

과위(>2)분산함수를 가진 자연지수계열군에 속하는 분포들의 백분위수¹⁾

서 의 훈²⁾

요 약

과위(>2)분산함수를 가진 자연지수계열군에 속하는 분포들의 확률밀도함수는 무한 급수로 표현되기 때문에 분포들의 유용성에도 불구하고 취급하기가 매우 힘들다. 따라서 이 논문에서는 분포들에 대한 백분위수들의 표를 제시하고자 하였다. 확률밀도함수의 형태때문에 계산하기 곤란했던 몇가지 백분위수들이 위 분포들이 가지는 확률적 성질들에 기인하여 구해지는 근사백분위수에 의해 상당히 잘 대체될 수 있음을 보여 주었다.

1. 서 론

확률변수 X 가 1차 선형지수계열(linear exponential family of order 1), $F = \{F(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}$ 에 속하는 분포를 가진다고 하자. 그러면 F 에 속하는 분포들의 확률밀도함수는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(x; \theta) = dF(x; \theta) / dv(x) = h(x) \exp \{-x\theta + c(\theta)\}, \theta \in \Theta$$

여기서 v 는 $R = (-\infty, \infty)$ 의 Borel sets에서 정의된 σ -finite measure이다. [이후 F 를 Morris (1982)의 용어인 자연지수계열(natural exponential family)이라 부르겠으며 이를 간단히 $\neq F$ 로 나타내겠다.]

$\theta \in \Theta_0 = \text{int}\Theta$ 에 대해, X 의 평균과 분산은 각각 $\mu = dc(\theta)/d\theta$ 와 $\sigma^2 = -d^2c(\theta)/d\theta^2$ 이 된다. X 의 분산을 μ 의 함수로 나타낸 것을 $V(\mu)$ 라 놓고 $\Omega = \mu(\Theta_0)$ 라 하면 $[V(\mu), \Omega]$ 를 F 의 분산함수(variance function, 간단히 VF 라 하자)라고 부른다. Morris (1982)는 $\neq F$ 들의 class내에서 VF 가 유일한 $\neq F$ 를 결정짓는다는 사실을 밝혔다.

$\neq F$ 의 $V(\mu)$ 가 어떤 상수값 $\alpha > 0$ 와 γ 에 대해, $\alpha\mu^\gamma$ 의 형태로 표현되면 이런 $\neq F$ 는 멱분산함수(power variance function, 간단히 PVF 라 하자.)를 가진다고 한다. 이때 α 와 γ 를 각각 scale모수와 멱(power)모수라고 부른다. $\neq F - PVF$ 들의 class는 여러 통계학자들에 의해 다양하게 소개되었다. Tweedie (1984)와 Jorgensen (1987)은 일반화된 선형모형에 관한 연구에서 정규분포가 아닌 오차분포에 관심을 가졌는데 이때 $\neq F - PVF$ 들을 연구하였다. Bar-Lev와 Enis (1986)은 reproducible $\neq F$ 들의 class에 관해 연구했는데 이 class가 $\neq F - PVF$ 들의 class와 동일하다는 것을 보였다. ($\neq F F = \{F(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}$ 에서 양의 정수 n 에 대해,

1) 이 논문은 1991년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 자유공모(지방대학육성)과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

2) (660-701) 경남 진주시 가좌동 900번지 경상대학교 통계학과.

X_1, \dots, X_n 이 F 에 속하는 공통분포를 가지는 *i.i.d.* 변수들일 때 $\alpha(n) = \sum_{i=1}^n X_i$ 의 분포가 F 에 속하게 되는 0이 아닌 상수 $\alpha(n)$ 이 존재하면 이런 $\neq F$ 를 reproducible하다고 한다.)

$\neq F$ -PVF들의 class는 아주 방대하다. 이는 모든 실수 $\gamma \in \{0\} \cup [1, \infty)$ 에 따른 한 $\neq F$ 가 존재하기 때문이다. $\gamma = 0, 1, 2$ 인 $\neq F$ -PVF들은 각각 정규분포, 포아송-type 분포, 감마분포들의 계열이다. $\gamma \in (1, 2)$ 인 $\neq F$ -PVF들의 class는 감마변량들에 의해 생성되는 compound Poisson분포들의 계열들이고, $\gamma \in (2, \infty)$ 인 $\neq F$ -PVF들의 class(\mathcal{P} 라 하자.)는 구간 $(0, 1)$ 내의 stable지수를 가진 positive stable분포들에 의해 생성되는 $\neq F$ 들로 구성된다. \mathcal{P} 의 특수한 경우는 inverse-Gaussian($\gamma = 3$) 분포계열, modified Bessel-type($\gamma = 2.5$) 분포계열과 Whittaker type ($\gamma = 4$) 분포들의 계열이다.

S 의 모든 분포들은 unimodal이고 $R^+ = (0, \infty)$ 에서 Lebesgue measure에 관해 절대적으로 연속이다. Hougaard (1986)은 \mathcal{P} 에 속한 분포들이 모집단들에 대한 life table들에서 생존분포로 적용시키기에 타당한 분포들임을 밝혔다.

Bar-Lev와 Enis는 \mathcal{P} 에 속한 분포들의 확률밀도함수를 제시하였다. 그러나 $\gamma=3$ 인 inverse-Gaussian을 제외하고는 그 확률밀도함수가 무한대까지의 합으로 표현되기 때문에 stable분포의 경우처럼 취급하기가 매우 복잡하다. 따라서 이 논문에서는 \mathcal{P} 에 속한 분포들의 백분위수(percentile)들의 표를 만들어 보고자 한다. 먼저 \mathcal{P} 에 속한 분포들에 있어서 확률밀도함수의 형태가 세 모수 α, θ, γ 에 따라 어떻게 다른지 알아보고, $\neq F$ -PVF를 두 개의 모수 α 와 θ 를 가진 분포로 간주하여 $\alpha \neq 1$ 인 분포들의 백분위수와 $\alpha = 1$ 인 분포들의 백분위수간의 관계식을 유도하였다. 이 관계식으로 인하여 $\alpha = 1$ 인 여러가지 γ, θ 대한 백분위수들의 표만으로 모든 α 에 대한 백분위수를 구할 수 있다. 따라서 $\alpha = 1$ 인 분포들만의 백분위수표를 만들고자 하였다. γ 의 값으로는 stable분포와 연관해서 곧잘 언급되어지는 2.5, 3, 4일 때를 고려했고 θ 의 값으로는 -0.005로부터 -300까지의 범위를 택하여 백분위수를 구해보았다. 또한 $\neq F$ -PVF의 분포를 가진 확률변수를 표준화시킨 변수는 왜도(coefficient of skewness)가 0에 가까이 갈 때 표준정규분포로 근사되는 것을 보였다. 따라서 왜도가 0에 가까운 θ 의 값들에 대해 Cornish-Fisher asymptotic expansion을 이용한 백분위수들과 Pearson curve를 이용한 백분위수들을 구하여 값을 비교하여 보았다.

2. \mathcal{P} class에 속한 분포들의 확률적인 성질

2.1 \mathcal{P} class에 속한 분포들의 확률밀도함수

Bar-Lev and Enis (1986)가 제시한 \mathcal{P} class에 속하는 분포들의 정확한 확률밀도함수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \left\{ -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin(\pi \rho k) \frac{(1-\rho)^{k(1-\rho)} \Gamma(\rho k + 1)}{\rho^k \alpha^{k(1-\rho)} x^{\rho k + 1}} \right\} \\
 & \times \exp \left\{ \theta x + \frac{(1-\rho)}{\alpha \rho} \left[\frac{\alpha \theta}{\rho - 1} \right]^\rho \right\}, \quad (1) \\
 & x > 0, \theta \leq 0, \alpha > 0, \rho \equiv \frac{2-\gamma}{1-\gamma} \in (0, 1)
 \end{aligned}$$

확률밀도함수가 무한급수 형태로 되어 있음을 주목할 수 있다. 예외는 $\gamma = 3$ 의 inverse Gaussian 분포이다. 아래 두 분포 예는 \mathcal{G} class에 속하는 특수경우들이다.

예 1 Inverse Gaussian 분포

$$dF(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{-3/2} \lambda^{1/2} \exp \{ -\delta x/2 - \lambda/2x + (\delta \lambda)^{1/2} \} dx, \delta \geq 0, \lambda > 0.$$

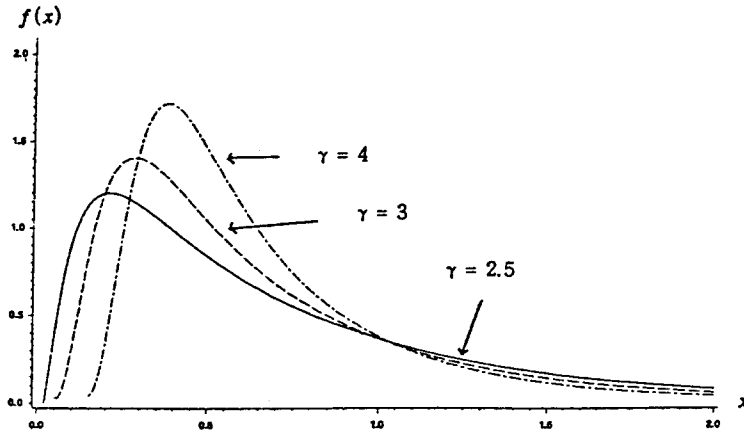
여기서 $\theta = -\delta/2$, $\theta = (-\infty, 0]$, $\rho = 1/2$ ($\gamma = 3$), $\alpha = 1/\lambda$.

예 2 Modified Bessel-type 분포

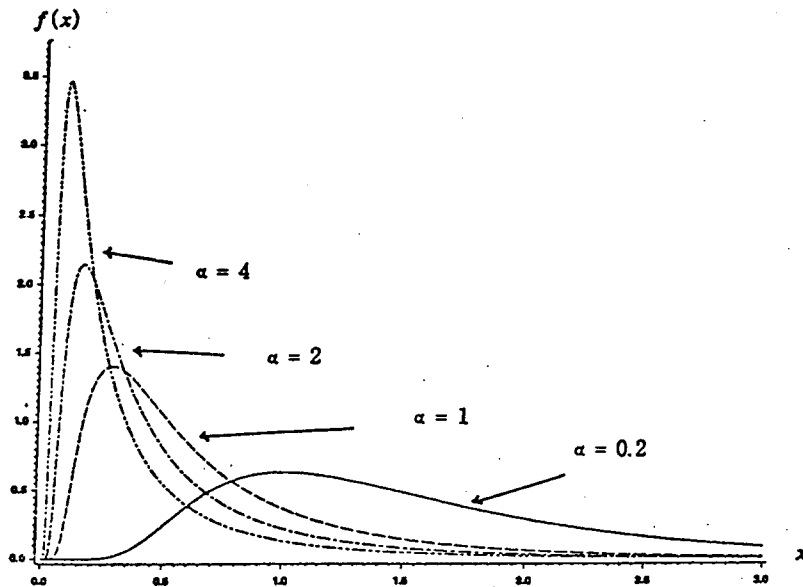
$$dF(x) = (2\pi)^{-1} 3^{1/2} \lambda x^{-3/2} k_{1/3}(\lambda x^{1/2}) \exp \{ -px + 3(\lambda^2 p/4)^{1/3} \} dx, \lambda > 0, p \geq 0.$$

여기서 $k_{1/3}(z)$ 는 argument z 를 가진 차수 $1/3$ 의 2차 종류의 modified Bessel function이고 $\theta = -p$, $\theta = (-\infty, 0]$, $\rho = 1/3$ ($\gamma = 2.5$), $\alpha = 4/(3\lambda)$.

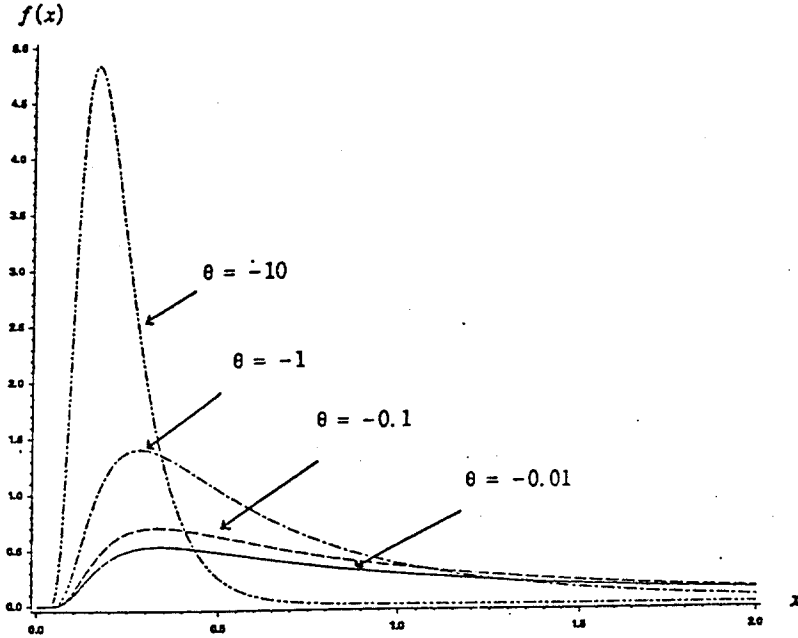
\mathcal{G} class에 속한 분포들의 성질로서 leptokurtic (Kendall and Stuart, 1977, P. 88), self-decomposable (정의는 Lukacs, 1983, Section 4.2 에 있음), 그리고 unimodal임이 밝혀졌다. 3가지 모수 α , γ , θ 에 따른 확률밀도함수의 형태를 살펴보기 위해 두가지 모수를 고정시키고 나머지 모수를 변화시켜서 확률밀도함수를 그려보았다. <그림1>에는 고정된 $\alpha (= 1)$ 과 $\theta (= -1)$ 에 대하여 γ 의 3가지 값(2.5, 3, 4)에 따른 확률밀도함수를 나타내었으며 <그림2>에는 $\gamma (= 3)$ 과 $\theta (= -1)$ 를 고정시키고 α 값(0.2, 1, 2, 4)을 달리한 확률밀도함수를 나타내었는데 α 가 커질수록 x 의 작은 값 쪽으로 치우치며 첨도가 커지고 $\alpha \rightarrow 0$ 일 때 정규분포에 접근해감을 볼 수 있다. <그림3>에는 고정된 $\alpha (= 1)$ 와 $\gamma (= 3)$ 에 대하여 θ 의 4가지 값(-0.01, 0.1, 1, 10)에 따른 확률밀도함수를 보였는데 θ 가 작아질 때 혹은 $-\theta = \xi$ 이 커질 때 정규분포로 접근해감을 알 수 있다.



<그림 1> $\alpha = 1, \theta = -1$ 일 경우 γ 에 따른 확률밀도함수



<그림 2> $\gamma = 3, \theta = -1$ 일 경우 α 에 따른 확률밀도함수



<그림 3> $\alpha = 1, \gamma = 3$ 일 경우 θ 에 따른 확률밀도함수

2.2 백분위수간의 관계

X 를 \mathcal{P} class에 속한 분포를 가진 확률변수라 하고, X_1, X_2, \dots, X_n 을 각각 X 와 같은 분포를 가지는 *i.i.d.* 확률변수들이라고 하자. 이 절에서는 $\alpha \neq 1$ 인 분포의 백분위수들을 $\alpha = 1$ 인 분포의 백분위수들에 의해 나타낼 수 있는 관계식을 유도하고자 한다.

$\neq F$ -PVF들을 2개의 모수 α 와 θ 를 가진 계열로 보면 \mathcal{P} class에 속한 분포들의 확률밀도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{\alpha, \theta}(x) = \frac{1}{a_\alpha} g_\rho\left(\frac{x}{a_\alpha}\right) \exp\{\theta x + c_\alpha(\theta)\},$$

여기서

$$a_\alpha = \left[\frac{(1-\rho)^{1-\rho}}{\rho \alpha^{1-\rho}} \right]^{1/\rho}, \quad c_\alpha(\theta) = \frac{1-\rho}{\alpha \rho} \left[\frac{\alpha \theta}{\rho-1} \right]^\rho, \quad \rho \equiv \frac{2-\gamma}{1-\gamma} \in (0, 1),$$

$$g_\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin(\pi \rho k) \frac{\Gamma(\rho k + 1)}{x^{\rho k + 1}}, \quad x > 0.$$

확률밀도함수 $f_{\alpha, \theta}(x)$ 를 가진 분포들의 제 p 백분위수($0 < p < 1$)를 $\xi_{p, \alpha, \theta}$ 로 나타낸다면 $\xi_{p, \alpha, \theta}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 p &= \int_0^{\xi_{p,\alpha,\theta}} \frac{1}{a_\alpha} g_p\left(\frac{x}{a_\alpha}\right) \exp\{\theta x + c_\alpha(\theta)\} dx \\
 &= \exp\{c_\alpha(\theta) - c_1(\theta\eta)\} \times \int_0^{(\eta^{-1})\xi_{p,\alpha,\theta}} \frac{1}{a_1} g_p\left(\frac{y}{a_1}\right) \exp\{(\theta\eta)y + c_1(\theta\eta)\} dy
 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\eta = \alpha^{(\rho-1)/\rho}$ 이고 변환 $y = x\alpha^{-(\rho-1)/\rho} = x/\eta$ 을 사용했다. 또한

$$c_\alpha(\theta) - c_1(\theta\eta) = \frac{1-\rho}{\alpha\rho} \left[\frac{\alpha\theta}{\rho-1} \right]^\rho - \frac{1-\rho}{\rho} \left[\frac{\theta\eta}{\rho-1} \right]^\rho = 0$$

이기 때문에 식 (2)는 다음과 같이 된다.

$$p = \int_0^{(\eta^{-1})\xi_{p,\alpha,\theta}} \frac{1}{a_1} g_p\left(\frac{y}{a_1}\right) \exp\{(\theta\eta)y + c_1(\theta\eta)\} dy$$

따라서 다음의 관계식이 얻어진다.

$$(\eta^{-1})\xi_{p,\alpha,\theta} = \xi_{p,1,\theta\eta}$$

혹은

$$\xi_{p,\alpha,\theta} = \eta \xi_{p,1,\theta\eta} \tag{3}$$

여기서 $\eta = \alpha^{(\rho-1)/\rho}$ 이고 $\rho = (2-\gamma)/(1-\gamma)$ 이다. 즉, $\alpha = 1$ 인 분포들의 백분위수들의 표만 주어지면 $\alpha \neq 1$ 인 분포들의 백분위수들은 관계식 (3)을 이용하여 구할 수 있다.

2.3 표준화된 확률변수의 극한분포

X 를 \mathcal{Y} class에 속한 분포를 가지는 확률변수라 하면, γ 와 α 를 고정시킬 때 평균 μ 와 θ 는 다음과 같이 일대일 대응관계를 가진다.

$$\mu = [\alpha(1-\gamma)\theta]^{1/(1-\gamma)}$$

μ_2 와 μ_3 를 각각 2차와 3차 central moment라 하면 왜도(coefficient of skewnees)는 $\beta_\gamma = \mu_3 / (\mu_2)^{3/2}$ 로 정의되므로 먹모수 γ 를 가진 $\neq F-PVF$ 의 왜도는 $\beta_\gamma = \gamma\alpha^{1/2}\mu^{\gamma/2-1}$ 이 된다.

Y 는 X 를 표준화시킨 확률변수라고 하자. 즉, $Y = (X-\mu)/(\alpha\mu^\gamma)^{1/2}$. 아래 정리 2.1에서는 각각의 γ 에 대하여 β_γ 이 0으로 가까이 갈때 Y 의 극한분포가 표준정규분포임을 보인다.

정리 2.1 X 를 \mathcal{Y} class에 속한 분포를 가지는 확률변수라고 하고 X 의 왜도 β_γ 가 극한값 c 에 가까이 가도록 두개의 모수 α 와 μ 가 어떤 극한값들로 가까이 간다고 가정하자. 그러면 X 의 표준화된 확률변수 Y 가 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 분포면으로 수렴하는 필요충분조건은 $c = 0$ 이다.

증명 먼저 충분성을 보이기 위해 $c = 0$ 라고 가정하자. X 의 특성함수(characteristic function)는

$$\Phi_X(t) = \exp \left[\frac{\mu^{2-\gamma}}{\alpha(2-\gamma)} \left[\{ 1 + \alpha(1-\gamma) \mu^{\gamma-1} it \}^{(2-\gamma)/(1-\gamma)} - 1 \right] \right]$$

이고 따라서 $Y = (x-\mu) / (\alpha \mu^\gamma)^{1/2}$ 의 특성함수는

$$\begin{aligned} \Phi_Y(t) &= \exp \left\{ -it \left(\frac{\mu^{2-\gamma}}{\alpha} \right)^{1/2} \right\} \Phi_X \left\{ t / (\alpha \mu^\gamma)^{1/2} \right\} \\ &= \exp \left[-it \left(\frac{\mu^{2-\gamma}}{\alpha} \right)^{1/2} + \frac{1}{(2-\gamma)} \left(\frac{\mu^{2-\gamma}}{\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[\{ 1 + it(1-\gamma) \left(\frac{\alpha}{\mu^{2-\gamma}} \right)^{1/2} \}^{(2-\gamma)/(1-\gamma)} - 1 \right] \right] \end{aligned}$$

가 된다. $| t(1-\gamma) \left(\frac{\alpha}{\mu^{2-\gamma}} \right)^{1/2} | < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \Phi_Y(t) &= \exp \left\{ -it \left(\frac{\mu^{2-\gamma}}{\alpha} \right)^{1/2} + \frac{1}{2-\gamma} \left(\frac{\mu^{2-\gamma}}{\alpha} \right) \right\} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma[(2-\gamma)/(1-\gamma)+1]}{\Gamma[(2-\gamma)/(1-\gamma)+1-j]} \left[it(1-\gamma) \left(\frac{\alpha}{\mu^{2-\gamma}} \right)^{1/2} \right]^j \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} t^2 + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma[(2-\gamma)/(1-\gamma)+1]}{\Gamma[(2-\gamma)/(1-\gamma)+1-j]} \frac{(1-\gamma)^j}{(2-\gamma)} \right. \\ &\quad \left. \times (it)^j \left[\left(\frac{\alpha}{\mu^{2-\gamma}} \right)^{1/2} \right]^{j-2} \right] \end{aligned}$$

이고 이 식은 $\beta\gamma \rightarrow 0$ 일 때 $\exp \{-t^2/2\}$ 로 수렴한다. 이제 필요성을 증명하기 위해 $c \neq 0$ 으로 가정하자. 그러면 Y 의 특성함수는 표준정규확률변수의 특성함수가 결코 아닌 아래의 함수로 수렴된다.

$$\exp \left[-it \frac{\gamma}{c} + \frac{1}{2-\gamma} \left(\frac{\gamma}{c} \right)^2 \left[\{ 1 + it(1-\gamma) \frac{c}{\gamma} \}^{(2-\gamma)/(1-\gamma)} - 1 \right] \right].$$

정리 2.1의 특수경우로서 $\beta\gamma \rightarrow 0$ 이나, α 와 μ 중에서 하나는 고정되고 나머지 하나만 극한으로 갈 때를 고려해 볼 수 있다. 그러면 아래 3가지 경우에 있어서 Y 가 Z 로 수렴된다는 결과를 얻는다.

- 1) α 와 γ 는 고정되고 $\mu \rightarrow 0$
- 2) α 와 γ 는 고정되고 $\theta \rightarrow -\infty$
- 3) μ 가 고정되고 $\alpha \rightarrow 0$.

확률밀도함수의 그림중에서 <그림 1>에서 $\alpha \rightarrow 0$ 일 때 정규분포로 접근함을 보았고 <그림 3>에서는 $\mu \rightarrow 0$ 혹은 $\theta \rightarrow -\infty$ 일 때 정규분포로 접근하는 사실을 볼 수 있었는데 이것은 위의 결과와 일치된다.

3. 백분위수들의 계산

$\alpha = 1$ 인 분포들의 백분위수로 $\alpha \neq 1$ 인 분포의 백분위수를 식 (3)에 의해 구할 수 있으므로 여기서는 $\alpha = 1$ 의 백분위수만을 구하고자 한다. \mathcal{Y} class에 속하는 분포들의 특수한 경우로서 inverse-Gaussian ($\gamma = 3$) 분포계열, modified Bessel-type ($\gamma = 2.5$) 분포계열, Whittaker type ($\gamma = 4$) 분포계열을 들 수 있는데 여기서는 이 세가지의 $\gamma (= 2.5, 3, 4)$ 값에 대하여 표를 만들기로 하였다. \mathcal{Y} class 중에서 inverse-Gaussian 분포계열은 유일하게 닫혀진 형태(closed form)의 확률밀도함수가 존재하는 계열이므로 계산방법의 정확성을 검토하기 위하여 고려하였다. $\xi = -\theta$ 의 값으로는 0.005, 0.01(0.01), 0.10(0.02), 0.20(0.05), 0.5(0.1), 1.0, 1.5, 2(1), 5, 10(10), 50, 80, 100, 160, 300을 선택하였고 백분위수로는 9가지 많이 사용되는 백분위수들인 제 1, 2.5, 5, 10, 50, 90, 95, 97.5, 99 백분위수를 선택하였다.

3.1 확률밀도함수에 의한 백분위수 계산

Computer System으로는 CYBER NOS/VE 932-31 System을 사용하였다. \mathcal{Y} class에 속하는 분포를 가진 변수의 확률밀도함수값은 식 (1)에서 보여지는 바와 같이 무한개의 합으로 나타내지지만 underflow 나 overflow를 피하고 계산이 용이하도록 유한개의 합으로 계산하였다. 이때 10^{-5} 이내의 절단오차를 유지하도록 하였다. 거의 대부분의 경우에는 75개의 합만 가지고 계산될 수 있었다. 그러나 x 의 작은 값($\gamma = 2.5$ 의 경우 $x < 0.02$, $\gamma = 3$ 의 경우 $x < 0.06$ 그리고 $\gamma = 4$ 의 경우 $x < 0.13$)에 대해서는 75보다 많은 갯수의 합이 필요했지만 underflow나 overflow가 나기 때문에 계산할 수 없었다. 따라서 확률밀도함수 그림의 오른쪽 면적을 계산하여 백분위수를 구하였다. 특히 $\xi (-\theta)$ 이 큰 값일 때 백분위수들은 아주 작은 값이므로 제 50 백분위수 이하의 몇가지 백분위수값들은 구할 수 없었다. $\gamma = 2.5, 3, 4$ 의 각각에 대해 무한개의 합으로 표현된 확률밀도함수로서 구할 수 없었던 백분위수들은 <표 1>에 있다. inverse-Gaussian ($\gamma = 3$) 분포계열에 대해서는 $\gamma = 2.5$ 와 $\gamma = 4$ 의 경우와 같은 방법으로 백분위수를 구하였고 또한 닫혀진 형태의 확률밀도함수를 이용하여 백분위수를 구하였다. 모든 θ 의 값에 대하여 두가지 백분위수 값들은 정확히 일치하였다. 이것으로서 다른 γ 에 대한 결과도 정확하게 계산되었다고 할 수 있겠다. 뿐만 아니라 닫혀진 형태의 확률밀도함수를 사용하였을 경우에는 확률밀도함수 (1)식으로는 overflow나 underflow 때문에 구할 수 없었던 <표 1>에 있는 백분위수들을 구하게 되었다. 따라서 다음 절에서 계산되는 근사백분위수들의 근사정도를 평가할 수 있었다.

<표 1> 무한개의 합으로 표현된 확률밀도함수로서 구할 수 없었던 백분위수들

	$\gamma = 2.5$	$\gamma = 3$	$\gamma = 4$
$\theta = 20$	1	1	-
$\theta = 30$	1	1, 2.5	-
$\theta = 40$	1, 2.5	1, 2.5, 5	-
$\theta = 50$	1, 2.5, 5	1, 2.5, 5	1, 2.5, 5, 10
$\theta = 80$	1, 2.5, 5, 10	1, 2.5, 5, 10	1, 2.5, 5, 10
$\theta = 100$	1, 2.5, 5, 10	1, 2.5, 5, 10	1, 2.5, 5, 10
$\theta = 160$	1, 2.5, 5, 10	1, 2.5, 5, 10, 50	1, 2.5, 5, 10, 50
$\theta = 300$	1, 2.5, 5, 10, 50	1, 2.5, 5, 10, 50	1, 2.5, 5, 10, 50

3.2 Cornish-Fisher Asymptotic Expansion 에 의한 근사백분위수

\mathcal{Y} class의 분포들은 self-decomposable하고 2.3절에서 $\theta \rightarrow -\infty$ 일때 (α 와 γ 가 고정된 경우) 정규분포로 근사되는 성질이 있음을 보였다. 따라서 Cornish-Fisher asymptotic expansion을 사용하여 근사백분위수를 구할 수 있다.

X 를 \mathcal{Y} class에 속한 분포를 가진 확률변수라 하면 Cornish-Fisher expansion에 의하여 $F(x_p) = 1 - p$ 를 만족하는 X 의 제 $100(1-p)$ 백분위수 x_p 는 다음과 같은 근사식으로 구해진다.

$$x_p \sim \mu + \sigma\omega,$$

여기서

$$\begin{aligned} \omega = x &+ [v_1 h_1(x)] \\ &+ [v_2 h_2(x) + v_1^2 h_{11}(x)] \\ &+ [v_3 h_3(x) + v_1 v_2 h_{12}(x) + v_1^3 h_{111}(x)] \\ &+ [v_4 h_4(x) + v_2^2 h_{22}(x) + v_1 v_3 h_{13}(x) + v_1^2 v_2 h_{112}(x) \\ &\quad + v_1^4 h_{1111}(x)] + \dots, \end{aligned}$$

그리고

$$h_1(x) = \frac{1}{6} H_{e_1}(x)$$

$$h_2(x) = \frac{1}{24} H_{e_2}(x), \quad h_{11}(x) = \frac{1}{36} [2H_{e_1}(x) + H_{e_1}(x)]$$

$$h_3(x) = \frac{1}{120} [H_{e_3}(x)], \quad h_{12}(x) = -\frac{1}{24} [H_{e_1}(x) + H_{e_2}(x)]$$

$$\begin{aligned}
h_{111}(x) &= \frac{1}{324} [12H_{e_1}(x) + 19H_{e_2}(x)] \\
h_4(x) &= \frac{1}{720} H_{e_3}(x), \quad h_{22}(x) = -\frac{1}{384} [3H_{e_3}(x) + 6H_{e_3}(x) + 2H_{e_1}(x)] \\
h_{13}(x) &= -\frac{1}{180} [2H_{e_3}(x) + 3H_{e_3}(x)] \\
h_{112}(x) &= \frac{1}{288} [14H_{e_3}(x) + 37H_{e_3}(x) + 8H_{e_1}(x)] \\
h_{1111}(x) &= -\frac{1}{7776} [252H_{e_3}(x) + 832H_{e_3}(x) + 227H_{e_1}(x)],
\end{aligned}$$

x 는 표준정규분포의 제 $100(1-p)$ 백분위수이고, $H_{e_r}(x)$ 는 Hermite polynomial들이며, X 의 r 번째 cumulant를 κ_r 으로 나타낼 때 $r = 3, 4, \dots$ 에 대하여 v_{r-2} 는 $\kappa_r/(\kappa_2^{r/2})$ 인데 \mathcal{Y} class에서는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha^{1/2} \gamma \mu^{(\gamma-2)/2}, \quad v_2 = \alpha \gamma (2\gamma - 1) \mu^{\gamma-2}, \\
v_3 &= \alpha^{3/2} \gamma (2\gamma-1)(3\gamma-2) \mu^{3(\gamma-2)/2}, \\
v_4 &= \alpha^2 \gamma (2\gamma-1)(3\gamma-2)(4\gamma-3) \mu^{2(\gamma-2)}.
\end{aligned}$$

이 식을 이용하여 $\gamma = 2.5, 3, 4$ 일 때 근사백분위수를 계산하였다. 확률밀도함수를 가지고 계산된 결과와 비교하였는데 $\gamma = 2.5, 3, 4$ 의 각각에 대해 $\theta \leq -1.5, \theta \leq -4.0, \theta \leq -10$ 에서 차이가 0.01이내이었다. 기대한대로 θ 가 작은 값일 때 근사오차가 적었고 특히 $\gamma = 2.5, 3, 4$ 의 각각에 대해 $\theta \leq -5, \theta \leq -10, \theta \leq -20$ 에서는 0.001이내의 차이를 보이는 것으로 보아 θ 가 작은 값일 때 Cornish-Fisher expansion은 만족스러운 백분위수를 제공한다고 할 수 있겠다. 특히 $\gamma = 3$ 의 경우에는 <표 1>에 있는 확률밀도함수 (1)식으로서 구할 수 없었던 백분위수들에 대하여 Cornish-Fisher expansion에 의한 근사백분위수들과 닫혀진 형태의 확률밀도함수로 계산된 정확한 백분위수들이 거의 대부분 일치되는 것을 보여주었다.(단지 $\theta = 20, 30$ 에서 근사백분위수가 0.001만큼 작은 값이었음.) 이것은 $\gamma = 2.5$ 와 $\gamma = 4$ 의 경우에도 <표 1>에 있는 확률밀도함수 (1)식으로서 구할 수 없었던 백분위수들에 대하여 Cornish-Fisher expansion에 의한 근사백분위수들이 잘 대체될 수 있음을 말해준다.

3.3 왜도와 첨도를 이용한 근사백분위수

X 를 \mathcal{Y} class에 속하는 분포를 가진 확률변수라고 할 때, 정리 2.1은 표준화된 확률변수, $Y = (X - \mu)/\sigma$ 의 분포가 표준정규분포로 근사되는 성질이 있음을 보였다. 따라서 β_1 과 β_2 가 주어졌을 때 근사백분위수를 구할 수 있는 Pearson Curve를 사용해 보고자 한다.

$\sqrt{\beta_1} = \mu_3/(\mu_2^{3/2})$ 과 $\beta_2 = \mu_4/(\mu_2^2)$ 은 각각 왜도와 첨도(coefficient of kurtosis)를 나타내는 측도로서 역모수 γ 를 가진 $\neq F-PVF$ 의 경우에 두 측도는 아래와 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta_1} &= \alpha^{1/2} \gamma \mu^{(\gamma-2)/2}, \\ \beta_2 &= \alpha \gamma (2\gamma-1) \mu^{\gamma-2}\end{aligned}$$

여기서

$$\mu = [\alpha(1-\gamma)\theta]^{1/(1-\gamma)}.$$

Johnson, Nixon, Amos와 Pearson(1963)은 $\sqrt{\beta_1}$ 과 β_2 값이 주어졌을 때 Pearson Curve에 의한 백분위수들을 표준화시킨 값으로 나타낸 표들을 제시했다. 이 표들을 이용하여 근사백분위수를 구할 수 있는데, 먼저 $\alpha = 1$ 이고 $\gamma = 2.5, 3, 4$ 의 각각에 대해 여러가지 θ 값들에 대응되는 평균 μ 를 계산한다. 이 α, γ 와 μ 값을 대입하여 $\sqrt{\beta_1}$ 과 β_2 를 계산한 다음 Johnson, Nixon, Amos와 Pearson의 표들을 사용하여 백분위수를 찾는다. 이 백분위수는 표준화된 값이므로 μ 와 $\sigma = (\alpha\mu^\gamma)^{1/2}$ 로서 구하고자 하는 근사백분위수를 계산하였다. 그러나 제시된 표들에서 β_1, β_2 의 값들이 $0 \leq \beta_1 \leq 1$ 과 $1.8 \leq \beta_2 \leq 5$ 로 제한되었기 때문에 표를 사용할 수 있는 θ 의 값들은 $\gamma = 2.5, 3, 4$ 에 대해 각각 $\theta \leq -162, \theta \leq -40$, 그리고 $\theta \leq -21$ 로 제한되었다. 또한 이 표에는 중간의 세가지 백분위수가 제시되지 않았으므로 위 범위내의 θ 의 값들에 대해 여섯가지 백분위수들만이 계산되었다. <표 2>는 β_1 와 β_2 에 대한 Pearson curve를 이용하여 계산된 백분위수이다. 이것은 확률밀도함수로 계산된 정확한 백분위수들과 또한 Cornish-Fisher expansion에 의한 근사백분위수들과 비교해 볼 때 거의 대부분이 0.001이내의 차이를 보이고 있다. 따라서 θ 의 작은 값에 대해서는 Pearson Curve를 이용하여 충분히 만족스러운 백분위수를 구할 수 있음을 보여준다.

3.4 $\gamma = 2.5, \gamma = 3$ 과 $\gamma = 4$ 인 분포들에 대한 백분위수들의 표

이상에서 구한 백분위수들이 $\gamma = 2.5, 3, 4$ 의 각각에 대해 <표 3>, <표 4>와 <표 5>에 있다. Inverse-Gaussian($\gamma = 3$) 분포계열을 제외하고는 무한급수로 표현된 확률밀도함수 (1)식으로서 구할 수 없었던 θ 의 작은 값들에 대한 <표 1>의 백분위수들을 Cornish-Fisher expansion에 의한 근사백분위수들로 대체하였다. 이 표들은 $\alpha = 1$ 인 경우에 대한 백분위수들을 나타낸 것이므로 $\alpha \neq 1$ 인 경우에는 백분위수간의 관계식 (3)에 의해 백분위수들을 구할 수 있다.

예 3: $\gamma = 3$ 인 분포계열에서 $\alpha = 2$ 이고 $\theta = 3$ 인 분포의 제 90백분위수를 구해보자. 이 경우에는 $\rho = (2-3)/(1-3) = 0.5$ 이고 $\eta = 2^{(0.5-1)/0.5} = 0.5$ 이므로 식 (3)에 의하면 $\xi_{0.9, 2, 3} = (0.5) \times \xi_{0.9, 1, 1.5}$ 가 된다. 이제 <표 4>로부터 $\theta = 1.5$ 일 때 제 90백분위수인 1.119를 찾아서 앞의 식에 대입하면 0.5595값이 $\alpha = 2$ 이고 $\theta = 3$ 인 분포의 제 90백분위수가 된다.

참고문헌

- [1] Bar-Lev, S. K. and Enis, P. (1986). Reproducibility and natural exponential families with power variance functions, *The Annals of Statistics*, Vol. 14, 1507-22.
- [2] Hougaard, P. (1986). Survival models for heterogeneous populations derived from stable distributions, *Biometrika*, Vol. 73, 387-96.
- [3] Jorgensen, B. (1987). Exponential dispersion models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 49, 127-45.
- [4] Johnson, N. L., Nixon, E., Amos, D. E., and Pearson, E. S. (1963). Table of percentage points of Pearson curves, for given $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 , expressed in standard measure, *Biometrika*, Vol. 50, 459.
- [5] Kendall, M. G. and Stuart, A. (1977). *The Advanced Theory of Statistics*, I (4th ed.), Academic Press, New York.
- [6] Lukacs, E. (1983). *Developments in Characteristic Function Theory*, Charles Griffin, London.
- [7] Marvin Z. and Norman C. S. (1966). Probability Functions in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Eds. Abramowitz, M. and Stegun, I. A.) 935-6. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, Washington, D.C.
- [8] Morris, C. N. (1982). Natural exponential families with quadratic variance functions, *The Annals of Statistics*, Vol. 10, 65-80.
- [9] Tweedie, M. C. K. (1984). An index which distinguishes between some important exponential families. In *Statistics: Applications and New Directions, Proceedings of the Indian Statistical Institute Golden Jubilee International Conference* (Eds. J. K. Ghosh and J. Roy) 579-604. Calcutta: Indian Statistical Institute.
- [10] Wasan, M. T. and Roy, L. K. (1969). Tables of inverse Gaussian percentage points, *Technometrics*, Vol. 11, 591-604.

<표 2> β_1 와 β_2 에 대한 Pearson curve를 이용한 백분위수 $r = 2.5$ 인 경우

$-\theta \setminus 1-\alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
160.	0.009	0.011	0.012				0.045	0.051	0.057
300.	0.007	0.008	0.009				0.028	0.031	0.035

 $r = 3.0$ 인 경우

$-\theta \setminus 1-\alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
40.0	0.051	0.056	0.062				0.181	0.201	0.225
50.0	0.047	0.052	0.058				0.159	0.175	0.195
80.0	0.040	0.045	0.048				0.120	0.131	0.144
100.	0.038	0.041	0.045				0.105	0.114	0.125
160.	0.032	0.034	0.037				0.080	0.086	0.093
300.	0.025	0.027	0.029				0.056	0.059	0.064

 $r = 4.0$ 인 경우

$-\theta \setminus 1-\alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
20.0	0.148	0.159	0.169				0.377	0.410	0.454
30.0	0.138	0.147	0.155				0.315	0.339	0.371
40.0	0.130	0.138	0.145				0.278	0.297	0.322
50.0	0.124	0.131	0.138				0.253	0.269	0.290
80.0	0.112	0.118	0.123				0.208	0.219	0.233
100.	0.107	0.112	0.117				0.189	0.199	0.211
160.	0.096	0.100	0.103				0.157	0.163	0.172
300.	0.082	0.085	0.087				0.122	0.127	0.132

<표 3> $\alpha = 1, \gamma = 2.5$ 일 경우 $\xi = -\theta$ 에 따른 백분위수

$\xi \setminus 1 - \alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
0.01	0.11	0.18	0.28	0.48	4.60	43.6	73.1	108.4	161.1
0.02	0.10	0.17	0.26	0.44	3.57	27.4	43.8	63.0	91.6
0.03	0.10	0.16	0.24	0.41	3.04	20.7	32.3	45.7	65.4
0.04	0.10	0.15	0.23	0.38	2.70	16.9	26.0	36.2	51.2
0.05	0.09	0.15	0.22	0.37	2.45	14.47	21.9	30.3	42.4
0.06	0.09	0.14	0.22	0.35	2.26	12.72	19.0	26.1	36.4
0.07	0.09	0.14	0.21	0.34	2.11	11.40	16.9	23.1	32.0
0.08	0.09	0.14	0.20	0.33	1.98	10.37	15.3	20.7	28.6
0.09	0.09	0.13	0.20	0.32	1.88	9.53	13.97	18.9	25.9
0.10	0.08	0.13	0.20	0.31	1.79	8.84	12.87	17.3	23.7
0.12	0.08	0.13	0.19	0.30	1.64	7.75	11.20	14.97	20.4
0.14	0.08	0.12	0.18	0.29	1.52	6.94	9.94	13.21	17.6
0.16	0.08	0.12	0.18	0.28	1.43	6.31	8.99	11.93	16.2
0.18	0.08	0.12	0.17	0.27	1.35	5.78	8.18	10.78	14.45
0.20	0.08	0.12	0.17	0.26	1.28	5.36	7.56	9.94	13.33
0.25	0.08	0.11	0.16	0.25	1.14	4.56	6.35	8.27	10.97
0.30	0.07	0.11	0.15	0.23	1.04	3.99	5.51	7.14	9.41
0.35	0.07	0.11	0.15	0.22	0.96	3.57	4.89	6.30	8.27
0.40	0.07	0.10	0.14	0.21	0.89	3.23	4.41	5.66	7.39
0.45	0.07	0.10	0.14	0.20	0.84	2.97	4.03	5.15	6.70
0.50	0.07	0.10	0.13	0.20	0.79	2.75	3.71	4.73	6.13
0.60	0.07	0.09	0.13	0.19	0.72	2.40	3.22	4.08	5.26
0.70	0.06	0.09	0.12	0.18	0.66	2.14	2.86	3.61	4.63
0.80	0.06	0.09	0.12	0.17	0.61	1.94	2.58	3.24	4.14
0.90	0.06	0.08	0.11	0.16	0.58	1.78	2.35	2.95	3.76
1.00	0.057	0.081	0.109	0.155	0.542	1.649	2.168	2.707	3.441
1.50	0.052	0.072	0.095	0.133	0.431	1.223	1.584	1.955	2.458
2.00	0.048	0.066	0.086	0.119	0.365	0.989	1.268	1.553	1.937
3.00	0.042	0.057	0.074	0.101	0.288	0.733	0.927	1.123	1.387
4.00	0.039	0.052	0.067	0.089	0.243	0.593	0.743	0.894	1.095
5.00	0.036	0.048	0.061	0.081	0.212	0.503	0.625	0.749	0.912
10.0	0.029	0.037	0.046	0.059	0.140	0.302	0.368	0.433	0.519
20.0	0.021	0.028	0.034	0.042	0.091	0.181	0.217	0.251	0.297
30.0	0.018	0.022	0.028	0.034	0.070	0.135	0.160	0.184	0.217
40.0	0.017	0.020	0.024	0.030	0.059	0.109	0.128	0.147	0.171
50.0	0.015	0.018	0.022	0.026	0.051	0.093	0.108	0.124	0.143
80.0	0.012	0.015	0.017	0.021	0.038	0.066	0.076	0.086	0.099
100.	0.011	0.013	0.015	0.018	0.033	0.056	0.064	0.072	0.083
160.	0.009	0.011	0.012	0.014	0.024	0.040	0.045	0.051	0.057
300.	0.007	0.008	0.009	0.010	0.016	0.025	0.028	0.031	0.035

<표 4> $\alpha=1, \gamma=3$ 일 경우 $\xi = -\theta$ 에 따른 백분위수

$\xi \setminus 1-\alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
0.005	0.14	0.19	0.25	0.35	1.78	21.1	44.2	79.9	146.4
0.01	0.14	0.19	0.24	0.34	1.65	16.2	31.2	52.7	90.3
0.02	0.14	0.18	0.24	0.33	1.50	11.95	21.4	33.9	54.9
0.03	0.14	0.18	0.23	0.32	1.40	9.87	16.9	26.0	40.8
0.04	0.14	0.18	0.23	0.32	1.33	8.57	14.29	21.5	33.0
0.05	0.14	0.18	0.23	0.32	1.33	8.57	14.29	21.5	33.0
0.06	0.14	0.18	0.23	0.31	1.22	6.98	11.19	16.4	24.4
0.07	0.14	0.18	0.22	0.30	1.18	6.44	10.19	14.73	21.8
0.08	0.13	0.17	0.22	0.30	1.15	6.00	9.38	13.45	19.7
0.09	0.13	0.17	0.22	0.30	1.12	5.63	8.72	12.41	18.0
0.10	0.13	0.17	0.22	0.29	1.09	5.32	8.17	11.54	16.67
0.12	0.13	0.17	0.21	0.29	1.04	4.82	7.28	10.18	14.54
0.14	0.13	0.17	0.21	0.28	1.00	4.43	6.61	9.15	12.95
0.16	0.13	0.17	0.21	0.28	0.96	4.11	6.07	8.34	11.71
0.18	0.13	0.16	0.21	0.28	0.93	3.85	5.64	7.68	10.72
0.20	0.13	0.16	0.21	0.27	0.90	3.63	5.27	7.14	9.91
0.25	0.13	0.16	0.20	0.26	0.84	3.20	4.57	6.12	8.38
0.30	0.13	0.16	0.20	0.26	0.80	2.88	4.06	5.39	7.30
0.35	0.12	0.16	0.19	0.25	0.76	2.64	3.68	4.84	6.51
0.40	0.12	0.15	0.20	0.25	0.73	2.44	3.38	4.41	5.89
0.45	0.12	0.15	0.19	0.24	0.70	2.28	3.13	4.06	5.39
0.50	0.12	0.15	0.18	0.24	0.68	2.14	2.92	3.77	4.98
0.60	0.12	0.15	0.18	0.23	0.63	1.93	2.60	3.32	4.35
0.70	0.12	0.14	0.18	0.22	0.60	1.76	2.35	2.98	3.88
0.80	0.11	0.14	0.17	0.22	0.57	1.63	2.15	2.72	3.51
0.90	0.11	0.14	0.17	0.21	0.55	1.52	1.99	2.50	3.22
1.00	0.110	0.136	0.165	0.208	0.527	1.424	1.862	2.328	2.976
1.50	0.104	0.127	0.153	0.190	0.451	1.119	1.431	1.758	2.208
2.00	0.100	0.121	0.144	0.178	0.402	0.942	1.188	1.442	1.790
3.00	0.093	0.112	0.132	0.161	0.340	0.740	0.915	1.093	1.335
4.00	0.089	0.105	0.123	0.148	0.301	0.623	0.761	0.900	1.086
5.00	0.085	0.100	0.116	0.139	0.273	0.546	0.660	0.774	0.927
10.0	0.073	0.084	0.096	0.113	0.201	0.362	0.426	0.488	0.571
20.0	0.061	0.070	0.078	0.089	0.146	0.241	0.277	0.311	0.356
30.0	0.055	0.062	0.069	0.078	0.121	0.191	0.216	0.241	0.272
40.0	0.050	0.056	0.062	0.070	0.106	0.161	0.182	0.201	0.225
50.0	0.047	0.052	0.057	0.064	0.095	0.142	0.159	0.175	0.195
80.0	0.040	0.044	0.048	0.053	0.076	0.109	0.120	0.131	0.144
100.	0.037	0.041	0.044	0.049	0.068	0.096	0.105	0.114	0.125
160.	0.032	0.034	0.037	0.040	0.054	0.073	0.080	0.086	0.093
300.	0.025	0.027	0.029	0.031	0.040	0.052	0.056	0.059	0.064

<표 5> $\alpha = 4, \gamma = 4$ 일 경우 $\xi = -\theta$ 에 따른 백분위수

$\xi \setminus 1 - \alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
0.005	0.22	0.26	0.30	0.36	0.95	6.58	14.12	28.1	60.7
0.01	0.22	0.26	0.30	0.36	0.93	5.88	11.81	21.9	43.1
0.02	0.22	0.26	0.30	0.36	0.90	5.08	9.49	16.3	29.6
0.03	0.22	0.26	0.30	0.35	0.88	4.58	8.20	13.54	23.4
0.04	0.22	0.26	0.29	0.35	0.87	4.23	7.34	11.77	19.7
0.05	0.22	0.26	0.29	0.35	0.85	3.96	6.71	10.53	17.2
0.06	0.22	0.26	0.29	0.35	0.84	3.74	6.22	9.59	15.41
0.07	0.22	0.26	0.29	0.35	0.83	3.56	5.82	8.85	14.01
0.08	0.22	0.26	0.29	0.35	0.82	3.41	5.49	8.25	12.89
0.09	0.22	0.25	0.29	0.35	0.81	3.27	5.21	7.75	11.97
0.10	0.22	0.25	0.29	0.34	0.80	3.16	4.97	7.32	11.20
0.12	0.22	0.25	0.29	0.34	0.79	2.96	4.58	6.63	9.98
0.14	0.22	0.25	0.29	0.34	0.77	2.80	4.26	6.09	9.04
0.16	0.22	0.25	0.29	0.34	0.76	2.66	4.00	5.66	8.30
0.18	0.22	0.25	0.29	0.34	0.75	2.55	3.78	5.30	7.70
0.20	0.22	0.25	0.28	0.33	0.74	2.45	3.60	5.00	7.19
0.25	0.22	0.25	0.28	0.33	0.71	2.24	3.23	4.41	6.23
0.30	0.22	0.25	0.28	0.33	0.69	2.08	2.95	3.97	5.54
0.35	0.22	0.24	0.28	0.32	0.68	1.96	2.73	3.64	5.01
0.40	0.21	0.24	0.28	0.32	0.66	1.85	2.56	3.37	4.60
0.45	0.21	0.24	0.27	0.32	0.65	1.76	2.41	3.15	4.26
0.50	0.21	0.24	0.27	0.32	0.63	1.69	2.29	2.97	3.98
0.60	0.21	0.24	0.27	0.31	0.61	1.56	2.08	2.67	3.54
0.70	0.21	0.24	0.27	0.31	0.60	1.46	1.93	2.45	3.21
0.80	0.207	0.234	0.262	0.303	0.579	1.378	1.801	2.268	2.946
0.90	0.206	0.232	0.260	0.300	0.564	1.309	1.696	2.121	2.734
1.00	0.205	0.231	0.258	0.297	0.552	1.251	1.608	1.998	2.557
1.50	0.199	0.223	0.248	0.284	0.503	1.047	1.309	1.589	1.984
2.00	0.196	0.218	0.242	0.274	0.470	0.923	1.133	1.354	1.662
3.00	0.189	0.209	0.230	0.259	0.424	0.772	0.925	1.084	1.301
4.00	0.183	0.203	0.222	0.248	0.392	0.680	0.803	0.928	1.098
5.00	0.179	0.197	0.215	0.239	0.369	0.617	0.720	0.824	0.964
10.0	0.164	0.178	0.192	0.211	0.302	0.457	0.518	0.577	0.655
20.0	0.148	0.158	0.169	0.182	0.245	0.342	0.377	0.411	0.455
30.0	0.138	0.147	0.155	0.166	0.216	0.289	0.315	0.340	0.371
40.0	0.131	0.139	0.146	0.155	0.197	0.257	0.278	0.298	0.322
50.0	0.124	0.131	0.138	0.147	0.184	0.235	0.253	0.269	0.290
80.0	0.112	0.118	0.123	0.130	0.158	0.195	0.208	0.219	0.233
100.	0.107	0.112	0.117	0.123	0.148	0.179	0.189	0.199	0.211
160.	0.096	0.100	0.103	0.108	0.126	0.150	0.157	0.163	0.172
300.	0.082	0.085	0.087	0.090	0.103	0.118	0.122	0.127	0.131

Percentiles for the Distributions Belonging to the Natural Exponential Families Having Power Variance Functions¹⁾

Euy Hoon Suh²⁾

Abstract

Since probability density functions for the distributions belonging to the natural exponential families having power(>2) variance functions are expressed as infinite series, it is very difficult to deal with the distributions in spite of their usefulness. Therefore, tables for the percentiles of the distributions are obtained, and approximate percentiles are also obtained in this thesis. It is shown that the approximate percentiles can replace exact percentiles well for some distributions.

1) This paper was supported by NON-DIRECTED RESEARCH FUND, Korea Research Foundation, 1991.

2) Department of Statistics, Gyeongsang National University, Gazwa-Dong, Chinju 660-701, KOREA.