응용통계연구 제 8권 1호
1995년 3월 pp. 151-157.

지수분포에 있어서 최우수 처리의 판별을 위한 우도비 검정

황 형 태[1)]

요 약

다수의 지수분포에 있어서 최우수 처리를 판별하는 방법을 가설검정의 형식으로 연구하였다. 최우수 처리의 판별을 위해 적절한 가설을 설정하고, 주어진 유의수준을 만족시키는 우도비 검정 방법을 유도하였으며, 관심영역에서의 최소 검정력을 계산함으로써 실제 표본 설계가 가능하도록 하였다.

1. 소개 및 모형의 설정

여러 모집단 중 최우수 처리를 판별하는 방법은 Bechhofer(1954)에 의해서 선호 영역적 접근방법(Preference-zone approach)이, Gupta(1956)에 의해서 부분 선택적 접근방법(Subset selection approach)이 제시된 이 후 많은 학자들이 여러가지 관점에서 연구하였다. 그 중에서도 Hsu(1984a,1984b)는 다중비교이론(Multiple comparison)의 관점에서 최우수 처리의 선택방법에 대한 독자적인 영역을 개척하였으며, Kim(1988)은 정규모집단의 경우에 회고적 가설 검정(Retrospective hypothesis testing)의 형식으로 이 문제를 연구하였고, Kim과 Hwang(1991)은 정규모집단의 경우에 경험적 베이즈(Empirical Bayes)의 방법에 의한 다중비교를 통하여 최우수 처리의 판별 문제를 다루었다.

본 연구에서는 다수의 지수 모집단 중에서 최우수 처리를 판별함에 있어서, 적절한 가설을 설정하고 이에 대한 우도비 검정(Likelihood Ratio test,LRT)을 구하여 그 성질에 대하여 연구하고자 한다.

평균이 각각 λ_i인 k개의 지수 모집단에 대하여

$$x_{ij} \sim \text{ independently } \varepsilon(1/\lambda_i), \quad j=1,\cdots,n, \ i=1,\cdots,k$$

를 가정하고 $x_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i=1,\cdots,k$ 라고 하면 우도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$L(\boldsymbol{\lambda}: \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{k}\{x_i^{n-1}\exp(-x_i/\lambda_i)/\lambda_i^n \cdot \Gamma(n)\} \tag{1.1}$$

이 때 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 를 순서화하여 $\lambda_{[1]}\le\cdots\le\lambda_{[k]}$ 라고 하자. 관심있는 문제는 과연 $\lambda_{[k]}$ 가 다른 모든 λ_i들 보다 큰 값을 갖는다고 말할 수 있는 가를 판정하는 것이다. 즉,

$$H_0 : \lambda_{[k]}/\lambda_{[k-1]}=1$$
$$H_1 : \lambda_{[k]}/\lambda_{[k-1]}>1 \tag{1.2}$$

1) (140-714) 서울시 용산구 한남동 산 8, 단국대학교 전산통계학과.

와 같이 가설검정의 문제로 표현될 수 있다.

2. 우도비 검정

앞 절에서 제시된 모수 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1 \cdots \lambda_k)$ 의 전체 영역을 Ω, 귀무가설 H_0에 의해서 제한되는 영역을 $\bar{\omega}$로 나타내기로 하면, λ의 최우추정량은 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}=(\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_k)=(x_1/n, \cdots, x_k/n)$ 이므로 다음과 같은 사실이 성립된다.

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\Omega} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) &= L(\hat{\boldsymbol{\lambda}}:\mathbf{x}) \\ &= (n^n e^{-n}/\Gamma(n))^k \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right) \\ &= (n^n e^{-n}/\Gamma(n))^k \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k} x_{(i)}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서, $x_{(1)} \le \cdots \le x_{(k)}$는 순서화된 $x_1, \cdots, x_k$ 를 나타낸다.

이제 우도함수를 $\bar{\omega}=\{\boldsymbol{\lambda}:\lambda_{[k]}=\lambda_{[k-1]}\}$의 영역에서 최대화하기 위해

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta}=\{\boldsymbol{\lambda}:\lambda_\alpha=\lambda_\beta=\lambda_{[k]}=\lambda_{[k-1]}\},\ 1\le\alpha<\beta\le k \tag{2.2}$$

으로 정의하자. 그러면,

$$\bigcup_{\alpha<\beta}\bar{\omega}_{\alpha\beta}=\bar{\omega} \tag{2.3}$$

이라는 사실로부터 다음의 식 (2.4)를 얻을 수 있다.

$$\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) = \operatorname*{Max}_{\alpha<\beta}\ \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}_{\alpha\beta}} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) \ . \tag{2.4}$$

이 때 우도함수의 $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$ 영역에서의 최대값은 다음의 식 (2.5)와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}_{\alpha\beta}} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) \\ &= \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}_{\alpha\beta}} L(\lambda_{(1)},\cdots,\lambda_{(k)}:x_{(1)},\cdots,x_{(k)}) \\ &= L(\lambda^*_{(1)},\cdots,\lambda^*_{(k)}:x_{(1)},\cdots,x_{(k)}) \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

여기서, $\lambda^*_{(i)}=\begin{cases}(x_\alpha+x_\beta)/2n, & \text{만일 } (i)=\alpha \text{ 또는 } \beta \text{ 이면,} \\ \mathrm{Min}\{x_{(i)}/n, (x_\alpha+x_\beta)/2n\}, & \text{만일 } (i)\ne\alpha \text{ 이고 } (i)\ne\beta \text{ 이면,}\end{cases}$

을 뜻한다. 그러므로 우도함수는 $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$ 영역에서 $\{\alpha,\beta\}=\{(k-1),(k)\}$ 일 때 최대화 됨을 알 수 있다. 따라서 다음의 식 (2.6)이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) \\ &= L(x_{(1)}/n,\cdots,x_{(k-2)}/n,(x_{(k-1)}+x_{(k)})/2n,(x_{(k-1)}+x_{(k)})/2n : x_{(1)},\cdots,x_{(k)})\end{aligned} \tag{2.6}$$

식 (2.6)을 식 (1.1)에 대입하여 정리한 후 식 (2.1)을 함께 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) \ / \ \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\lambda}\in\Omega} L(\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{x}) = \{4y/(y+1)^2\}^n \quad , \tag{2.7}$$

여기서, $y = x_{(k)}/x_{(k-1)} \geq 1$.

그런데 식 (2.7)의 우변은 $y \geq 1$에 대하여 감소하므로 가설 (1.2)에 대한 LRT는 상수 $c > 1$에 대하여 $x_{(k)}/x_{(k-1)} \geq c$ 일 때 귀무가설을 기각하게 된다.

3. 유의수준 α의 기각역 결정

감마분포 $\Gamma(n,1)$ 의 pdf와 cdf를 각각 f, F 라고 하자. 이 때 $i=1,\cdots,k$ 에 대하여 x_i의 pdf와 cdf는 각각 $f(x_i/\lambda_i)/\lambda_i$ 와 $F(x_i/\lambda_i)$로 나타낼 수 있으며, 이 분포가 x_i와 λ_i에 대하여 단조 우도비 성질(MLR property)을 갖고 있음은 잘 알려져 있는 사실이다.

2절에서 유도된 LRT의 제1종의 오류를 범할 최대 확률(Maximum Error Probability, MEP라고 하자)을 구하기 위하여, $\boldsymbol{\lambda}\in\bar{\omega}$에 대하여 일반성을 잃지 않고 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{k-1} = \lambda_k$ 라고 가정할 수 있다. 따라서 제1종의 오류를 범할 확률은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\lambda}) &= P_{\boldsymbol{\lambda}}(x_{(k)}/x_{(k-1)} \geq c) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int_0^\infty \prod_{i \neq j}^{k} F\left(\frac{y}{c\lambda_i}\right) \frac{1}{\lambda_j} f\left(\frac{y}{\lambda_j}\right) dy \end{aligned} \tag{3.1}$$

그런데,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1} f\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{\lambda_1^2} f\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)\right) \tag{3.2}$$

가 성립함을 이용하여 식 (3.1)을 λ_1에 대하여 미분하여 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} Q(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=2}^{k} \int_0^\infty \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{k} F\left(\frac{y}{c\lambda_i}\right) \frac{y}{c\lambda_1} \Bigg\{ & \frac{1}{\lambda_j} f\left(\frac{y}{c\lambda_j}\right) \frac{1}{\lambda_1} f\left(\frac{y}{\lambda_1}\right) \\ & - \frac{1}{\lambda_j} f\left(\frac{y}{\lambda_j}\right) \frac{1}{\lambda_1} f\left(\frac{y}{c\lambda_1}\right) \Bigg\} dy \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서, f는 MLR 성질을 갖고 있고 $\lambda_1 \leq \lambda_j$이므로 결과적으로

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} Q(\boldsymbol{\lambda}) \leq 0 \tag{3.4}$$

가 되어 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 λ_1의 감소함수이다. 그러므로 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 λ_1이 0으로 접근함에 따라 최대화되며, 이런 방법을 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-2}$ 에 대하여 순서적으로 적용하면 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ 이고 $\lambda_{k-2} = \cdots = \lambda_1 = 0$ 일 때 최대화됨을 알 수 있다. 여기서 y_1, y_2를 감마분포 $\Gamma(n,1)$ 를 따르는

서로 독립인 확률 변수들이라고 할 때 $f=y_2/y_1$ 이 자유도 $(2n,2n)$ 인 F분포 $F(2n,2n)$ 을 따른다는 사실을 이용하면 다음의 식 (3.5)가 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{MEP} &= \operatorname*{Max}_{\omega} P_{\boldsymbol{\lambda}}(x_{(k)}/x_{(k-1)}\geq c) \\ &= P(y_2/y_1\geq c \text{ 또는 } y_1/y_2\geq c) \\ &= 2P(f\geq c) \end{aligned} \tag{3.5}$$

식 (3.5)로부터 LRT의 유의수준을 α로 하기 위한 상수 c값은 $F(2n,2n;\alpha/2)$, 즉, 자유도 $(2n,2n)$ 인 F분포의 상위 $\alpha/2$ 분위수로 결정된다.

4. 우도비 검정의 검정력 및 표본 설계

이 절에서는 다음과 같은 모수의 관심영역 $\Omega(\delta)$ 에서 LRT의 최소검정력을 구하고자 한다.

$$\Omega(\delta)=\{\boldsymbol{\lambda}\in\Omega : \lambda_{[k]}\geq\delta\lambda_{[k-1]}\},\ \delta>1 \tag{4.1}$$

이 때 일반성을 잃지않고 $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_{k-1}\leq\lambda_k/\delta$ 임을 가정할 수 있으며 $\boldsymbol{\lambda}\in\Omega(\delta)$ 에서의 검정력은 식 (3.1)에서 정의된 $Q(\boldsymbol{\lambda})$임을 알 수 있다.

결론부터 기술하자면, $\boldsymbol{\lambda}\in\Omega(\delta)$ 에서 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{k-1}=\lambda_k/\delta$ 일 때 최소화된다는 것이다. 이 결과는 다음과 같이 수학적 귀납법으로 증명된다.

우선 $\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_{k-1}\leq\lambda_k/\delta$ 인 $\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 를 고정시킨 상태에서 식 (3.4)로 부터 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 λ_1의 감소함수이므로 $\lambda_1=\lambda_2$ 일 때 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 λ_1에 대하여 최소화된다. 다음으로, 만일 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l$ ($=\lambda$ 라고 하자)이라면 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\lambda}) &= l\int_0^\infty \prod_{i=l+1}^{k} F\Big(\frac{y}{c\lambda_i}\Big)\Big(F\Big(\frac{y}{c\lambda}\Big)\Big)^{l-1}\frac{1}{\lambda}f\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)dy \\ &+ \sum_{j=l+1}^{k}\int_0^\infty \prod_{\substack{i=l+1\\ i\neq j}}^{k} F\Big(\frac{y}{c\lambda_i}\Big)\Big(F\Big(\frac{y}{c\lambda}\Big)\Big)^{l}\frac{1}{\lambda_j}f\Big(\frac{y}{\lambda_j}\Big)dy \end{aligned} \tag{4.2}$$

식 (4.2)을 λ에 대하여 미분하여 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}Q(\boldsymbol{\lambda}) &= l\sum_{j=l+1}^{k}\int_0^\infty\Big\{\prod_{\substack{i=l+1\\ i\neq j}}^{k} F\Big(\frac{y}{c\lambda_i}\Big)\Big\}\cdot\Big\{F\Big(\frac{y}{c\lambda}\Big)\Big\}^{l-1}\cdot\frac{y}{c\lambda^2\lambda_j}\cdot \\ &\quad \Big\{f\Big(\frac{y}{c\lambda_j}\Big)f\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)-f\Big(\frac{y}{\lambda_j}\Big)f\Big(\frac{y}{c\lambda}\Big)\Big\}dy \end{aligned} \tag{4.3}$$

그런데 $\lambda\leq\lambda_j(j\geq l+1)$ 이고 f가 MLR성질을 가지므로, 식 (4.3)의 우변은 0이하이고 따라서 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 λ의 감소함수이므로 주어진 $\lambda_{l+1},\cdots,\lambda_k$ 에 대하여 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l=\lambda_{l+1}$ 일 때 $Q(\boldsymbol{\lambda})$는 최소화된다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 위의 결과는 증명되었다.

위의 사실로부터 $\Omega(\delta)$ 영역에서 LRT의 최소 검정력은 다음과 같이 표현된다.

$$\underset{\lambda \in \Omega(\delta)}{\text{Min}}\ Q(\lambda) = \int_0^{\infty} (F(\delta y/c))^{k-1} f(y)dy$$

$$+(k-1)\int_0^{\infty} (F(y/c))^{k-2} F(y/c\delta) f(y)dy \quad . \tag{4.4}$$

다음의 표 4.1은 유의수준 $\alpha=0.01$, $\alpha=0.05$ 와 $\alpha=0.1$ 에서 $k=2,3,4,5$ 이고 $n=10,20,30$이며 $\delta=2.0,3.0,4.0,5.0$인 각각의 경우에 대하여 식 (4.4)에서 주어진 LRT의 최소 검정력을 수치적으로 계산하여 도표화한 것이다(표 4.1의 값을 계산하는데는 IMSL의 부프로그램인'GQRUL'과 'QDAG'가 동시에 이용되었다).

표 4.1을 이용하면 처리의 갯수 k와 설정된 δ값에 대하여 요구되는 최소의 검정력을 얻기 위한 표본크기 n의 값을 구함으로써 이 문제에 대한 표본의 설계에 유용하게 이용될 수 있을 것이다. 예를 들어, $\alpha=0.05$, $k=3$ 이고 $\delta=3.0$ 에서 요구되는 최소의 검정력이 0.88이라면 각 모집단에서 최소 20의 표본크기가 필요함을 알 수 있는 것이다.

참고문헌

[1] Bechhofer, R. E. (1954). A single sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with known variances, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 25, 16-39.

[2] Gupta, S. S. (1956). *On a decision rule for a problem in ranking means,* Ph.D. Thesis (Mimeo. Ser. No. 150), Institute of Statistics, Univ. of North Carolina, Chapel Hill.

[3] Hsu, J. C. (1984a). Constrained simultaneous confidence intervals for multiple comparisons with the best, *Annals of Statistics,* Vol. 12, 1136-1144.

[4] Hsu, J. C. (1984b). *Ranking, selection and multiple comparisons with the best, Design of Experiments : Ranking and Selection,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.

[5] Kim, W. C. (1988). On detecting the best treatment, *Journal of the Korean Statistical Society,* Vol. 17, 82-92.

[6] Kim, W. C. and Hwang, H. T. (1991). Empirical Bayesian multiple comparisons with the best, *Journal of the Korean Statistical Society,* Vol. 20, 108-117.

표 4.1 LRT의 최소 검정력

a) $\alpha=0.01$ 일 때

i) $k=2$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.133	0.411	0.660	0.816
20	0.330	0.798	0.958	0.992
30	0.531	0.949	0.997	1.000

ii) $k=3$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.042	0.246	0.513	0.717
20	0.177	0.689	0.928	0.986
30	0.366	0.913	0.994	1.000

iii) $k=4$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.019	0.172	0.427	0.651
20	0.114	0.618	0.904	0.980
30	0.280	0.885	0.992	0.999

iv) $k=5$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.010	0.130	0.370	0.602
20	0.082	0.566	0.885	0.975
30	0.228	0.861	0.989	0.999

b) $\alpha=0.05$ 일 때

i) $k=2$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.324	0.669	0.857	0.939
20	0.577	0.928	0.991	0.999
30	0.756	0.988	1.000	1.000

ii) $k=3$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.170	0.525	0.775	0.900
20	0.416	0.880	0.983	0.998
30	0.633	0.978	0.999	1.000

iii) $k=4$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.108	0.440	0.719	0.869
20	0.329	0.844	0.976	0.997
30	0.554	0.969	0.999	1.000

iv) $k=5$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.077	0.383	0.676	0.845
20	0.273	0.815	0.971	0.996
30	0.498	0.962	0.998	1.000

c) $\alpha=0.1$ 일 때

i) $k=2$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.450	0.778	0.918	0.969
20	0.702	0.963	0.996	1.000
30	0.849	0.995	1.000	1.000

ii) $k=3$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.283	0.664	0.866	0.947
20	0.563	0.937	0.993	0.999
30	0.760	0.991	1.000	1.000

iii) $k=4$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.203	0.591	0.828	0.930
20	0.479	0.916	0.990	0.999
30	0.699	0.987	1.000	1.000

iv) $k=5$ 인 경우

n \ δ	2.0	3.0	4.0	5.0
10	0.158	0.539	0.798	0.916
20	0.422	0.898	0.988	0.999
30	0.652	0.984	1.000	1.000

The Likelihood Ratio Test for Detecting the Best Treatment among Several Exponential Populations

Hyung T. Hwang[1)]

Abstract

The method for detecting the best treatment is considered by means of hypothesis testing in the exponential case. The likelihood ratio test for a given hypothesis is derived to control the error probability, and the minimum powers in the interested regions are calculated to design the sampling plan.

1) Department of Computer Science and Statistics, Dankook University, Seoul, 140-714, KOREA.