similar with those of input source, as correlation coefficient increases.

I. 서론

비선형 영상신호처리분야에서 최근 활발히 연구되고 있는 수리 형태론(mathematical morphology)은 신호의 형태 보존, 잡음제거, 윤곽선 보존 등에서 그 성능이 우수하기 때문에 영상분할, 결합검출, 형태분석

등의 분야에 이용되고 있다.

일반적으로 비선형 여파기는 출력신호의 특성들을 선형함수와 같은 방법으로 나타낼 수 없기 때문에 그 것의 성능평가는 실험영상에 대한 주관적인 방법에 의존되고 있다. 그러나 최근에 median 여파기 뿐만 아니라 형태론적 여파기에 의한 출력신호의 통계적 분석이 연구 발표되고 있어 테스트 영상없이 그들의 성능평가가 이루어지고 있다^[1,2,3,4].

이미 알려진 형태론적 여파기의 통계적 분석 방법은 threshold decomposition 방법^[1]이나 각 여파기의 basis function^[3]에 의하여 이루어졌다. 그러나 이들은 수식 전개과정에서 매우 개념적이고 입력 신호원을

* 準會員, ** 正會員, 亞州大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Ajou Univ.)

※ 이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 대학부설 연구소 연구과제 연구비에 의하여 연구되었음.

接受日字: 1994年12月31日, 수정완료일: 1995年5月30日

1 차원 iid(independent identically distributed) 신호원으로 제한을 두어 잡음에 대한 형태론적 여파기의 영향만 분석하였다.

이에, 본 논문에서는 먼저, 입력 신호원이 연속정상 과정(continuous stationary process)일 경우 상대적 관계를 갖는 형태론적 여파기들(불림과 녹임, 불림과 열림, 불임-열림과 열림-불임)의 확률적 관계를 분석하였다. 그리고 이를 이용하여 연속정상 신호원에 대한 각 여파기들의 출력 확률 분포함수(probability distribution function)를 유도하였다.

또한, 실제 영상신호에 대한 형태론적 여파기의 영향을 분석하기 위해 이와 유사한 성질을 갖는 연속정상 과정의 1차 Gauss-Markov 신호원에 대하여 각 여파기들의 통계적 관계(평균, 분산, Skew 등)를 분석하였다.

본 논문의 2장에서는 형태론적 여파기의 쌍에 대한 확률적인 관계를 분석하고, 3장에서는 2장에서 얻어진 확률적인 관계를 이용하여 그들의 출력 분포함수를 유도하였다. 그리고 4장에서는 1차 Gauss-Markov 신호에 대한 형태론적 여파기의 통계적 관계를 분석하였으며 마지막 5장에서는 컴퓨터 모의 실험을 통하여 분석된 결과를 확인하였다.

II. 형태론적 여파기의 쌍대적 관계

수리형태론적 연산자는 서로 쌍대적 관계를 이루고 있으며 기본적인 쌍으로는 불림과 녹임을 들 수 있다. 또한 이들의 조합형태인 불임과 열림, 불임-열림과 열림-불임도 쌍대적 관계를 이루고 있다.

1차원 이상 랜덤신호, $X = \{x_i : i \in I\}$ 와 크기가 N 이고 연속적인 평탄 형태소, $W = \{a, a+1, \dots, a+N-1 : a \in I\}$ 가 주어질때, 1차원 수리형태론적 연산자의 정의는 다음과 같이 표현될 수 있다^[5,6]. (여기에서 I 는 정수의 집합이고 $N \in I, N \geq 1$)

$$\begin{aligned}
 \text{불림} : D_W(X) &= \{d_i : i \in I \mid d_i = \max\{x_{i-j} : j \in W\}\} \\
 \text{녹임} : E_W(X) &= \{e_i : i \in I \mid e_i = \min\{x_{i+j} : j \in W\}\} \\
 \text{열림} : O_W(X) &= D_W(E_W(X)) \\
 \text{불림} : C_W(X) &= E_W(D_W(X)) \\
 \text{열림-불림} : OC_W(X) &= C_W(O_W(X)) \\
 \text{불림-열림} : CO_W(X) &= O_W(C_W(X))
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

위 식(1)의 형태론적 연산자들은 다음과 같은 특성을 갖는다^[5,6,7,8].

Property 1.

$$\begin{aligned}
 E_W(X) &= -D_W(-X)_{1-2a-N} \\
 O_W(X) &= -C_W(-X) \\
 OC_W(X) &= -CO_W(-X)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

여기에서 $A_W(X)_i$ 는 $A_W(X)$ 를 i 만큼 이동시킨 것이다.

Proof)

$$\begin{aligned}
 E_W(X) &= \{\min\{x_{k+i} : i \in W\} : k \in I\} \\
 &= \{-\max\{-x_{k+i} : i \in W\} : k \in I\} \\
 &= \{-\max\{-x_{k-(1-2a-N)-i} : i \in W\} : k \in I\} \\
 &= -D(-X)_{1-2a-N}
 \end{aligned}$$

여기에서 2번째 등식은 $\min(A) = -\max(-A)$ 의 성질에 의하여 성립된다. 그리고 나머지 쌍대적 관계는 불림과 녹임의 조합형태이므로 변이량 i 가 없어지며 그 유도과정은 위와 유사하다.

Q.E.D

식(2)의 관계를 갖는 연산자들의 확률적 관계를 유도하기 위하여 먼저 입력 신호원, X 의 분포함수가 연속적인(즉, $\Pr(X=x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F_X(x, x+\epsilon) - F_X(x)] = 0$) 연속 정상과정이라 가정한다^[9]. 이러한 신호원에 대하여 쌍대적 관계를 갖는 각 연산자들의 분포함수는 다음 Theorem 1의 확률적 관계를 갖는다.

Theorem 1.

A, B 두 연산자가 쌍대적 관계에 있고 $A_W(X), B_W(X)$ 의 분포함수를 $F_A(x), F_B(x)$ 라 할때, 이 두 연산자는 다음과 같은 확률적 관계가 성립한다.

$$1 - F_A(-x) = \Pi [F_B(x)] \tag{3}$$

여기에서 $T[\cdot]$ 는 입력신호의 랜덤 과정 x 가 $-x$ 로 변환될때 발생하는 확률적 변환 함수이다.

Proof)

쌍대적 관계를 갖는 두 연산자의 관계식은 (2)식에 의하여 $-A_W(X) = B_W(-X)$ 와 같이 표현할 수 있다. 이때, X 가 정상과정이라면 변이량 i 의 확률적 의미는 없어진다. 그러므로 좌변 $-A_W(X)$ 의 분포함수는 $1 - F_A(-x)$ 이고 우변 $B_W(-X)$ 의 분포함수는 정의한 $T[\cdot]$ 를 사용하여 $T[F_B(x)]$ 가 된다. 결국, 식(3)과 같은 확률적 관계식을 얻을 수 있다.

Q.E.D

이때, 확률적 변환 함수 $T[\cdot]$ 는 다음의 예제를 통

하여 쉽게 이해될 수 있다. 예를 들어, $F_B(x) = F_X(x)^N$ 일 경우,

$$\begin{aligned} T[F_B(x)] &= [F_X(x)]^N \\ &= [\Pr(-X \leq x)]^N \\ &= [1 - \Pr(X < -x)]^N \\ &= [1 - F_X(-x)]^N \end{aligned}$$

여기에서 4번째 등식은 연속정상과정, X 의 경우 $\Pr(X=x)=0$ 이므로 $\Pr(X \leq x) = \Pr(X < x)$ 에 의해 성립된다. 결국, 이와 같은 성질에 의하여 쌍대적 관계에 해당하는 연산자들의 통계적 분석은 상대편 연산자의 통계적 성질을 이용하여 매우 쉽게 유도할 수 있다.

III. 연속정상 신호원에 대한 출력 분포함수

입력 신호원 X 가 II절에서 언급된 연속정상과정이라면 각 형태론적 여파기의 출력 분포함수들은 Theorem 1을 이용하여 집합론과 확률법칙^[9]을 토대로 다음과 같이 유도될 수 있다.

1. 불림과 녹임

Theorem 2.

X 가 형태소, W 에 의하여 불림 및 녹임된 신호의 분포함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\ F_E(x) &= 1 - \int_x^{\infty} \cdots \int_x^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \end{aligned} \quad (4)$$

Proof)

식(1)과 확률법칙에 의하여 불림의 출력 분포함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \Pr\{\max(x_{i,j} : j \in W) \leq x\} \\ &= \Pr(x_1 \leq x, x_2 \leq x, \dots, x_N \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \end{aligned}$$

또한, 녹임의 출력 분포함수는 Theorem 1을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_E(x) &= 1 - T[F_B(-x)] \\ &= 1 - T\left[\int_{-\infty}^{-x} \cdots \int_{-\infty}^{-x} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N\right] \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{-x} \cdots \int_{-\infty}^{-x} f(-x_1, -x_2, \dots, -x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\ &= 1 - \int_x^{\infty} \cdots \int_x^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \end{aligned}$$

여기에서 4번째 등식은 $-x_i = x_i'$ 로 치환함으로써 얻을 수 있다. Q.E.D

2. 불임과 열림

불임과 열림은 각각 불림과 녹임의 조합형태이므로 그들의 출력 분포함수는 불림과 녹임의 출력 분포함수 형태로 구할 수 있다. 이러한 불임과 열림의 출력 분포함수를 유도하기 위해서는 다음과 같은 성질이 필요하게 된다.

Property 2.

M 개의 연속적인 사건, B_i 들의 결합사건(joint event)을 다음과 같이 $B_i^M = (B_i, B_{i+1}, \dots, B_{i+M-1})$ 이라 하고 $1 \leq K \leq 2M+1$ 에 대하여 B_{i+1}^M 부터 B_{i+K}^M 까지 연속적인 사건들의 합과 B_i^M 의 결합사건 $J^K(B_i^M) = (B_i^M, (B_{i+1}^M + B_{i+2}^M + \dots + B_{i+K}^M))$ 라 하면 $J^K(B_i^M)$ 은 K 에 따라 다음과 같이 표현된다.

for $1 \leq K \leq M$

$$J^K(B_i^M) = B_i^{M+1}$$

for $M+1 \leq K \leq 2M+1$

(5)

$$J^K(B_i^M) = (B_i^{M+1} + (B_{i+M+1}^M + B_{i+M+2}^M + \dots + B_{i+K}^M))$$

Proof)

$1 \leq j \leq M$ 인 경우, B_i^M, B_{i+j}^M 의 결합사건은 다음과 같이 연속적인 사건들로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (B_i^M, B_{i+j}^M) &= (B_i, B_{i+1}, \dots, B_{i+M-1}, \dots, B_{i+M-1+j}) \\ &= (B_i^M, B_{(i+M)}, \dots, B_{(i+M+1+j)}) \end{aligned}$$

그러나 $j > M$ 인 경우, B_i^M, B_{i+j}^M 의 두 사건들은 서로 분리되어 있으므로 위와 같이 표현할 수 없다. 이러한 성질에 의하여 $1 \leq K \leq M$ 일 경우 $J^K(B_i^M)$ 내의 결합사건들은 다음과 같이 모두 연속적인 사건들로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} J^K(B_i^M) &= (B_i^M, B_{i+M}) + (B_i^M, B_{i+M}, B_{i+M+1}) + \dots \\ &\quad + (B_i^M, B_{i+M}, \dots, B_{i+M-1+K}) \\ &= (B_i^M, B_{i+M}) \\ &= B_i^{M+1} \end{aligned}$$

여기에서 2번째 등식은 각 사건들, A, B, C, ...에 대하여 $A + (A, B) + (A, B, C) + \dots = A$ 가 되는 성질을 이용하여 얻을 수 있다. 그러나 $M+1 \leq K \leq 2M+1$ 경우에는 다음과 같이 연속적인 사건들로 이루어져 있는 부분과 분리되어 있는 부분으로 나뉘어진다.

$$\begin{aligned}
 J^k(B_i^M) &= (B_i^M, (B_{i+1}^M + B_{i+2}^M + \dots + B_{i+M}^M)) \\
 &\quad + (B_i^M, (B_{i+M+1}^M + B_{i+M+2}^M + \dots + B_{i+k}^M)) \\
 &= (B_i^{M+1} + (B_i^M, (B_{i+M+1}^M + B_{i+M+2}^M + \dots + B_{i+k}^M)))
 \end{aligned}$$

Q.E.D

Theorem 3.

X 가 형태소 W 에 의하여 불임 및 열림된 신호의 분포함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_{C_i}(x) &= NF_{D_i}(x) - (N-1)F_{D_{i+1}}(x) \\
 F_{O_i}(x) &= NF_E(x) - (N-1)F_{E_{i+1}}(x)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

여기에서 $F_{D_i}(x)$, $F_{E_{i+k}}(x)$ 는 각각 크기가 $(N+k)$ 인 형태소로 불림/녹임한 출력 분포함수이다.

Proof)

$B_i = (x_i > x)$ 라 할때, $(e_i > x) = (x_i > x, x_{i+1} > x, \dots, x_{i+N-1} > x) = B_i^N$ 로 표현할 수 있다. 이것을 이용하여 식(1)의 정의에 따라 열림의 출력 분포함수는 다음과 같이 유도 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_{O_i}(x) &= \Pr(o_i \leq x) \\
 &= \Pr(\max\{e_{i-j} : j \in W\} \leq x) \\
 &= \sum_{j=1}^N \Pr(e_j \leq x) \\
 &\quad \cdot \sum_{i=1}^N \{1 - \Pr(e_i > x, (e_{i+1} > x + \dots + e_N > x))\} U(N-2) \\
 &= \sum_{i=1}^N \Pr(e_i \leq x) - \sum_{i=1}^N \{1 - \Pr(U^N(B_i^N))\} U(N-2) \\
 &= NF_E(x) - (N-1)(1 - F_{E_{i+1}}(x))
 \end{aligned}$$

여기에서 $U(n)$ 은 단위 계단함수를 나타내며 3번째 등식은 결합사건에 대한 확률법칙에 의하여 성립된다. 또한, 4번째 등식은 $J^k(B_i^M)$ 의 정의에 따라 표현된 것이며 5번째 등식은 $N \geq 2, 1 \leq i \leq N-1$ 에 대하여 항상 $N-i \leq N$ 이기 때문에 Property 2에 의해 $J^N(B_i^N) = B_i^{N+1}$ 이 되므로 성립된다. 그리고 불임의 출력 분포함수는 Theorem 1에 의하여 식(6)과 같이 얻을 수 있다.

Q.E.D

3. 불임-열림과 열림-불임

Theorem 4.

X 가 형태소 W 에 의하여 불임-열림 및 열림-불임된 신호의 분포함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_{CO}(x) &= F_C(x) + \sum_{k=1}^{N-1} k [P_{0,k,0}(x) - P_{1,k,0}(x)] U(N-2) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) [P_{1,k,1}(x) - P_{0,k,1}(x)] U(N-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{OC}(x) &= F_O(x) - \sum_{k=1}^{N-1} k [P_{0,k,0}(x) - P_{1,k,0}(x)] U(N-2) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{N-2} (k+1) [P_{1,k,1}(x) - P_{0,k,1}(x)] U(N-3)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

여기에서 $X_i = (x_i \leq x)$ 이라 할때,

$$\begin{aligned}
 P_{0,k}(x) &\triangleq \Pr(X_1^{N+0}, X_N^{N+k}) \\
 &= \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x f(x_1, x_2, \dots, x_{2N+k+b}) \\
 &\quad dx_1 \dots dx_{N+0} dx_{N+0+1} \dots dx_{N+k} dx_{N+k+1} \dots dx_{2N+k+b} \\
 P_{1,k}(x) &\triangleq \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x f(x_1, x_2, \dots, x_{2N+k+b}) \\
 &\quad dx_1 \dots dx_{N+0} dx_{N+0+1} \dots dx_{N+k} dx_{N+k+1} \dots dx_{2N+k+b}
 \end{aligned}$$

로 정의한다.

Proof)

$D_i = (d_i > x)$ 라 할때, $(e_i > x) = (d_i > x, d_{i+1} > x, \dots, d_{i-2N-2} > x) = D_i^{2N-1}$ 로 표현할 수 있다. 이것을 이용하여 불임-열림의 출력 분포함수는 식(1)의 정의에 따라 열림의 경우와 유사하게 다음과 같이 유도 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_{D_i}(x) &= \Pr(D_i \leq x) \\
 &= \Pr(e_i > x, e_{i+1} > x, \dots, e_{i+N} > x) \\
 &= \sum_{i=1}^N [1 - \Pr(e_i > x)] - \sum_{i=1}^N [1 - \Pr(U^{2N-1}(D_i^{2N-1}))] U(N-2) \\
 &= 1 - NP(D_i^{2N-1}) + (N-1)\Pr(D_i^{2N-1})
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

여기에서 3번째 등식은 $1 \leq i \leq N-1$ 에 대하여 항상 $N-i \leq 2N-1$ 이므로 Property 2를 이용한 결과이다. 또한, $X_i = (x_i \leq x)$ 라 할때, $(d_i \leq x) = (x_i \leq x, x_{i+1} \leq x, \dots, x_{i+N-1} \leq x) = X_i^N$ 로 표현할 수 있으며, 위와 유사한 방법으로 $\Pr(D_i^N)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \Pr(D_i^N) &= \Pr(d_1 > x, d_2 > x, \dots, d_K > x) \\
 &= 1 - KF_D(x) + R_K U(K-2)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

이때, K 는 식(8)에 따라 $2N$ 또는 $2N-1$ 이며 $R_K = \sum_{s=1}^{K-1} \Pr(U^{K-1}(X_s^N))$ 을 의미한다. 여기에서 $s(n) = (X_1^N, X_2^N, \dots, X_{N-s}^N, X_{N-s+1}^N, \dots, X_N^N)$ 로 정의할때 R_K 는 K 의 값에 따라 Property 2에 의하여 다음과 같이 두 부분으로 나뉘어진다.

$$\begin{aligned}
 R_K &= \sum_{s=K}^{N-1} \Pr(X_s^{N-1}) U(K-N-1) \\
 &\quad + \sum_{s=1}^{K-1} \Pr(X_s^{N+1} + (X_s^N, s(1))) U(K-N-2) \\
 &= NF_{D+1}(x) U(K-N-1) + (K-N-1)F_{D+1}(x) U(K-N-2) \\
 &\quad + \sum_{s=0}^1 (-1)^s \sum_{i=1}^{K-N-1} \Pr(X_i^{N+s}, s(1)) U(K-N-2)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

여기에서 2번째 등식은 $(X_s^N, X_s^{N+1}) = X_s^{N+1}$ 이라는 성질

과 $\Pr(X_i^{N+1}) = F_{D+1}(x)$ 을 이용한 결과이다. 또한, $a=0$ or 1 , $b=0$ or 1 , $k \geq 1$ 일때, 위의 R_k 는 다음과 같은 성질에 의하여 보다 일반적인 형태로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \Pr(X_i^{N+a}, s(1)) \\ &= \Pr\{(X_i^{N+a}, X_{i+N+1}^N) + (X_i^{N+a}, X_{i+N+2}^N) + \dots \\ &\quad - (X_i^{N+a}, X_{i+N+(K-N-1)}^N)\} \\ &= \sum_{k=1}^{K-N-1} \Pr(X_i^{N+a}, X_{i+N+k}^N) U(K-N-i-1) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{K-N-1} \Pr\{(X_i^{N+a}, X_{i+N+k}^N), (X_i^{N+a}, s(k+1))\} U(K-N-i-2) \\ &= \sum_{k=1}^{K-N-1} P_{a,k,b}(x) U(K-N-i-1) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{K-N-1} \Pr(X_i^{N+a}, X_{i+N+k}^N) U(K-N-i-2) \\ &= \sum_{b=0}^1 (-1)^b \sum_{k=1}^{K-N-i-b} P_{a,k,b}(x) U(K-N-i-b-1) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{K-N-1} \sum_{k=1}^{K-N-i-1} P_{a,k,b}(x) U(K-N-b-i-1) \\ &= \sum_{k=1}^{K-N-1} (K-N-b-k) P_{a,k,b}(x) U(K-N-b-2) \end{aligned} \tag{12}$$

식(11)의 2번째 등식은 확률법칙과 $s(k+1)$ 의 정의에 의하여 성립된다. 또한, 3번째 등식은 $K=2N$ or $2N-1$ 에 대하여 $i \geq 0, k \geq 1$ 일때 항상 $N \geq K-N-i-k$ 이므로 Property 2에 의하여 $(X_{i+N+k}^N, s(k+1)) = f^{K-N-k-1}(X_{i+N+1}^N) = X_{i+N+k}^N$ 이 됨을 이용한 결과이다. 그러므로 식(11)과 식(12)를 식(10)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_k &= NF_{D+1}(x) U(K-N-1) \\ &\quad + (K-N-1)F_{D-1}(x) U(K-N-2) + Q_k \end{aligned} \tag{13}$$

여기에서

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{k=1}^{K-N-1} (K-N-k) \{P_{0,k,0}(x) - P_{1,k,0}(x)\} U(K-N-2) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K-N-2} (K-N-k-1) \{P_{1,k,1}(x) - P_{1,k,1}(x)\} U(K-N-3) \end{aligned}$$

이다. 결국, 식(13)을 식(8), (9)에 대입한 후 $(N-k)U(N-k) = (N-k)U(N-k-1)$ 와 $\sum_{i=1}^{N-K} (N-K+1-i) U(N-K-1) = \sum_{i=1}^{N-K+1} (N-K+1-i) U(N-K)$ 의 성질을 이용한 약간의 수식적 조작으로써 식(7)의 불임-열림의 분포함수를 얻을 수 있다. 또한, 열림-불임 분포함수는 $\pi[P_{a,k,b}(x)] = P_{a,k,b}(-x)$ 와 Theorem 1에 의하여 얻을 수 있다. Q.E.D

IV. 1차 Gauss-Markov 신호원에 대한 통계적 분석

III장에서 출력 분포함수들은 입력 신호원이 iid성질

을 갖지않기 때문에 닫혀진 형태로 얻을 수 없다. 따라서 본 절에서는 연속정상과정인 1차 Gauss-Markov 신호원에 대하여 각 형태론적 여파기들의 통계적 분석을 하였다.

일반적으로 실제 영상신호는 인접 화소와 상관성이 매우 높기 때문에 디지털 신호처리에서 상관계수가 높은 Markov 과정으로 표현된다. 이러한 Markov 과정은 현재가 주어졌을때 그 미래가 과거의 과정에 독립인 것을 말한다. 즉, N개의 연속적인 랜덤변수 x_i 에 대한 N차 결합밀도함수가 다음과 같은 이산 랜덤과정, x 를 1차 Markov 과정이라 한다¹⁹.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1) \prod_{i=2}^N f(x_i | x_{i-1})$$

이때, 각 랜덤 변수가 Gaussian 분포를 갖는다면 입력 신호원, x 의 N차 결합밀도함수는 평균, (m_1, m_2, \dots, m_N) 점에서 대칭이다(이때, x 가 연속정상과정이므로 $m_i = m_1$). 이와 같은 성질을 이용하여 각 형태론적 여파기들의 통계적 특성 및 그들의 관계는 다음과 같이 분석될 수 있다.

Theorem 5.

불림된 신호와 녹임된 신호의 출력 분포함수 및 밀도함수는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} f_{i,b}(m_N - x) &= f_k(m_N - x) \\ F_{i,b}(m_N + x) &= 1 - F_k(m_N - x) \end{aligned} \tag{14}$$

Proof)

불림의 출력 밀도함수는 Theorem 2 및 밀도함수의 정의에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) |_{x_N = x} dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_N$$

여기에서 $\overline{dx}_k = dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_N$ 이라 할때 $m_N + x$ 에서 불림의 밀도함수는 위식을 이용하여 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} f_i(m_N + x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) |_{x_N = m_N + x} \overline{dx}_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(m_N - x_1, m_N - x_2, \dots, m_N - x_N) |_{x_N = x} \overline{dx}_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) |_{x_N = m_N - x} \overline{dx}_k \\ &= f_k(m_N - x) \end{aligned}$$

여기에서 2번째 등식은 x 의 N차 결합밀도함수가 대칭이라는 성질과 $x_N = m_N - x$ 으로 치환한 결과이고 3번째 등식은 $m_N - x_N = x$ 으로 치환하여 얻을 수 있다. 이와 유사한 방법으로 $m_N + x$ 에서 불림의 분포함수는 다

음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} F_D(m_X+x) &= \int_{-\infty}^{m_X+x} f_D(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x f_E(m_X-y) dy \\ &= \int_{m_X-x}^{\infty} f_E(y) dy \\ &= 1 - F_E(m_X-x) \end{aligned}$$

여기에서 2번째 등식은 앞에서 구한 불림과 녹임의 밀도함수가 대칭이라는 성질과 $y - m_X = y'$ 으로 치환한 결과이고 3번째 등식은 $m_X - y = y'$ 으로 치환하여 얻을 수 있다. Q.E.D

Theorem 6.

Theorem 5에 의하여 불림과 녹임의 평균 및 n차 중심 모멘트(nth central moment)는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} 2m_X &= m_D + m_E \\ \mu_{1m} &= (-1)^n \mu_{En} \end{aligned} \tag{15}$$

여기에서 μ_{1m}, μ_{En} 은 각각 불림과 녹임의 n차 중심 모멘트를 의미한다.

Proof)

평균의 정의에 따라 불림된 신호의 평균은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} m_D &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_D(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x + m_X) f_D(m_X+x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x + m_X) f_E(m_X-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2m_X-x) f_E(x) dx \\ &= 2m_X - m_E \end{aligned}$$

여기에서 2, 3번째 등식은 불림과 녹임의 밀도함수가 대칭이라는 성질과 $x - m_X = x'$ 으로 치환한 결과이고 4번째 등식은 $m_X - x = x'$ 으로 치환하여 얻을 수 있다. 이와 유사하게 n차 중심 모멘트는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{1m} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_D)^n f_D(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2m_X - m_D - x)^n f_E(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_E)^n f_E(x) dx \\ &= (-1)^n \mu_{En} \end{aligned}$$

여기에서 2번째 등식은 앞의 경우와 동일한 방법에 의한 것이며 5번째 등식은 앞에서 얻은 $2m_X = m_D + m_E$ 의 성질에 의하여 얻어진다.

Q.E.D

Theorem 7.

Theorem 3에 의하여 Theorem 5, 6의 불림과 녹임의 통계적 관계가 불림과 열림에도 다음과 같이 성립한다.

$$\begin{aligned} F_C(m_X+x) &= 1 - F_C(m_X-x) \\ f_C(m_X+x) &= f_C(m_X-x) \\ 2m_X &= m_C + m_C \\ \mu_{Cn} &= (-1)^n \mu_{Cn} \end{aligned} \tag{16}$$

Proof)

Theorem 3에 의하여 열림된 신호의 분포함수는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} F_C(m_X+x) &= NF_E(m_X+x) - (N-1)F_{E+1}(m_X+x) \\ &= N(1 - F_D(m_X-x)) - (N-1)(1 - F_{D+1}(m_X-x)) \\ &= 1 - F_C(m_X-x) \end{aligned}$$

여기에서 2번째 등식은 Theorem 5에 의하여 성립된다. 그리고 열림과 불림된 신호의 밀도함수는 위의 분포함수 관계를 미분함으로써 얻을 수 있다. 또한, 평균과 n차 중심 모멘트의 관계는 얻어진 불림과 열림의 밀도함수 및 분포함수의 대칭성때문에 Theorem 6과 동일한 방법으로 유도될 수 있다. Q.E.D

Theorem 8.

X가 연속적인 형태소에 의하여 불림, 녹임된 신호의 분포함수와 평균은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} a) \quad & F_{D+1}(x) \leq F_D(x) \leq F_X(x) \leq F_E(x) \leq F_{E+1}(x) \\ & m_{D+1} \geq m_D \geq m_X \geq m_E \geq m_{E+1} \\ b) \quad & 2F_D(x) \leq F_{D-1}(x) + F_{D+1}(x) \quad 2F_E(x) \geq F_{E-1}(x) + F_{E+1}(x) \\ & 2m_{D+1} \geq m_{D-1} + m_{D+1} \quad 2m_{E+1} \leq m_{E-1} + m_{E+1} \end{aligned} \tag{17}$$

Proof)

크기가 N+1인 형태소를 w_{N+1} 이라 할때, w_{N+1} 로 불림된 신호의 분포함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_{D+1}(x) &= \Pr(\max(x_{i-j}; j \in W_{N+1}) \leq x) \\ &= \Pr(x_1 \leq x, x_2 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x) \\ &\leq \Pr(x_1 \leq x) \text{ or } \Pr(x_2 \leq x, x_3 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x) \\ &\leq F_X(x) \text{ or } F_D(x) \end{aligned}$$

여기에서 3번째 부등식은 사건 A, B에 대하여 $\Pr(A, B) \leq \Pr(A)$ 가 되는 성질에 의해 성립된다. 이와 유사한 방법으로 $F_D(x) \leq F_X(x)$ 를 얻을 수 있으며 $F_X(x) \leq F_E(x) \leq F_{E+1}(x)$ 의 관계도 얻을 수 있다. 또한, 크기가 N인 형태소에 의하여 불림된 신호의 출력 분포

함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_D(x) &= \Pr(x_1 \leq x, x_2 \leq x, \dots, x_N \leq x) \\
 &= \Pr(x_1 \leq x) + \Pr(x_2 \leq x, x_3 \leq x, \dots, x_N \leq x) \\
 &\quad - \Pr[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, x_3 \leq x, \dots, x_N \leq x)] \\
 &= F_N(x) + F_{D-1}(x) - \Pr[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, x_3 \leq x, \dots, x_N \leq x)]
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

그러므로 식(17)의 b)는 다음과 같이 증명된다.

$$\begin{aligned}
 2F_D(x) - F_{D-1}(x) - F_{D+1}(x) &= (F_D(x) - F_{D-1}(x)) - (F_{D+1}(x) - F_D(x)) \\
 &= \Pr[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, x_3 \leq x, \dots, x_N \leq x)] \\
 &\quad - \Pr[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, x_3 \leq x, \dots, x_N \leq x)] \leq 0
 \end{aligned}$$

여기에서 마지막 부등식은 $\Pr(A, B) \leq \Pr(A)$ 의 성질에 의하여 얻어지며 이와 유사한 방법에 의하여 녹임에 대한 관계식도 구할 수 있다. 그리고 출력 분포함수들이 그림 1과 같다고 가정하면 평균에서 분포함수의 값은 1/2이므로 평균에 대한 관계가 식(17)과 같이 성립함을 알 수 있다

Theorem 9.

Theorem 8과 같은 관계가 불임과 열림에도 성립되며 결과적으로 불림, 녹임, 불임, 열림의 출력 분포함수 및 평균의 관계가 다음과 같이 성립한다.

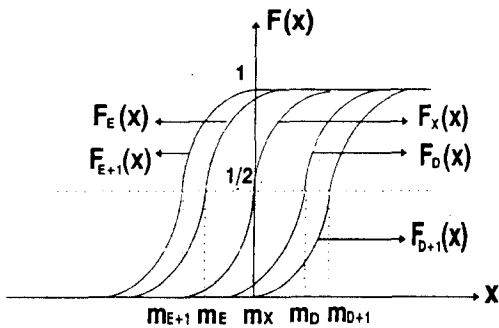


그림 1. 분포함수와 평균의 관계
Fig. 1. Relations of distribution function and mean.

$$\begin{aligned}
 F_{C+1}(x) \leq F_C(x) \leq F_N(x) \leq F_D(x) \leq F_{D+1}(x) \\
 m_{C+1} \geq m_C \geq m_x \geq m_D \geq m_{D+1} \\
 F_D(x) \leq F_C(x) \leq F_N(x) \leq F_D(x) \leq F_E(x) \\
 m_D \geq m_C \geq m_x \geq m_D \geq m_E
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Proof)

크기가 N+1인 형태소, w_{N+1} 로 불림된 신호의 분포

함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_{D+1}(x) &= (N+1)F_N(x) - \sum_{i=1}^N \Pr[x_i \leq x + (x_{i-1} \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)] \\
 &\leq (N+1)F_N(x) - NPM[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)]
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

여기에서 부등식은 $\Pr(A, B) \leq \Pr(A)$ 의 성질때문에 $2 \leq i \leq N$ 인 경우 $\Pr[x_i \leq x + (x_2 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)] \leq \Pr[x_i \leq x + (x_{i+1} \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)]$ 의 관계에 의하여 성립된다. 또한, 식(18)에서 $F_D(x) - F_{D+1}(x) = \Pr[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)] - F_N(x)$ 와 Theorem 3에 의하여 불임의 출력 분포함수와 입력신호의 분포함수 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_C(x) &= N(F_D(x) - F_{D+1}(x)) + F_{D+1}(x) \\
 &= N \Pr[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)] - F_N(x) \\
 &\quad + (N+1)F_N(x) - \sum_{i=1}^N \Pr[x_i \leq x + (x_{i+1} \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)] \\
 &\leq F_N(x)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

여기에서 부등식은 식(20)의 $\sum_{i=1}^N \Pr[x_i \leq x + (x_{i+1} \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)] \geq NPM[x_1 \leq x + (x_2 \leq x, \dots, x_{N+1} \leq x)]$ 에 의하여 성립된다. 그리고 w_N, w_{N+1} 로 각각 불임된 신호의 출력 분포함수 관계와 불림과 불임된 신호의 출력 분포함수의 관계는 Theorem 3, 8에 의하여 다음과 같이 쉽게 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_{C+1}(x) - F_C(x) &= N(2F_{D+1}(x) - F_{D+2}(x) - F_D(x)) \leq 0 \\
 F_C(x) - F_D(x) &= (N-1)(F_D(x) - F_{D+1}(x)) \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

결국 식(21), (22)에 의하여 식(19)와 같은 불림과 불임의 출력 분포함수 관계가 얻어진다. 녹임과 열림의 출력 분포함수 관계도 이와 유사한 방법으로 구할 수 있다. 또한, Theorem 8에서 나타낸 그림 1의 평균과 분포함수의 관계에 의하여 각 여파기들의 출력 평균들은 식(19)의 관계가 성립함을 알 수 있다.

Q.E.D

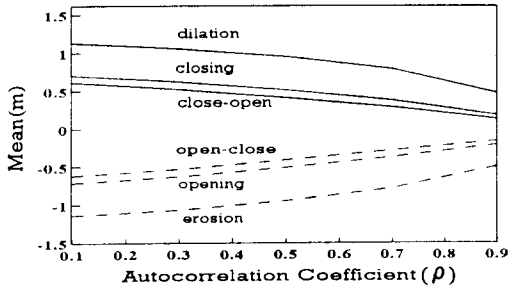
V. 실험 및 결과

본 절에서는 III, IV절에서 분석된 통계적 성질을 확인하기 위하여 실제로 발생한 1차 Gauss-Markov 신호의 출력 통계특성(평균, 분산 및 Skew)들을 나타내었다. 이때, 형태소의 크기는 N=4, 5로 계산하였다.

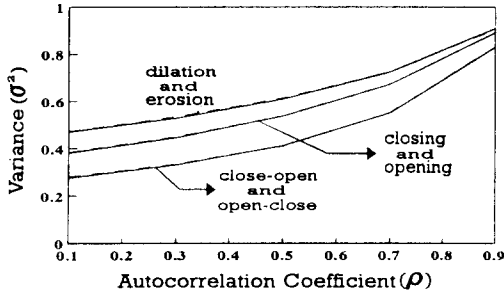
입력 신호원, x_i 가 분산이 1이고 평균이 0인 1차 Gauss-Markov 과정일 경우 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$x_i = z_i + \rho x_{i-1}$$

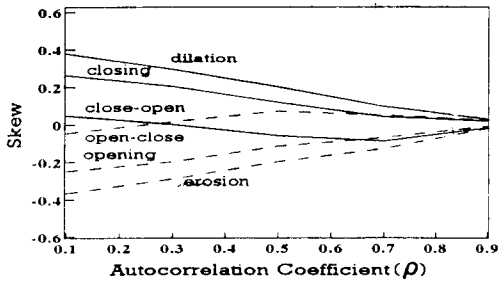
여기에서 ρ 는 상관계수이고 z_i 는 innovation으로 백색잡음과정(white-noise process)이다. 그리고 z_i 는 과거입력에 대하여 독립이다(즉, $E(z_i x_{i-k}) = 0$, 단 $k > 0$)¹⁹ 그림 2, 3은 각 형태론적 여파기들에 대하여 얻은 출력 평균, 분산 및 Skew를 상관계수에 따라 그래프로 도시하였다.



(a)



(b)



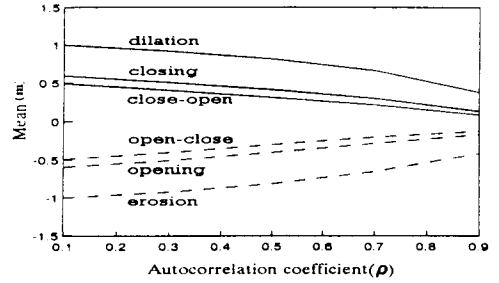
(c)

그림 2. 1차 Gauss Markov 신호원에 대한 출력 통계특성 (N=4)

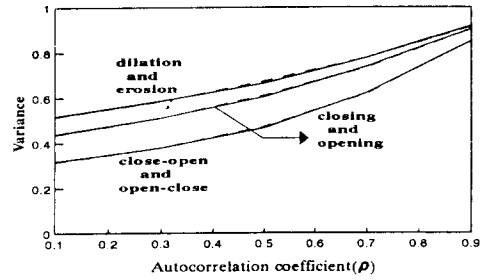
- (a) 출력 평균
- (b) 출력 분산
- (c) 출력 Skew

Fig. 2. Output statistics for 1st order Gauss Markov source(N=4).

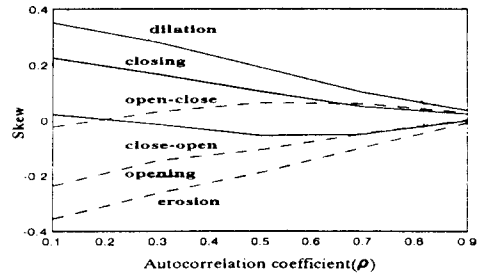
- (a) Output mean
- (b) Output variance
- (c) Output Skew



(a)



(b)



(c)

그림 3. 1차 Gauss Markov 신호원에 대한 출력 통계특성 (N=5)

- (a) 출력 평균
- (b) 출력 분산
- (c) 출력 Skew

Fig. 3. Output statistics for 1st order Gauss Markov source(N=5).

- (a) Output mean
- (b) Output variance
- (c) Output Skew

먼저, 각 쌍대적 관계의 연산자들에 의한 통계적 특성들이 서로 대칭(평균, Skew) 또는 같음(분산)을 볼 수 있어 IV장에서 분석된 Theorem 5, 6, 7을 확인할 수 있다.

그리고 Theorem 8, 9를 확인하기 위하여 고정된 상관계수($\rho=0.9$)에 따른 각 여파기들의 출력 평균을 표 1에 나타내었다. 표 1에서 알 수 있듯이 평균 값들

은 기본 여파기일 수록, 형태소의 크기가 클 수록 커짐을 알 수 있으며 평균과 분포함수의 관계때문에 각 여파기들의 출력 분포함수들 역시 Theorem 8, 9의 관계가 성립됨을 알 수 있다.

또한, 그림 2, 3에서 나타난 바와 같이 상관계수가 높을 수록 모든 출력 통계 특성들이 입력 신호의 것으로 수렴하므로써 형태론적 여파기가 실제 영상신호의 형태를 잘 보존한다고 할 수 있다.

VI. 결 론

이미 형태론적 여파기들의 성능은 실험 영상을 통하여 많이 평가되어졌으며 최근, iid 신호원에 대한 형태론적 여파기들의 통계적인 연구가 여러가지 방법으로 수행되어지므로써 실험 영상없이 수식에 의하여 성능 평가가 이루어지고 있다.

표 1. 고정된 상관계수 값에 대한 형태론적 여파기들의 평균

Table 1. Means of morphological filters for fixed correlation coefficient.

	형태소의 크기, n=4일때 평균	형태소의 크기, n=5일때 평균
불림	0 . 3807	0 . 4651
녹입	-0 . 4137	-0 . 4774
불힘	0 . 1332	0 . 1763
열림	-0 . 1694	-0 . 1896
불힘-열림	0 . 0883	0 . 1256
열림-불힘	-0 . 1251	-0 . 1398

이에 본 연구에서는 실제 영상신호에 대한 형태론적 여파기의 영향을 분석하기 위하여 입력신호를 연속정상과정인 1차 Gauss-Markov 과정으로 모델화하였다. 그리고 쌍대적 관계에 있는 각 형태론적 여파기들의 확률적 관계를 수식화함으로써 이를 이용하여 그들의 출력 분포함수와 통계적 성질들을 분석하였다.

통계적 분석 결과, 쌍대적 관계에 있는 형태론적 여파기들의 출력 분포함수는 점대칭이고 밀도함수가 대칭임을 유도할 수 있었다. 그리고 이러한 성질에 의하여 그들의 출력 평균과 Skew는 대칭이고 분산은 동일함을 분석 할 수 있었다.

1차 Gauss-Markov 신호원에 대한 컴퓨터 모의 실험결과, 분석된 통계적 성질들을 확인할 수 있었으며 상관계수가 클수록 출력 통계특성이 입력신호의 것에 근접함으로써 실제 영상 신호에 대한 형태론적 여파기

의 형태 보존성이 우수함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] R. L. Stevenson and G. R. Arce, "Morphological filters : Statistics and further syntactic properties", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-34, pp. 1292-1305, November 1987.
- [2] J. Neejarvi, L. Koskinen, and Y. Neuvo, "Statistical analysis of Median type and Morphological filters", SPIE, Vol. 1818, pp. 366-375, November 1992.
- [3] A. Morales and R. Acharya, "Statistical analysis of Morphological Openings", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 41, No. 10, pp. 3052-3056, October 1993.
- [4] D. Wang, J. Ronsin, and V. Haese-Coat, "Compared performances of Morphological, Median Type and Running Mean Filters", Proc. SPIE VOL.1818 Visual Communication and Image Processing '92., pp. 384-391, 1992.
- [5] Rafael C.Gonzalez, Richard E.Woods, Digital Image Processing, Addison Wesley, 1992.
- [6] Robert M.Haralick and Linda G.Shapiro, Computer and Robot Vision, Addison Wesley, 1992.
- [7] Charles R.Giardina, Edward R.Dougherty, Morphological Methods in Image and Signal Processing, Prentice-Hall, New Jersey, 1988.
- [8] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. I,II, Newyork, Academic press, 1982.
- [9] A. Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", 2nd Ed., McGraw-Hill, 1984.

저 자 소 개

金翰均(準會員) 第31卷 B編 第12號 參照

1995. 현재 현대전자 멀티미디어
연구소



尹楨敏(準會員)

1970년 6월 10일생. 1993년 2월
아주대 전자공학과졸업. 1995년
현재 아주대 전자공학과 석사과정
재학중. 주 관심분야: 영상 신호처
리, 동 영상 압축

羅相臣(正會員) 第31卷 B編 第12號 參照

崔太永(正會員) 第31卷 B編 第12號 參照