한국통계학회논문집 제2권 2호
1995년 12월 pp. 404-413

균형배열을 이용한 Resolution V 2^t 포화부분실험계획법의 정보행렬에 관한 연구1)

김 상 익2)

요 약

2수준계 요인실험법에서 Kim(1992)에 의해 균형배열을 이용하여 설계된 resolution V 포화균형부분실시법에서 추정량들의 공분산행렬을 계산하여 통계적 특성을 연구하였다. 이러한 부분실시법은 최소의 처리조합수를 가지고 주효과와 2인자 교호작용까지 분석할 수 있는 특징이 있다. 특히 본 논문에서는 인자의 수에 따라 설계가능한 8개의 부분실시법들간의 유사성과 통계적 효율성, 그리고 index number들의 변화에 따른 공분산행렬의 특성을 살펴보았다.

1. 서 론

인자의 수가 t 이고 수준수가 s인 s^t 요인실험법에서 불필요한 교호작용에 대한하고, 일부의 처리조합(treatment combination)만을 선택하여 실험하는 부분실시법(fractional factorial design)에 대한 설계방법은 Finney(1945)에 의해 제시된 이후 Plackett과 Burman(1946), Rao(1947)등에 의해 연구되기 시작했다.

부분실험법에 대한 초기의 연구에서는 s^t 개의 가능한 전체 처리조합에서 $(1/s)^p$ 부분만 실험하는 s^{t-p} 부분실시법이나 직교배열을 이용한 설계방법이 제시되었다. 그러나 이러한 부분실험에서는 분석하고자 하는 교호작용의 종류에 따라 부분실험의 크기가 너무 크게 되며, 이러한 단점을 극복하기 위한 방법의 하나로 균형배열을 이용한 설계방법이 Chakravarti(1956)에 의해 제시되었다.

특히 모든 인자가 2개의 수준을 갖는 2^t 요인실험법에서 균형배열을 이용한 부분실시법의 통계적 특성이 Srivastava(1965)에 의해 규명되었다. 그리고 Srivastava와 Chopra(1971)는 균형배열을 이용하여 $t \le 6$인 경우, 3인자 이상의 교호작용은 모두 무시하고 주효과와 2인자 교호작용까지 분석할 수 있으며, 정보행렬(information matrix)의 트레이스(trace)가 최적화되는 resolution V 2^t 최적균형부분실시법을 제시하였다. 또한 그들은 그러한 실험법에서 각 효과들의 추정량들의 분산 및 공분산 값을 구하여 통계적 특성을 규명하였다.

그리고 $t > 6$ 인 경우, resolution V 2^t 최적균형부분실험에 대한 설계방법과 통계적 특성은

---

1) 이 논문은 1994년도 건국대학교 학술진흥처 지원에 의한 논문임.
2) (133-701) 서울시 광진구 모진동 93-1, 건국대학교 상경대학 응용통계학과.

Chopra와 Srivastava(1974), Chopra(1977)에 의해 발표되었으며, 이러한 Chopra와 Srivastava의 연구에서 추정량의 분산과 공분산 값들의 계산에서 잘못된 점은 Chopra, Kipngeno와 Ghosh(1986), 그리고 Nishii와 Shirakura(1986)등에 의해 수정되기도 하였다.

특히 균형배열을 이용하여 최소의 처리조합수를 갖는 resolution V 2^t 포화 균형부분실시법을 설계하는 방법이 Kim(1992)에 의해 제시되었다. 본 논문에서는 Kim에 의해 제시된 resolution V 2^t 포화 균형부분실시법에서 추정량들의 공분산행렬의 구조를 연구하여 실험법의 통계적 특성을 규명하고자 한다. 먼저 2절에서는 균형배열을 이용하여 resolution V 포화균형부분실시법을 설계하는 방법과 특징을 소개하고, 설계된 실험법의 정보행렬및 공분산행렬의 계산과 그 결과는 3절에 요약되어 있으며 4절은 맺음말로 되어 있다.

2. 균형배열을 이용한 실험의 설계

실험에 포함된 t 개의 모든 인자가 2개의 수준을 갖는 2^t 요인실험법에서 분석및 추정하고자 하는 효과는, 1개의 전체평균 μ와 t개의 주효과 A_i $(i=1,2,\cdots,t)$, 그리고 $t(t-1)/2$ 개의 2인자 교호작용 A_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,t,\ i\neq j)$ 뿐이고, 나머지 3인자 이상의 교호작용은 모두 무시될 수 있다고 하자. 이와 같이 2인자 교호작용까지 분석가능하게 하는 실험법은 Box와Hunter(1961)의 분류에 따라 resolution V 계획법이라 한다.

그리고 2^t 요인실험법에서 처리조합을 벡터인 $\underline{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_t)$ 로 표시하고 (여기서 $a_i=0$ 혹은 1 로써 각인자의 수준을 나타낸다), n개의 처리조합으로 이루어진 부분실험을 $(t\times n)$행렬형태로 구성한 것을 (각 처리조합이 행렬에서는 열로 표시됨) 배열이라고 한다. 따라서 resolution V 실험법을 배열로 나타낸 경우, 최소의 처리조합의 수(열의 수) $n=1+t+t(t-1)/2$가 된다.

Resolution V 2^t 부분실시법에서 추정하고자 하는 각 효과의 모수에 대한 추정량들을 $\hat{\mu}$, $\hat{A}_i$, $\hat{A}_{ij}$ 으로, 그리고 추정량들의 분산 및 공분산들을 $Var(\hat{\mu})$, $Var(\hat{A}_i)$, $Var(\hat{A}_{ij})$, $Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{kl})$ 등으로 표시할 때, 값이 다를 수 있는 추정량의 분산 및 공분산의 수는 $n(n+1)/2$ 개가 된다.

그러나 추정량의 공분산 행렬이 특수한 형태로 균형이 잡혀 있어서, 값이 다를 수 있는 분산이나 공분산들은 다음과 같이 10가지 형태만 가능한 경우, Srivastava(1965)는 균형실험(balanced design)이라고 하였다. 즉,

$$Var(\hat{\mu}),\ Var(\hat{A}_i),\ Var(\hat{A}_{ij}),\ Cov(\hat{\mu},\hat{A}_i),\ Cov(\hat{\mu},\hat{A}_{ij}),\ Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_j),\ Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{ij}),$$
$$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{jk}),\ Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{jk}),\ Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{kl}),\ 단\ i,j,k,l=1,2,\cdots,t,\quad i\neq j\neq k\neq l.$$

따라서 균형실험법이 되기 위해서는 t 개의 $Var(\widehat{A}_i)$ 값은 모두 같아야 하며, $t(t-1)/2$ 개의 $Var(\widehat{A}_{ij})$ 의 값도 모두 같아야 한다. 그러나 $Var(\widehat{A}_i)$ 과 $Var(\widehat{A}_{ij})$ 의 값은 같을 필요는 없다. 또, $Cov(\widehat{A}_{ij}, \widehat{A}_{jk})$ 형태의 공분산은 모두 같아야 하기 때문에 $Cov(\widehat{A}_{12}, \widehat{A}_{23}) = Cov(\widehat{A}_{34}, \widehat{A}_{14})$이고, $Cov(\widehat{A}_i, \widehat{A}_{ij})$ 형태의 공분산은 모두 같아야 하기 때문에 $Cov(\widehat{A}_1, \widehat{A}_{13}) = Cov(\widehat{A}_2, \widehat{A}_{25})$이 성립한다. 그러나 $Cov(\widehat{A}_i, \widehat{A}_{ij})$ 형태와 $Cov(\widehat{A}_i, \widehat{A}_{jk})$ 형태의 두 공분산값들 사이에는 같을 필요가 없으므로 $Cov(\widehat{A}_1, \widehat{A}_{23}) = Cov(\widehat{A}_1, \widehat{A}_{12})$은 항상 성립할 필요는 없다.

그리고 Srivastava(1965)는 2^t 요인 부분실시법을 배열로 나타냈을 때, 그 배열이 strength가 4인 균형배열이 되면 균형실험법이 되고 더 나아가 resolution V계획법이 되어, 결과적으로 resolution V 2^t 균형부분실험법이 됨을 입증하였다.

이러한 결과에 기초하여 Kim(1992)은 2^t 요인실험법에서 $t \geq 4$인 경우, 다음의 3가지 방정식을 각각 만족하는 $n = 1 + t + t(t-1)/2$ 개의 $\underline{a}' = (a_1, a_2, \cdots, a_t)'$ 의 해를 열(처리조합)로 갖는 $(t \times n)$행렬 T 는 strength가 4인 균형배열이 됨을 입증하였다. 따라서 이러한 부분실시법은 최소의 처리조합수를 갖는 resolution V 2^t 포화균형부분실시법이 된다.

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_t = d_1 , \quad (d_1 = 0 \text{ 혹은 } t) \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_t = d_2 , \quad (d_2 = 1 \text{ 혹은 } t-1) \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_t = d_3 , \quad (d_3 = 2 \text{ 혹은 } t-2) \\
&\text{단}, \ a_i = 0 \text{ 혹은 } 1, \ i = 1, 2, \cdots, t.
\end{aligned}
$$

위의 식에서 첫번째 방정식을 만족하는 $\underline{a}'$의 해는 1개뿐이고, 두번째와 세번째 방정식을 만족하는 해의 수는 각각 t, $t(t-1)/2$ 이 된다. 그리고 세개의 방정식에서 (d_1, d_2, d_3) 의 값은 $(0,1,2)$, $(0,1,t-2), \cdots, (t,t-1,t-2)$와 같이 8개의 조합이 가능하며, 각 조합마다 다른 실험법이 설계되므로 인자의 수 t 에 따라 8개의 resolution V 2^t 포화균형부분실시법을 설계할 수 있다.

그리고 (d_1, d_2, d_3) 에 의해 설계된 실험법을 $T(d_1, d_2, d_3)$ 로 나타내고 배열로 구성하면 $T(d_1, d_2, d_3)$ 는 strength가 4인 균형배열이 되며, 각 균형배열에서의 index number 들인 λ_i는 다음과 같이 된다 (Kim(1992)).

$$
\lambda_i = \sum_{j=1}^{3} \binom{t-4}{d_j - i}, \qquad i = 0,1,2,3,4
$$

그리고 균형배열에서 λ_i들이 모두 같은 경우 직교배열이 되므로 균형배열은 직교배열을 일반화한 배열임을 알 수 있다.

3. 정보행렬의 구축과 공분산행렬의 구조

예를 들어 인자의 수 t가 4인 경우, $(d_1,d_2,d_3)=(4,1,2)$에 의해 설계되는 계획법 $T(4,1,2)$ 는 $\sum_{i=1}^{4} a_i=4$ 를 만족하는 한개의 처리조합 $\underline{a}'=(1,1,1,\ 1)'$ 과 $\sum_{i=1}^{4} a_i=1$ 을 만족하는 4개의 처리조합, 그리고 $\sum_{i=1}^{4} a_i=2$ 를 만족하는 6개의 처리조합을 합하여 11개의 처리조합으로 구성되며, (4×11)의 배열로 나타내면 다음과 같이 설계될 수 있다. 그리고 이 계획법(균형배열)의 index number 들인 λ_i 들은 $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,1,1,0,1)$가 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

일반적으로 계획법 $T(d_1,d_2,d_3)$ 에서 각 처리조합마다 한번씩 실험을 실시하며 얻어진 관측값들을 $(n\times 1)$벡터 $\underline{y}$로 나타내고, 분석하고자 하는 n개의 효과들에 대한 모수를 $(n\times 1)$ 벡터 $\underline{\beta}$로, 그리고 계획행렬(design matrix)을 $(n\times n)$ 행렬 X로 나타내면 선형모형은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$E(\underline{y})=X\underline{\beta}$$

계획행렬 X에서 첫번째 열은 전체평균 μ에 해당하므로 모든 원소(element)가 1이 된다. 그리고 주효과 A_i에 해당하는 열에서 j 번째 원소는 계획법 $T(d_1,d_2,d_3)$ 의 j 번째 처리조합에 A_i에 해당하는 인자의 수준 (a_i)이 1이면 1이 되고, 0이면 -1이 된다. 그리고 교호작용 A_{ij}에 해당하는 열의 원소들은 주효과 A_i와 A_j에 해당하는 열에서 원소들끼리 곱하여 얻어 지게 된다.

예를 들어 $t=4$ 인 경우, 앞의 예에서와 같이 계획법 $T(4,1,2)$ 에서 $\underline{\beta}$와 X는 다음과 같이 된다.

$$\underline{\beta}' = (\mu, \ A_1, A_2, A_3, A_4, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34})$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 정보행렬은 $X'X$로 얻어지고, 계획법 $T(d_1,d_2,d_3)$ 는 resolution V실험법이므로 X는 정칙행렬(non-singular matrix)이 된다. 따라서 $\underline{\beta}$에 대한 최량선형불편추정량(BLUE)은 $\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X' \underline{y}$로, 그리고 실험오차의 분산을 σ^2이라 할 때 $\hat{\underline{\beta}}$의 공분산행렬은 $\sigma^2(X'X)^{-1}$로 구해진다.

본 논문에서는 인자의 수 t를 4부터 11까지 변화시키면서 각각의 t값에 따라 가능한 8개의 resolution V 2^t 포화균형부분실시법을 설계하여, 각 실험법마다 정보행렬의 역행렬 $V=(X'X)^{-1}$을 계산하였다. 그리고 그 결과는 <表-1>에서부터 <表-4>까지에 정리되어 있다. 공분산행렬의 계산에서 t가 증가함에 따라 X의 차원(dimension)이 너무 커져서 공분산행렬을 직접 구하지 못할 경우에는 X를 분할행렬(partitioned matrix)로 분할하여 계산하였다.

각 表에서 볼 수 있는 바와 같이 8개의 계획법의 특징은 다음과 같이 요약되어질 수 있다.

(1) 인자의 수 t값에 따라 설계가능한 8개의 계획법들은 다음과 같이 2개의 계획법끼리 4개의 쌍에서 공분산행렬이 같은 구조를 이루고 있다. 즉 같은 쌍의 계획법에서는 추정량의 분산값들은 서로 같고, 단지 공분산 값들중 $Cov(\hat{\mu}, \hat{A}_i)$, $Cov(\hat{A}_i, \hat{A}_{ij})$, $Cov(\hat{A}_i, \hat{A}_{jk})$ 의 값에서만 서로 부호가 반대로 된다.

$$\begin{cases} T(0,1,2) \\ T(t,t-1,t-2) \end{cases} \quad \begin{cases} T(0,1,t-2) \\ T(t,t-1,2) \end{cases} \quad \begin{cases} T(0,t-1,2) \\ T(t,1,t-2) \end{cases} \quad \begin{cases} T(t,1,2) \\ T(0,t-1,t-2) \end{cases}$$

같은 쌍에서 두개의 계획법들은 쌍대실험(dual design)으로서 한 계획법은 다른 한 계획법에서 수준 0은 수준 1로, 수준 1은 수준 0으로 단순히 변환만 하면 설계될 수 있다. 따라서 쌍대 실험법들에서는 추정량들의 공분산행렬에서 몇가지 공분산값들에서만 부호가 바뀌는 것을 알 수 있다.

(2) 각 쌍에서 두 실험법의 index number들인 $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $(\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_4')$ 사이에는, $\lambda_0 = \lambda_4'$, $\lambda_1 = \lambda_3'$, $\lambda_2 = \lambda_2'$, $\lambda_3 = \lambda_1'$, $\lambda_4 = \lambda_0'$ 관계가 성립된다. 따라서 쌍대실험에서는 index number 들이 서로 역순으로 바뀌게 되고 효율성은 같게 된다.

(3) 4개의 쌍대실험의 쌍들중에서 특히 $T(0,t-1,2)$, $T(t,1,t-2)$의 계획법에서 공분산행렬의 트레이스(trace)인 $tr(V)$가 최소가 되는 트레이스-최적(trace-optimal) 계획법이 된다. 그리고 이러한 최적실험법에서는 $Var(\widehat{A}_i)$과 $Var(\widehat{A}_{ij})$들이 모두 같고 공분산값들은 분산값에 비해 상당히 작아, 직교배열에 가까운 특성이 있음을 알 수 있다. 특히 $t=5$ 인 경우,두 계획법은 index number들이 모두 같게 되어 직교배열이 되며 따라서 공분산값들도 모두0이 된다. 그리고 이러한 실험법들에서는 인자의 수가 변화하더라도 분산이나 공분산의 값들은 크게 변하지 않는 것을 알 수 있다.

(4) 각 계획법에서 index number 들의 변화가 심할수록(특히 범위가 클 수록) 추정량들의 분산과 공분산, 그리고 트레이스값이 커져서 실험의 효율이 떨어지게 된다. 8개의 계획중 $T(0,t-1,2)$와 $T(t,1,t-2)$의 쌍, $T(0,1,t-2)$와 $T(t,t-1,2)$의 쌍, $T(t,1,2)$와 $T(0,t-1,t-2)$의 쌍, 그리고 $T(0,1,2)$와 $T(t,t-1,t-2)$의 쌍 순서대로 효율이 떨어지고 있음을 알 수 있다. 특히 첫번째 쌍과 두번째 쌍에서는 효율성이 비슷하나 나머지 두쌍에서는 효율성이 상대적으로 매우 낮아진다. 이러한 사실은 균형배열의 index number들이 모두 같을 때 직교배열이 됨과 동시에 효율성이 가장 좋아진다는 점과 일치한다고 하겠다. 그리고 직교배열에서 $tr(V)$의 값은 1이 된다. 그리고 마지막 쌍의 $tr(V)$는 첫번째 쌍의 값에 비해 t가 커짐에 따라 상대적으로 너무 크게 되어, 인자의 수가 많아짐에 따라 실험의 효율성이 급속히 나빠짐을 알 수 있다. 따라서 실험을 계획하는 경우, 이러한 사실을 고려하여 설계하는 것이 바람직하다고 하겠다.

(5) $T(0,1,2)$와 $T(t,t-1,t-2)$의 쌍대실험에서는 인자의 수 t의 값에 관계없이 $Var(\widehat{A}_{ij})$, $Cov(\widehat{A}_{ij}, \widehat{A}_{jk})$, $Cov(\widehat{A}_{ij}, \widehat{A}_{kl})$ 의 절대값이 0.25, 0.125, 0.625로 일정하며, 또한 차례대로 1/2 씩 감소하고 있다. 그리고 t가 커짐에 따라 다른 분산값이나 공분산 값들은 절대값에서 커지고 있는 점이 흥미롭다.

4. 맺 음 말

본 논문에서는 2수준계요인실험법에서 최소의 처리조합으로 2인자교효작용까지 추정할 수 있고 추정량들의 공분산행렬이 특수한 구조로 균형이 잡혀있는 resolution V 2^t 포화균형 부분실시법에서 공분산행렬의 구조와 특징을 살펴 보았다. 그러나 이러한 부분실시법은 포화실험법으로서, 일부 혹은 모든 처리조합에서 반복실험을 하여 여러번 관측치를 얻지 않는 경우 관측치수와 추정하고자 하는 효과들에 대한 모수의 수가 같게 된다. 이러한 경우 모수들에 대한 추정은 가능하나 실험오차에 대한 자유도가 없게 되므로 어떠한 효과가 유의한 효과인지에 대한 검정은 일반적인 분산분석법(analysis of variance)에 의해서는 불가능하게 된다.

그러나 8개의 계획법중 $T(0,t-1,2)$, $T(t,1,t-2)$의 계획법에서는 추정량들의 분산이 모두 같고 공분산들은 상대적으로 무시할 수 있을 정도로 작아 직교배열에 의한 계획과 유사하게 된다. 따라서 이러한 유사직교계획(near orthogonal design)에서는 직교배열이나 혹은 2^{t-p}부분실시법들과 같이 직교계획에 의해 설계된 포화실험법의 분석방법을 적용하여 분석이 가능하게 된다. 예를 들어 Daniel(1957)의 정규확률그림(normal probability plot)분석방법이나 Box와 Meyer(1986)의 베이즈그림(Bayes plot)등을 통한 분석방법이 사용될 수 있다.

따라서 본 논문에서 제시된 계획법들은 가능한한 적은 실험횟수를 가지고 2인자교호작용까지 분석하고 싶은 실험에서 응용될 수 있을 것이다. 특히 이러한 실험의 예로써 Taguchi에 의해 개발된 파라미터설계법(parameter design)에서의 응용방법과 유사직교성을 이용한 분석방법이 Kim(1994)에 의해 제시되기도 하였다.

<표-1> $T(0,1,2)$ 와 $T(t,t-1,t-2)$ 계획법에서 추정량들의 공분산행렬의 구조[1]

t	4	5	6	7	8	9	10	11
index number[2]	1,1,1,0,0	2,2,1,0,0	4,3,1,0,0	7,4,1,0,0	11,5,1,0,0	16,6,1,0,0	22,7,1,0,0	29,8,1,0,0
index number[3]	0,0,1,1,1	0,0,1,2,2	0,0,1,3,4	0,0,1,4,7	0,0,1,5,11	0,0,1,6,16	0,0,1,7,22	0,0,1,8,29
$tr(V)$	4.375	10.375	21.625	40.375	69.250	111.25	169.75	248.5
$Var(\hat{\mu})$	0.875	2.875	7.375	15.875	30.25	52.75	86.0	133.0
$Var(\hat{A}_i)$	0.5	1.0	1.75	2.75	4.0	5.5	7.25	9.25
$Var(\hat{A}_{ij})$	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_j)$	0.5625	$\pm$1.5	$\pm$3.125	$\pm$5.625	$\pm$9.1875	$\pm$14.0	$\pm$20.25	$\pm$28.125
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_{ij})$	0.3125	0.5625	0.875	1.25	1.6875	2.1875	2.75	3.375
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_j)$	0.375	0.75	1.25	1.875	2.625	3.5	4.5	5.625
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{ij})$	$\pm$0.25	$\pm$0.375	$\pm$0.5	$\pm$0.625	$\pm$0.75	$\pm$0.878	$\pm$1.0	$\pm$1.125
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{jk})$	$\pm$0.1875	$\pm$0.25	$\pm$0.3125	$\pm$0.375	$\pm$0.4375	$\pm$0.5	$\pm$0.5625	$\pm$0.625
$Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{jk})$	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
$Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{kl})$	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625

(1)부호가 바뀌는 경우, 위의 부호는 $T(0,1,2)$, 밑의 부호는 $T(t,t-1,t-2)$ 계획법에 해당한다.
(2) $T(0,1,2)$ 계획법의 index number들임.
(3) $T(t,t-1,t-2)$ 계획법의 index number들임.

<표-2> $T(0,1,t-2)$ 와 $T(t,t-1,2)$ 계획법에서 추정량들의 공분산행렬의 구조[1]

t	4	5	6	7	8	9	10	11
index number[2]	1,1,1,0,0	2,1,1,1,0	3,1,1,2,1	4,1,1,3,3	5,1,1,4,6	6,1,1,5,10	7,1,1,6,15	8,1,1,7,21
index number[3]	0,0,1,1,1	0,1,1,1,2	1,2,1,1,3	3,3,1,1,4	6,4,1,1,5	10,5,1,1,6	15,6,1,1,7	21,7,1,1,8
$tr(V)$	4.375	1.764	1.625	2.024	2.719	3.648	4.788	6.130
$Var(\hat{\mu})$	0.875	0.097222	0.083333	0.2825	0.632222	1.1173469	1.732621	2.4757909
$Var(\hat{A}_i)$	0.5	0.138889	0.083333	0.066875	0.060556	0.0578231	0.056601	0.056086
$Var(\hat{A}_{ij})$	0.25	0.097222	0.069444	0.060625	0.057222	0.055839	0.055325	0.055218
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_j)$	$\pm$0.563	$\pm$0.0556	$\mp$0.0347	$\mp$0.0675	$\mp$0.0836	$\mp$0.09297	$\mp$0.099	$\mp$0.1032
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_{ij})$	0.3125	0.0347222	-0.02778	-0.055	-0.07028	-0.080074	-0.08689	-0.091917
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_j)$	0.375	0.0763889	0.027778	0.012188	0.005556	0.0022676	0.000478	-0.000555
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{ij})$	$\pm$0.25	$\pm$0.0557	$\pm$0.021	$\pm$0.009	$\pm$0.004	$\pm$0.0013	$\mp$0.0002	$\mp$0.001
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{jk})$	$\pm$0.188	$\pm$0.0556	$\pm$0.028	$\pm$0.017	$\pm$0.011	$\pm$0.0082	$\pm$0.006	$\pm$0.0049
$Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{jk})$	0.125	0.0347222	0.013889	0.005938	0.002222	0.0002834	-0.0008	-0.001423
$Cov(\hat{A}_{ij},\hat{A}_{kl})$	0.0625	0.0347222	0.020833	0.01375	0.009722	0.0072279	0.00558	0.0044367

(1) 부호가 바뀌는 경우, 위의 부호는 $T(0,1,t-2)$, 밑의 부호는 $T(t,t-1,2)$ 계확법에 해당된다.
(2) $T(0,1,t-2)$ 계획법의 index number들임.
(3) $T(t,t-1,2)$ 계획법의 index number들임.

<표-3> $T(0,t-1,2)$ 와 $T(t,1,t-2)$ 계획법에서 추정량들의 공분산행렬의 구조[1]

t	4	5	6	7	8	9	10	11
index number[2]	1,0,1,1,0	1,1,1,1,1	2,2,1,1,2	4,3,1,1,3	7,4,1,1,4	11,5,1,1,5	16,6,1,1,6	22,7,1,1,7
index number[3]	0,1,1,0,1	1,1,1,1,1	2,1,1,2,2	3,1,1,3,4	4,1,1,4,7	5,1,1,5,11	6,1,1,6,16	7,1,1,7,22
$tr(V)$	1.486	1.000	1.152	1.486	1.942	2.504	3.165	3.924
$Var(\hat{\mu})$	0.0972222	0.0625	0.055	0.0763889	0.127551	0.2089844	0.3209877	0.46375
$Var(\hat{A}_i)$	0.1388889	0.0625	0.052222	0.0050347	0.0504082	0.0509983	0.0517133	0.0524219
$Var(\hat{A}_{ij})$	0.1388889	0.0625	0.052222	0.0503472	0.0504082	0.0509983	0.0517133	0.0524219
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_j)$	∓0.0069	0.0	±0.005	±0.0087	±0.0115	±0.0137	±0.0154	±0.0169
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_{ij})$	0.0069444	0.0	-0.005	-0.008681	-0.01148	-0.013672	-0.015432	-0.016875
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_j)$	0.013889	0.0	-0.00333	-0.00434	-0.004592	-0.004557	-0.004409	-0.004219
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{ij})$	∓0.0139	0.0	±0.003	±0.0043	±0.0046	±0.0046	±0.0044	±0.0042
$Cov(\widehat{A_i},\hat{A}_{jk})$	±0.0486	0.0	∓0.0036	∓0.0035	∓0.0029	∓0.0024	∓0.00197	∓0.0016
$Cov(\widehat{A_{ij}},\hat{A}_{jk})$	0.0138889	0.0	-0.00333	-0.00434	-0.004592	-0.004557	-0.004409	-0.004219
$Cov(\widehat{A_{ij}},\hat{A}_{kl})$	-0.048611	0.0	0.003611	0.0034722	0.002908	0.002387	0.0019684	0.0016406

(1) 부호가 바뀌는 경우, 위의 부호는 $T(0,t-1,2)$, 밑의 부호는 $T(t,1,t-2)$ 계확법에 해당된다.
(2) $T(0,t-1,2)$ 계획법의 index number들임.
(3) $T(t,1,t-2)$ 계획법의 index number들임.

<표-4> $T(t,1,2)$ 와 $T(0,t-1,t-2)$ 계획법에서 추정량들의 공분산행렬의 구조[1]

t	4	5	6	7	8	9	10	11
index number[2]	0,1,1,0,1	1,2,1,0,1	3,3,1,0,1	6,4,1,0,1	10,5,1,0,1	15,6,1,0,1	21,7,1,0,1	28,8,1,0,1
index number[3]	1,0,1,1,0	1,0,1,2,1	1,0,1,3,3	1,0,1,4,6	1,0,1,5,10	1,0,1,6,15	1,0,1,7,21	1,0,1,8,28
$tr(V)$	1.485	2.597	4.885	8.649	14.244	22.036	32.397	45.698
$Var(\hat{\mu})$	0.097222	0.0972222	0.13	0.1755556	0.2273243	0.2825255	0.339796	0.3983951
$Var(\hat{A}_i)$	0.138889	0.2222222	0.43	0.7588889	1.2094671	1.7825255	2.478684	3.2983951
$Var(\hat{A}_{ij})$	0.138889	0.1388889	0.145	0.1505556	0.1550454	0.1586416	0.161555	0.1639506
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_j)$	±0.007	±0.0278	±0.033	±0.0328	±0.0316	±0.02997	±0.028	±0.0266
$Cov(\hat{\mu},\hat{A}_{ij})$	0.006944	-0.006944	-0.01	-0.010556	-0.010346	-0.009885	-0.00936	-0.008827
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_j)$	0.013889	-0.027778	-0.07	-0.116111	-0.165533	-0.217474	-0.27132	-0.326605
$Cov(\hat{A}_i,\hat{A}_{ij})$	±0.014	±0.0694	±0.123	±0.1772	±0.2336	±0.2911	±0.35	±0.4088
$Cov(\widehat{A_i},\hat{A}_{jk})$	∓0.0486	∓ -0.056	∓0.065	∓0.0728	∓0.0789	∓0.0839	∓0.0879	∓0.0912
$Cov(\widehat{A_{ij}},\hat{A}_{jk})$	0.013889	0.0138889	0.02	0.0255556	0.0300454	0.0336416	0.036555	0.0389506
$Cov(\widehat{A_{ij}},\hat{A}_{kl})$	-0.04861	-0.048611	-0.0425	-0.036944	-0.032455	-0.028858	-0.02595	-0.023549

(1) 부호가 바뀌는 경우, 위의 부호는 $T(t,1,2)$, 밑의 부호는 $T(0,t-1,t-2)$ 계확법에 해당된다.
(2) $T(t,1,2)$ 계획법의 index number들임.
(3) $T(0,t-1,t-2)$ 계획법의 index number들임.

참 고 문 헌

[1] Box, G.E.P., and Hunter, J.S. (1961). The 2^{k-p} Fractional Factorial Design I and II *Technometrics*, Vol. 3, 331-351.

[2] Box, G.E.P., and Meyer, R.D. (1986). An Analysis for Unreplicated Fractional Factorials, *Technometrics*, Vol. 28, 11-18.

[3] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional Replications in Asymmetrical Factorial Designs and Partially Balanced Arrays, *Sankhya*, Vol. 17, 143-164.

[4] Chopra, D.V., and Srivastava, J.N. (1974). Optimal Balanced 2^8 Fractional Factorial Designs of Resolution V, $37 \leq N \leq 51$, *Sankhya*, Ser. A 36, 41-52.

[5] Chopra, D.V. (1977). Trace-optimal Balanced 2^9 Reduced Designs of Resolution V with 46 to 54 Runs, *Journal of Indian Statistical Institute*, Vol. 47, 120-123.

[6] Chopra, D.V., Kipngeno, W.A.K., and Ghosh, S. (1986). More Precise Tables of Optimal Balanced 2^m Fractional Factorial Designs of Srivastava and Chopra, $7 \leq m \leq 10$, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 15, 115-121.

[7] Daniel, C. (1959). Use of Half-Normal Plots in Interpreting Factorial Two-Level Experiments, *Technometrics*, Vol. 1, 311-341.

[8] Finney, D.J. (1945). The Fractional Replication of Factorial Arrangements, *Annals of Eugenics*, Vol. 12, 291-301.

[9] Kim, S.I. (1992), Minimal Balanced 2^t Fractional Factorial Designs of Resolution V a Taguchi Method, *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 5, 19-28.

[10] Kim, S.I. (1994), Detection of Influential Interaction Effects in Parameter Design, *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 7, 201-211.

[11] Nishii, R., and Shirakura, T. (1986). More Precise Tables of Srivastava-Chopra Balanced Optimal 2^m Fractional Factorial Designs of Resolution V, $m \leq 6$, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 13, 111-116.

[12] Plackett, R.L., and Burman, J.P. (1946). Design of Optimal Multifactorial Experiments, *Biometrika*, Vol. 23, 305-325.

[13] Rao, C.R. (1947). Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays, *Journal of the Royal Statistical Society*, ser.B, 9, 128-140.

[14] Srivastava, J. N. (1965). Optimal Balanced 2^m Fractional Factorial Designs, *S.N. Roy Memorial Volume*, Univ. of North Carolina and Indian Statistical Institute.

[15] Srivastava, J. N. and Chopra, D.V. (1971). Balanced Optimal 2^m Fractional Factorial Designs of Resolution V, $m \leq 6$, *Technometrics*, Vol. 13, 257-269.