응용통계연구 제 8권 2호
1995년 9월 pp. 179-185.

14면 주사위 확률에 대한 역학적 고찰

채 경 철[1], 이 충 석[2]

요 약

14면 주사위의 확률에 관한 논문이 최근 국내외에서 동시에 발표되어 독자들의 관심을 끌고 있다. 이 글에서는, 그동안 발표된 연구결과들을 종합하고 아울러 역학적 해석의 미흡한 부분을 보완한다.

1. 서 론

정육면체 주사위의 각 면이 출현할 확률이 1/6이라함은 누구나 받아들일 것이다. 그러나, 윷놀이에서 윷의 둥근 면(또는 평평한 면)이 출현할 확률은 윷을 던지는 방법과 바닥의 재질에 따라 차이가 있다는 점을 우리는 잘 알고 있다. 예를 들어, 딱딱한 바닥에 윷을 굴리는 (roll) 경우에는 푹신한 바닥에 윷을 던지는 (toss) 경우에 비해서 둥근 면이 위로 출현할 확률이 크다.

경주 안압지에서 출토된 14면 목제 주사위를 소개하고 이의 논리적 확률 및 경험적 확률을 제시한 허명회 교수의 국내논문(1994a)과 우연히 때를 맞추어, 외국에서도 안압지 주사위와 동일한 14면체의 논리적 확률이 발표된 것은 흥미로운 일이다(Powers 1994).

14면 주사위(cuboctahedron)는 정육면체의 8개 꼭지(vertex)부분을 잘라내어 만드는데, 이 때 각 꼭지점을 이루는 세개의 변의 중앙점(midpoint)까지 잘라내면 꼭지를 잘라낸 자리에는 8개의 정삼각형이 생기고 원래의 6개 면에는 정사각형이 남는다. 정육면체의 한변의 길이를 $\sqrt{2}\,r$이라 하면 8개 정삼각형과 6개 정사각형의 변의 길이는 모두 r이 되며, 14면체의 외접구의 반경 역시 r이다. 그리고, 주사위가 구르다가 정지했을 때에 삼각면(사각면)이 위에 출현하면 바닥에 접하는 면 역시 삼각면(사각면)이 된다.

허명회 교수가 제시한 경험적 확률은 주사위를 던지는 (toss) 경우와 굴리는 (roll) 경우의 두 가지가 있다(각각 1994c, 1994a). 나무로 만든 모의 14면 주사위를 1000회 던졌을 때는 삼각면이 343번 출현했고 2000회 굴렸을 때는 삼각면이 481번 출현했는데, 이에 따른 삼각면 확률의 95% 신뢰한계는 다음과 같다.

$$\text{던졌을 때 : } 0.343 \pm 0.0294 \tag{1}$$

$$\text{굴렸을 때 : } 0.2405 \pm 0.0187 \tag{2}$$

1) (305-701) 대전시 유성구 구성동 373-1, 한국과학기술원 경영과학과.
2) (130-012) 서울시 동대문구 청량리동 207-43, 한국과학기술원 경영정보공학과.

허명회 교수의 논리적 확률(1994a)은 (1)식과 일치하는 0.3510인데, 이는 14면 주사위를 외접하는 구의 겉넓이를 (중심으로부터의) 삼각면 투영(projection)부분과 사각면 투영부분으로 나누어서 삼각면 투영부분의 상대적 비율로서 얻은 것이다. (이는 또한 삼각면 투영 중심 입체각의 상대적 비율임.)

반면에 Powers(1994)교수의 논리적 확률은 (2)식과 일치하는 0.2376인데, 이의 근거는 다음과 같다. 삼각면이 출현했을 때 (즉, 삼각면이 바닥에 접했을 때) 주사위의 중심은 바닥으로부터 $\sqrt{2/3}\,r$높이에 있고, 사각면의 경우에는 $\sqrt{1/2}\,r$높이에 있다. 그리고, 모서리(edge : 삼각면 또는 사각면의 변)를 축(또는 경첩)으로 하여 삼각면에서 사각면으로 (또는 반대로) 회전하는 과정에서의 중심의 최고 위치는 $\sqrt{3/4}\,r$이다. (주사위의 질량을 m으로, 중력가속도를 g로 표시한다.) 따라서, 삼각면이 바닥에 접했을 때의 운동에너지가 $(\sqrt{3/4}-\sqrt{2/3})mgr$미만이면 더 이상 구르지 못하고, 사각면일 때는 $(\sqrt{3/4}-\sqrt{1/2})mgr$미만이면 더 이상 구르지 못한다. 여기에서 운동에너지가 균일분포를 따른다는 가정을 하여 $(\sqrt{3/4}-\sqrt{2/3})$과 $(\sqrt{3/4}-\sqrt{1/2})$의 비율을 삼각면과 사각면 확률의 비율로 제시하였다. 그러나 위 가정의 근거제시가 없을 뿐더러 가정 자체가 모호하다는 점을 지적할 수 있다.

이 글에서는 14면 주사위를 굴리는 경우에 대한 논리적 확률을 운동에너지와 위치에너지의 합으로 정의된 역학적 에너지로 설명한다. 역학적 에너지의 감소(비역학적 에너지로의 전환)현상에 대한 적절한 가정을 제시하고, 역학적 에너지의 분포에 대한 가정에서는 균일분포 대신 임의의 분포를 사용해도 동일한 결과를 얻을 수 있음을 보인다. 아울러, 전제 조건을 분명히 하고 필요한 역학적 해석을 충분히 제공함으로써 독자의 이해를 돕는 것이 목적이다.

2. 전제 및 가정

2.1 확률실험

당연한 전제조건은 확률실험(random experiment)이다. 주사위를 굴릴 때의 초기조건이 랜덤(random)해야 하는데 여기에는 주사위가 여러차례 구를 만큼 세게 굴려야 한다는 점이 포함된다. 한 두 번 이내로 구르다가 멈출 정도로 약하게 굴리면 확률에 편의(bias)를 가져올 수 있다. 이는 윷을 높이 던지지 않고 바닥에 살짝 던지는 경우와 유사하다. 주사위가 멈출 때까지 구르는 횟수를 N이라 하자. 주사위를 굴리지 (roll) 않고 던지는 (toss) 경우에도 나름대로 확률실험이 가능하겠지만, 주사위를 굴리는 확률실험에서는 N이 큰 값을 갖는 경향이 있고 주사위를 던지는 확률실험에서는 N이 작은 값을 갖는 경향이 있는데, 이러한 차이에 의해서 경험적 확률값이 다르게 나왔다고도 볼 수 있다. 즉 주사위를 던지는 경우에는 처음으로 바닥에 접하는 면이 삼각면인지 사각면인지에 따라서 결과가 크게 영향을 받는다.

2.2 에너지에 관한 가정

역학의 기본요소는 힘이지만 우리가 필요한 것은 주사위의 세부적인 운동행태가 아니라 특정 시점들에서의 상태이므로 이러한 특정시점들까지 힘에 의해서 누적된 효과만을 고려하면 되는데 이에 대한 적합한 척도로서 에너지를 사용한다. (예를 들어 운동량도 누적된 효과의 또 다른 척도이지만 주사위 문제에는 도움이 되지 않음.)

주사위의 역학적 에너지는 위치에너지와 운동에너지(회전 운동에너지 포함)의 합인데, 이는 바닥과의 연이은 충돌시의 충격과 마찰등에 의해서 소모되어 최종적으로는 중심의 높이에 준하는 위치에너지만 남는다. 편의상 에너지의 단위를 mgr로 하고, 위치에너지의 기준점을 바닥으로 한다. 그리하면 서론에서 언급했듯이 역학적 에너지가 $\sqrt{3/4}$미만이 되었을 때 더 이상 구르지 않는다. <가정 1>을 먼저 제시하고 이의 근거를 덧 붙인다.

<가정 1> : $\sqrt{3/4}$미만으로 감소하기 직전의 역학적 에너지는 구간이 ($\sqrt{3/4}$, $\sqrt{3/4}+\alpha$)인 균일분포를 따른다.

초기 역학적 에너지, 즉 주사위가 손으로부터 벗어나는 순간의 역학적 에너지를 X라 하고 이의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면, 2.1절의 전제조건에 의해서 $f(x)>0$이 되게 하는 x의 최소값은 주사위가 여러번 구를 만큼 커야 되겠는데, 여기에 우리는 한가지 가정을 추가한다. 그것은 $f(x)>0$이 되게 하는 x값의 범위(이하 X의 범위라 함)가 상당히 크다는 가정이다. 이 가정으로부터 <가정 1>을 도출할 수가 있는데, 우선 이 가정은 확률실험이라는 전제조건에 최소한 어긋나지는 않는다. X의 범위가 크면 X를 상수 α로 나누고 남은 나머지가 점근적으로 구간이 $(0, \alpha)$인 균일분포를 따르는 사실이 알려져 있다(허명회 1994b,c). 이러한 속성은 $f(x)$의 미분가능성등 몇가지 조건이 만족되면 X의 확률분포에 무관하게 성립되는데, X의 범위가 ∞일 때에 정확한 균일분포가 되며 난수발생장치 등에도 활용되고 있다. <가정 1>은 X대신에 $(X-\sqrt{3/4})$를 α로 나누고 남은 나머지의 근사분포를 가정한 것이다.

X가 충분히 큰 경우에 처음에는 주사위가 구르면서 튀기(bouncing)까지 하는데, 이 때는 모서리 뿐만 아니라 꼭지점을 축으로 하여 구르기도 한다. 그러나 역학적 에너지가 감소함에 따라 나중에는 모서리만을 축으로 하여 구르게 되는데 이는 꼭지점으로 구르기 위해서는 더 큰 역학적 에너지가 필요하기 때문이다. (꼭지점으로 구를 때의 중심의 최고 높이는 모서리로 구를 때 보다 큼.) 그러다가 역학적 에너지가 $\sqrt{3/4}$미만으로 내려가면 더 이상 구르지 않고 제자리에서 흔들거리다가 멈추게 된다. 이제 역학적 에너지가 $\sqrt{3/4}$미만으로 내려가는 시점과 이 때에 소모되는 역학적 에너지의 양에 관한 가정을 제시한다.

<가정 2> : 모서리로 구르는 단계에서의 역학적 에너지의 소모는 삼각면 또는 사각면이 바닥에 접할 때에만 발생하며, 이 때에 소모되는 양은 바닥에 접하기 직전의 운동에너지에 비례한다.

<가정 2>의 전반부는 Powers(1994)교수가 암묵적으로 가정한 것이며 <가정 2>의 후반부와 <가정 1>은 Powers교수의 "균일분포를 따르는 운동에너지" 가정을 수정, 보완한 것이다.

공을 굴리는 경우에는 역학적 에너지가 연속적으로 감소한다고 가정하는 것이 타당하겠으나, 주사위가 모서리로 구르는 경우에는, 모서리를 축으로 하여 회전하는 동안에는 상대적으로 역학적 에너지의 소모가 거의 없는 반면에 삼각면 또는 사각면이 바닥에 접하는 불연속적인 시점에서는 상당량의 역학적 에너지 소모가 발생한다는 점이 <가정 2>의 전반부이다. 박물관에서 판매하는 모조품을 실제로 굴려보면, 모서리를 축으로 회전하고 나서 삼각면 또는 사각면이 바닥에 닿는 시점의 상황은 삼각면 또는 사각면이 바닥과 충돌한다고 묘사하는 편이 더 어울릴 정도로서 이 때의 충격에 의하여 진동이 발생하고 또한 약간의 미끄러짐까지 발생한다.

<가정 2>의 후반부에서는 삼각면 또는 사각면이 바닥에 접할 때에 주사위에 가해지는 충격의 양에 대한 척도로서 바닥에 접하기 직전의 운동에너지를 사용하여 이에 비례하는 역학적 에너지의 소모가 발생한다고 가정하였는데, 이는 골프공 같은 공을 높이 h에서 바닥에 떨어뜨릴 때 바닥에 튀어서 오르는 높이를 h'이라 하면 $(h-h')/h$는 근사적으로 일정한 값을 가진다는 점에 근거를 둔 것이다.

3. 14면 주사위의 논리적 확률

주사위가 모서리로 구르는 단계에서의 특징은 삼각면과 사각면이 교대로 출현한다는 점이다. 즉, 삼각면(사각면) 다음에는 반드시 사각면(삼각면)이 출현한다. 따라서, 주사위가 모서리로 구르는 단계에서 어떤 면이 바닥에 접했을 때 그 면이 삼각면일 확률을 $P(\triangle)$, 사각면일 확률을 $P(\Box)$라 하면 확률실험 전제조건에 의하여

$$P(\triangle) = P(\Box) = 1/2 \tag{3}$$

이 된다. 그리고, 삼각면 또는 사각면이 최종적으로 출현할 확률을 각각 $P(\triangle|S)$와 $P(\Box|S)$로 표시하는데, 여기에서 S는 정지(stop)의 약자이다. 베이즈 정리에 의하면

$$P(\triangle|S) = \frac{P(S|\triangle)P(\triangle)}{P(S|\triangle)P(\triangle) + P(S|\Box)P(\Box)} \tag{4}$$

인데, (3)식을 대입하고 나서 필요로 하는 것은 $P(S|\triangle):P(S|\Box)$의 비율이다.

삼각면이 바닥에 접하기 직전의 역학적 에너지가 $(\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}+\delta E(\triangle))$이면 삼각면이 바닥에 접하고 나서 주사위가 더 이상 구르지 않는다고 하고, 사각면의 경우에는 그 범위가 $(\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}+\delta E(\Box))$라고 하자. 즉, <가정 2>에 의하면 $\delta E(\triangle)$와 $\delta E(\Box)$는 각각 삼각면 또는 사각면이 출현했을 때에 최종적으로 소모된 역학적 에너지의 최대치이다. <가정 2>에서의 비례상수를 k라 하면

$$k = \frac{\delta E(\triangle)}{\delta E(\triangle) + (\sqrt{3/4} - \sqrt{2/3})} = \frac{\delta E(\square)}{\delta E(\square) + (\sqrt{3/4} - \sqrt{1/2})}$$

가 되며, 이로 부터

$$\delta E(\triangle) : \delta E(\square) = (\sqrt{3/4} - \sqrt{2/3}) : (\sqrt{3/4} - \sqrt{1/2}) \tag{5}$$

를 얻는다.

이제, <가정 1>에서의 상수 α를 $\delta E(\square)$로 잡음으로써 (부록 참조)

$$P(S|\triangle) : P(S|\square) = \delta E(\triangle)/\delta E(\square) : 1 \tag{6}$$

을 얻는다. (α가 $\delta E(\square)$보다 큰 상수이기만 하면 동일한 결과를 얻음.) 마지막으로, (3),(5),(6)식을 (4)식에 대입하여

$$P(\triangle | S) = \frac{(\sqrt{3/4} - \sqrt{2/3})}{(\sqrt{3/4} - \sqrt{2/3}) + (\sqrt{3/4} - \sqrt{1/2})}$$

를 얻는데 이의 근사치는 0.2376이다.

4. 맺음말

이 글에서는 14면 주사위의 확률에 관한 기존 연구결과를 종합하고 보완하였는데, 특히 주사위를 굴리는 경우의 논리적 확률에 대한 역학적 해석을 공고히 하였다. 그러나 이론적으로는 주사위를 굴리는 (roll) 경우와 던지는 (toss) 경우를 엄격히 구분하였지만, 실제 상황은 이 두가지의 복합형태가 될 것이다. 마지막으로, 이 글에서 제시한 가정으로부터 Powers(1994)교수의 "균일분포를 따르는 운동에너지" 가정이 도출될 수 있는지 여부는 독자의 판단에 맡긴다.

추 기

이 글의 초고에 대한 심사과정에서 Powers(1994)교수의 논문 및 기타 관련연구 결과가 알려지게 되어 이 들을 기정사실화하는 형태로 대폭 수정하였음을 밝힌다.

부 록

역학적 에너지가 불연속적인 소모시점들에서 항상 $\delta E(\square)$씩 감소한다면 <가정 1>은 전혀 무리가 없다. 그러나 실제로는 초기 역학적 에너지 X가 크고 작은 랜덤양 만큼씩 감소하다가

최종적으로 $\sqrt{3/4}$미만으로 내려간다. 현재 알려진 바로는, 연이어 발생하는 역학적 에너지의 감소량들이 서로 독립이라고 할 수 있으면 <가정 1>을 별 무리없이 받아 들일 수 있다(허명회 1994b, 맺음말 참조). 그러나, 역학적 에너지의 감소량들이 서로 독립이라고 단정을 짓지 못하는 경우더라도 최소한 부분적인 근거는 된다고 할 수 있으므로 근거가 전혀 없는 것에 비해서는 나을 것이다.

감사의 글

이 글을 심사해주시고 관련문헌을 알려주신 심사위원과 편집위원께 깊은 감사를 드립니다. 아울러, 소중한 조언을 주신 허명회 교수(고려대학교 통계학과)와 문회태 교수(한국과학기술원 물리학과)께 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

[1] 허명회 (1994a). 14면 주사위의 확률, 「응용통계연구」, 제7권 1호, 113-119.

[2] 허명회 (1994b). 베이즈의 균일분포에 관한 소고, 「응용통계연구」, 제7권 2호, 263-268.

[3] Huh, M. H. (1994c). Essays on probability from billiards and 14-face dice, *Proceedings of the 8th Japan and Korea Joint Conference of Statistics* (October 1994), 225-230.

[4] Powers, D. L. (1994). Probabilities for a cuboctahedral die, *SIAM Review*, Vol. 36, 109-111.

Probabilities and Mechanics of a Cuboctahedral Die

K. C. Chae[3], C. S. Lee[4]

Abstract

We present comprehensive mechanical interpretations for probabilities of a cuboctahedral die.

3) Dept. of Management Science, KAIST, Taejon, 305-701, KOREA.
4) Dept. of Management Information Engineering, KAIST, Seoul, 130-012, KOREA.