

일반혼합이항모형에서 평가일치도의 로버스트 추정¹⁾

엄 중 석²⁾

요 약

혼합이항모형은 생물학, 혹은 심리학분야에서 많이 다루는 모형이다. 이 혼합모형에서 진단자간의 일치도를 나타내는 κ 는 이항모형에 혼합되어지는 사전분포 $\xi(p)$ 에 따라 다른 형태를 갖는다. 그래서 $\xi(p)$ 에 의존적이지 않은 모수 κ 를 정의하고, 이에대한 실증적추정값 $\hat{\kappa}$ 을 일반혼합이항모형에서 κ 에 대한 추정값으로 사용하였다. 매개모수의 영향을 줄이기 위하여 모수를 직교화하였다. 베타이항모형으로 부터 표본을 추출하여 구한 최우추정값 $\hat{\kappa}_m$ 과 이 표본을 이용하여 구한 $\hat{\kappa}$ 을 비교하여 본 결과 κ 와 λ 가 직교하는 영역에서 $\hat{\kappa}$ 이 $\hat{\kappa}_m$ 보다 편기가 작아지는 경우가 있을 만큼 $\hat{\kappa}$ 이 효과적이었다.

1. 서론

실험을 통해 자료를 수집하는 경우 혹은 의사가 환자를 진단하는 경우 관찰자(observer)나 진단자(rater)간의 오류로 인하여 수집된 자료의 오차가 발생할 수 있다. 이러한 오류로 인한 오차는 상당히 중요한 오차원인이 됨으로 진단자간 혹은 관찰자간의 신뢰도(reliability) 정도를 평가하는 연구가 필요하다. 연속형자료에서는 급내상관계수(intraclass correlation coefficient)가 정의되어 이의 추정 및 분산분석을 통한 검정절차가(Bartko, 1966) 확립되어 있다. 반면에 범주형자료(categorical data)에서는 Cohen(1960)이 처음으로 2명의 진단자가 n 명의 관찰대상자를 c 개의 카테고리 분류하는 경우 κ 라는 계수를 2명의 진단자간 평가일치도(measure of agreement)로서 제시하였다. 그 후 진단자가 여러명 있는 경우(Fleiss, 1971) 등 다양한 경우에 κ 가 정의되었다. Kraemer(1979)는 모집단의 모수(parameter)들의 함수로 κ 를 정의하여 어느요소가 κ 에 영향을 미치는 가를 확인할 수 있으며 주어진 모형에서 κ 에 대한 통계적 추론을 가능케 하였다. 또한 κ 에 영향을 주는 요소를 확인함으로써 모형의 모수를 조절하여 평가일치도를 증가시킬 수 있다. Kramer가 정의한 κ 는 주어진 모형의 모수에 의존하기 때문에 모형에 대한 가정이 매우 중요하다.

모형에 대한 가정은 상황에 따라 다르다. 특정약물의 효과를 조사하기 위하여 그 약물투여의 효과가 발생하였는가 혹은 하지 않았는가의 이항결과를 갖는 실험을 수행한다고 하자. 그리고 실험대상인 각 동물의 태내에 있는 태아에 특정현상이 나타나면 그 약물의 효과가 있는 것으로 판

1) 이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

2) (136-792) 서울시 성북구 삼선동2가 389 한성대학교 전산통계학과.

정한다고 하자. 이와 같은 실험을 통해 얻은 자료를 설명하는 통계적 모형으로서 흔히 모형에 모수가 한개인 이항분포나 포아송 분포를 사용할 수 있는데, Haseman과 Soares(1976)는 이러한 모형의 사용결과 실제자료와 상당히 불일치 하는 것을 보였다. 왜냐하면 실험대상인 각 동물마다 내재적으로 갖고 있는 차이를 고려하지 않았기 때문이다. 그래서 두개의 모수를 가진 여러 혼합모형(mixing model)이 대안으로서 제시되었다(Haseman과 Kupper(1978)). Verducci, Mack과 DeGroot(1988)는 혼합이항분포만이 위의 경우 적당한 모형임을 보였으며 여러가지 혼합이항분포모형과 극한분포(limiting distribution)모형을 제시하였다.

진단자간의 일치도를 나타내는 κ 는 모형에 대한 가정에 따라 달라진다. 이 연구의 목적은 크게 두가지로 나눌 수 있다. 첫째로 모형에 대한 가정이 변함에 따라, 정의되는 κ 가 달라지므로 이항분포에 혼합되어지는 분포에 대한 특정지식이 없는 일반혼합이항분포에서 κ 에 대한 강력한 추정량(robust estimator)을 제시하는 것이다. 둘째로 모수들끼리 서로 직교적(orthogonal)으로 변환하여 직교모수(orthogonal parameter)로 모형에 대체시킴으로서 매개모수(nuisance parameter)의 추정값의 변화에 의존하지 않는 정확한 κ 의 추정값을 찾는 데 있다. Um(1991)은 베타-이항분포에서 모수공간을 서로 직교적으로 변환시켜 κ 를 추정하였으며, 최우추정량의 분포를 유도하여 (Bardorff-Nielsen, 1983) κ 에 대한 우도비검정을 제시하였다.

2. 일반혼합모형에서의 모수정의

(1) 일반혼합이항모형(generalized mixture of binomial distribution)

다음과 같은 상황을 생각해 보자. 관찰모집단으로 부터 m 명의 관찰대상자들이 임의로 뽑혔다고 하자. 그리고 각 관찰대상자마다 n_i 명의 진단자(혹은 관찰자)들이 진단자 모집단으로 부터 뽑혔다고 하자. 그리고 Y_{ij} 는 만약 j 번째 진단자가 i 번째 관찰대상자에게 양성이라고 진단할 때 1 이고 그 외의 경우는 0 이라고 하자. 또한 Y_{ij} 와 $Y_{i'j}$ 는 서로 독립이라고 가정하자. 그러면 $Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ 는 모수는 (n_i, p_i) 인 이항분포를 갖는다. 여기서 p_i 는 i 번째 관찰대상자에게 임의로 뽑힌 진단자가 양성이라는 판단을 내릴 확률을 의미한다. 결과로 우리는 m 개의 이항분포를 갖는 표본을 얻을 수 있다. 만약 여기서 p_i 가 각 표본마다 동일하다고 취급하면 Y_{ij} 와 $Y_{i'j}$ 는 서로 상관관계를 갖게된다. 이런결과로 Y_{ij} 와 $Y_{i'j}$ 가 서로 독립이라는 처음 가정과 서로 모순된 상황이 발생한다. 이러한 이유로 혼합이항모형이 사용되어진다. 확률은 각 표본마다 변하기 때문에 p_i 는 확률분포함수를 가지며 이를 $\xi(p_i)$ 라 하자. 여기서 p_1, p_2, \dots, p_m 은 서로 독립이다. 이를 다음과 같은 관계식으로 표현할 수 있다.

$$f(y_i | p_i) = \binom{n_i}{y_i} p_i^{y_i} (1-p_i)^{n_i - y_i}, \quad i=1, \dots, m.$$

$$f(y_i) = \int_0^1 f(y_i|p_i) \xi(p_i) dp_i, y_i = 0, \dots, n_i.$$

즉 p_i 가 조건으로 주어진 Y_i 의 조건분포는 이항분포인 반면에 Y_i 의 주변분포 혼합이항분포를 갖는다. 여기서 사전분포 $\xi(p)$ 에 대한 정보가 전혀 없을 때 즉 $\xi(p)$ 를 임의의 분포라고 가정했을 때, Y_i 의 주변분포를 일반혼합이항분포라고 부른다.

(2) 일반혼합이항모형에서 모수의 정의 및 추정량

관찰대상자에 대한 여러 진단자간의 평가일치도 κ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa = \frac{p_o - p_c}{1 - p_c}$$

여기서 p_o 는 관찰된 일치도이며, p_c 는 우연적으로 기대되는 일치도를 의미하며,

$$p_c = \mu^2 + (1 - \mu)^2$$

로 정의된다.(Cohen, 1960; Fleiss, 1973). Kraemer(1979)는 κ 를 다음과 같이 정의하였으며 이 정의에 따라 일반혼합분포모형에서 κ 를 제시하고자 한다.

$$\kappa = \frac{E(p_i^2 + (1 - p_i)^2) - (\mu^2 + (1 - \mu)^2)}{1 - (\mu^2 + (1 - \mu)^2)}$$

여기서 $\mu = E(p_i)$ 이다. 또한 다음과 같이 정의하자.

$$P(Y=y) = a_y$$

그러면 μ 와 $p_o = E(p^2 + (1 - p)^2)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^1 \sum_y p f(y|p) \xi(p) dp \\ &= \sum_y \left[\int_0^1 p f(p|y) dp \right] f(y) \\ &= E_Y E_{PY}(p) \\ &= \sum_{y=0}^r a_y m_y \end{aligned}$$

여기서 $m_y = E_{PY}(p)$ 이며 p 의 사후평균이며, 또한 $q_y = E_{PY}(p^2 + (1 - p)^2)$ 라 정의하면 이는 Y 가 주어졌을 때 2명의 진단자간에 진단이 일치되는 비율의 사후기대값이다.

$$p_o = E(p^2 + (1 - p)^2) = \int_0^1 \sum_y (p^2 + (1 - p)^2) f(y|p) \xi(p) dp$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_y \left[\int_p (p^2 + (1-p)^2) f(p|y) dp \right] f(y) \\
 &= E_Y E_{P|Y} (p^2 + (1-p)^2) \\
 &= \sum_{y=0}^r a_y q_y
 \end{aligned}$$

그래서 κ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\kappa = \frac{\sum_{y=0}^r a_y q_y - [(\sum_{y=0}^r a_y m_y)^2 + (1 - \sum_{y=0}^r a_y m_y)^2]}{1 - [(\sum_{y=0}^r a_y m_y)^2 + (1 - \sum_{y=0}^r a_y m_y)^2]}$$

그런데 $\xi(p)$ 에 대한 가정이 전혀 없으므로 m_y 나 혹은 q_y 를 구할 수 없다. 그래서 Y 가 주어졌을 때 m_y 나 혹은 q_y 에 대한 다음과 같은 실증적추정량(empirical estimator)을 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 \widehat{m}_y &= \frac{y}{r} \\
 \widehat{q}_y &= \frac{\binom{y}{2} + \binom{r-y}{2}}{\binom{r}{2}}
 \end{aligned}$$

여기서 \widehat{m}_y 는 양성이라고 진단한 진단자들의 관찰된 비율이며, \widehat{q}_y 는 진단이 일치된 쌍(pair)의 관찰된 비율이다. κ 의 추정량 $\widehat{\kappa}$ 은 표본으로부터의 a_i 의 실증적추정량을 구하여 이를 정의식에 대입하여 구할 수 있다.

3. 모수의 직교화

(1) 모수의 직교성(orthogonality)

다음과 같은 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 의 함수인 log 우도함수를 $l(\theta)$ 라 하자. 그러면 θ_i 들은 다음조건을 만족시킬때 서로 직교한다고 한다.

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} l(\theta)\right) = 0, \quad \text{모든 } i, j (i \neq j)$$

위의 식이 모든 θ 에서 성립하면 전체적직교(global orthogonality)라 하며, θ 의 특정값에서만 성립하면 지역적직교(local orthogonality)라고 한다. 전체적직교가 성립하는 경우는 드물지만 지역적직교가 성립하는 특정 θ 값은 찾을 수 있다. 직교성이 성립되면 다음과 같은 성질을 만족시킨다. 단순하게 두개의 모수만 가정하여 $\theta = (\kappa, \lambda)$ 라 하고 최우추정량을 $\hat{\kappa}, \hat{\lambda}$ 라고 하자.

- (i) $\hat{\kappa}$ 과 $\hat{\lambda}$ 은 근사적으로 서로 독립이다.(asymptotically independent)
- (ii) λ 를 알고있던지 모르던지 $\sqrt{n} \hat{\kappa}$ 의 근사적 분산은 동일하다.
- (iii) 수치적으로 $\theta = (\kappa, \lambda)$ 를 추정하기 위하여 정규방정식을 푸는것이 용이하다(Ross, 1970).
- (iv) λ 를 알고있을 경우의 κ 의 최우추정값을 $\hat{\kappa}_\lambda$ 라 하면, 만약 $\hat{\lambda} - \lambda = O_p(1/\sqrt{n})$ 이면 $\hat{\kappa}_\lambda - \hat{\kappa} = O_p(1/n)$ 이다.

모수를 직교화 시키는 방법은 Huzubazar(1950, 1956), 그리고 Cox 와 Reid(1987, 1993) 등에서 설명하였다.

(2) 일반혼합이항모형에서의 모수의 직교화와 정보행렬

앞에서 $P(Y=y) = a_y$ 라고 정의한것을 이용하여 혼합이항분포를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(y) = \int_0^1 f(y|p) \xi(p) dp = \prod_{j=0}^r a_j^{x_j}$$

여기서 y 는 양성이라고 진단한 진단자의 수자인데 만약 $y=j$ 이면 $x_j=1$ 이며 그 이외의 경우에는 $x_j=0$ 이다. 여기서 (x_1, x_2, \dots, x_r) 은 모수가 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_r)$ 인 다항분포를 따르며 $\sum_{j=0}^r a_j = 1$ 이다. 일반혼합이항모형에서의 모수 (a_1, a_2, \dots, a_r) 에 대한 정보행렬은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\frac{\partial^2 l}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{-x_0}{(1 - \sum_{k=1}^r a_k)^2},$$

여기서 $x_0 = 1 - \sum_{j=1}^r x_j$ 이다. 정보행렬 I_{aa} 를 구하면 다음과 같다.

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial a_i \partial a_j}\right) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^r a_k} + \frac{1}{a_i} I(i=j), \quad \text{여기서 } I(i=j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ 이다.}$$

이것을 행렬 I_a 로 표시하면, 다음과 같다.

$$I_a = \text{Diag}(a_j^{-1}) + \lambda^{-1} 1' 1.$$

여기서 $\text{Diag}(a_j^{-1})$ 는 대각행렬이고, $1' = (1, 1, \dots, 1)$ 이다. 행렬 I_a 의 각 원소들은 모두 1보다 큰

양의 값을 갖으므로, 직교성을 갖는 새로운 모수로의 모수변환이 필요하다. 새로운 모수는 관심의 대상인 일치도를 나타내는 모수 카파를 포함해야 하며 카파에 대한 직교모수도 포함해야 한다. 그래서 새로운 모수를 $\theta = (\lambda, \kappa, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$ 로 표시하자. 직교화모수를 찾기 위하여 Cox-Reid(1987)의 미분방정식을 만족시키는 전체적직교모수를 구해야한다. 그러나 앞에서도 언급하였듯이 전체적직교가 성립하는 경우가 드물기때문에 의미있는 모수로 대체시켜 지역적직교가 각모수의 어느 경우에 성립하는지를 검사하여, 이 경우 카파의 추정량의 성질을 조사하고자 한다. 확률 $P(Y=0)$ 는 임의의 관찰자를 양성이라고 진단한 진단자의 수가 0일 확률로서 양성반응의 발생가능성이 높은가 혹은 매우 희귀한 경우인가를 알 수 있는 척도가 되므로 의미있는 모수가 되며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda = P(Y=0) = 1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i$$

Crowder(1979)는 μ 의 추정량인 \bar{Y} 의 조건분포에서 κ 의 조건우도함수를 조사하여 κ 가 μ 에 매우 의존적임을 보였다. 이러한 이유로 모수 μ 도 의미있는 모수이지만 이를 선택하지 않았다. 직접 $(\lambda, \kappa, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$ 의 정보행렬을 구하기 보다는 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \rightarrow (\lambda, \kappa, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$ 변환의 Jacobian행렬 J 를 구하여 다음과 같은 관계에 의하여 구한다.

$$I_{\theta} = J^{-1} I_{\alpha} J'^{-1}$$

Jacobian행렬 J 의 첫번째 행은 -1 이며, 두번째 행은 p_o 와 p_c 의 정의에 의하여 구하면, $(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_r)$ 인데 여기서 d_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$d_i = \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_i} = - \frac{(1-p_c)(1-q_i) + (1-p_o)c_i}{(1-p_c)^2}$$

$$c_i = \frac{\partial p_c}{\partial \alpha_i} = - \frac{2i(1-2\mu)}{r}$$

이를 이용하여 J 를 분할하여 표현하면 다음과 같은데 여기서 J_{11} 은 2×2 행렬이며, J_{12} 은 $2 \times (r-2)$ 행렬이며, J_{21} 은 $(r-2) \times 2$ 의 영행렬이고 J_{22} 은 단위행렬이다.

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

여기서 관심있는 관계는 κ 와 λ 의 관계이므로 κ 와 λ 의 정보행렬값을 구해보면 다음과 같다. 먼저 J^{-1} 의 첫 두행을 $J_{\lambda\kappa}$ 라 하면,

$$J_{\lambda\kappa} = \frac{1}{d_1 - d_2} \begin{bmatrix} d_2 & 1 & (d_2 - d_3) & \dots & (d_2 - d_r) \\ -d_1 & -1 & -(d_1 - d_3) & \dots & -(d_1 - d_r) \end{bmatrix}$$

그러면 다음과 같은 정보행렬값을 얻는다.

$$i_{\lambda\lambda} = \frac{1}{(d_1-d_2)^2} \left[\frac{d_2^2}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=3}^r \frac{(d_2-d_i)^2}{\alpha_i} + \frac{((r-1)d_2 + (1-\sum_{i=3}^r d_i)^2)}{\lambda} \right],$$

$$i_{\kappa\kappa} = \frac{1}{(d_1-d_2)^2} \left[\frac{d_1^2}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=3}^r \frac{(d_1-d_i)^2}{\alpha_i} + \frac{((r-1)d_1 + (1-\sum_{i=3}^r d_i)^2)}{\lambda} \right],$$

$$i_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{(d_1-d_2)^2} \left[\frac{d_1 d_2}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=3}^r \frac{(d_1-d_i)(d_2-d_i)}{\alpha_i} + \frac{((r-1)d_1 + (1-\sum_{i=3}^r d_i))((r-1)d_2 + (1-\sum_{i=3}^r d_i))}{\lambda} \right].$$

사전분포 $\xi(p)$ 에 대한 지식이 없을 때, 데이터로부터 λ 와 α_i , $i=1,2,\dots,r$ 에 대한 실증적 추정량을 구하고, 이를 이용하여 $i_{\lambda\kappa}$, $i_{\lambda\lambda}$ 와 $i_{\kappa\kappa}$ 를 구하여 어떤 조건에서 지역적직교가 성립하는가를 조사할 수 있다. 또한 (κ, λ) 의 최우추정량 $(\hat{\kappa}_m, \hat{\lambda}_m)$ 의 근사적 상관계수도 구할 수 있다.

(3) 지역적직교 조건

일반혼합이항모형에서 κ 와 λ 가 지역적직교가 성립하는 조건을 찾고자 한다. 진단자의 수 r 의 수가 커지면 α_i 들이 작은값을 갖게되는 경우가 있어, 현실적으로 적용는데 어려움이 따른다. 대체로 $r \leq 8$ 인 경우에 지역적직교가 성립하며, $r=5$ 인 경우로 제한하여 지역적직교가 성립되는 여러조건을 조사하였다. <표 1>은 $r=5$ 일 때, $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)$ 의 값을 각각 0.01에서 0.94까지 0.01씩 증가시키면서 μ, κ , $i_{\lambda\kappa}$ 그리고 $\text{corr}(\hat{\lambda}_m, \hat{\kappa}_m)$ 을 구하여 $|i_{\lambda\kappa}| < 0.0005$ 인 경우만 열거한 표이다. 양성으로 진단할 진단자의 비율인 μ 가 (0.5, 0.8) 사이에 있을 때 지역적직교가 성립하므로, 이에 대응한 $\lambda = P(Y=0)$ 가 작을 때 성립한다. 특히 $\lambda < 0.04$ 이므로 양성반응이 자주 발생하는 경우에 κ 와 λ 의 모수화가 κ 의 추정에 있어서 λ 의 영향을 줄일 수 있다. 또한 $\kappa < 0.4$ 로서 일치도가 낮은것을 알 수 있다. 지역적직교가 성립되는 경우의 $(\hat{\kappa}_m, \hat{\lambda}_m)$ 의 근사적 상관계수는 $|\text{corr}(\hat{\lambda}_m, \hat{\kappa}_m)| < 10^{-4}$ 의 값을 가져서 표에서 생략하였다. 여기서 표로 제시하지는 않았지만 $0.8 \leq \mu$ 일 경우는 $(\hat{\kappa}_m, \hat{\lambda}_m)$ 의 근사적 상관계수가 0.85 이상의 높은 상관관계를 갖는다. <그림 2>는 위의관계를 그래프로 나타낸 것이다. 그래프에서 보듯이 μ 가 작아지면서 동시에 κ 가 커지는 경우 $|i_{\lambda\kappa}|$ 는 증가하며 μ 가 1로 접근하여도 $|i_{\lambda\kappa}|$ 커진다. 근사적으로 지역적직교 ($|i_{\lambda\kappa}| < 0.0005$)를 성립시켜 주는 경우에는 $\lambda < 0.04$ 를 만족시킨다. 지역적직교가

성립하는 경우의 Y 의 분포를 대략적으로 특징지워 보면, 왼쪽으로 기울었거나(skewed to the left), 혹은 쌍봉분포(bimodal)를 갖는데 쌍봉인 경우는 Y 의 큰 값에 더 높은 확률을 갖는다.

4. 모의실험결과

사전분포 $\xi(p)$ 를 $r=5$ 인 베타분포라고 가정하고, 모수 (κ, μ) 를 변화시키면서 500개의 표본을 추출하여 λ, α_i 의 실증적인 추정값을 구하고, 이를 이용하여 κ 의 추정값을 구하였다. 이러한 작업을 100 반복수행하여 κ 의 추정값의 평균과 표준오차를 구하고 또한 같은 데이터를 이용하여 κ 의 최우추정값의 평균과 표준오차를 구한 결과가 <표 3>이다. 여기서 $\hat{\kappa}_m$ 은 κ 의 최우

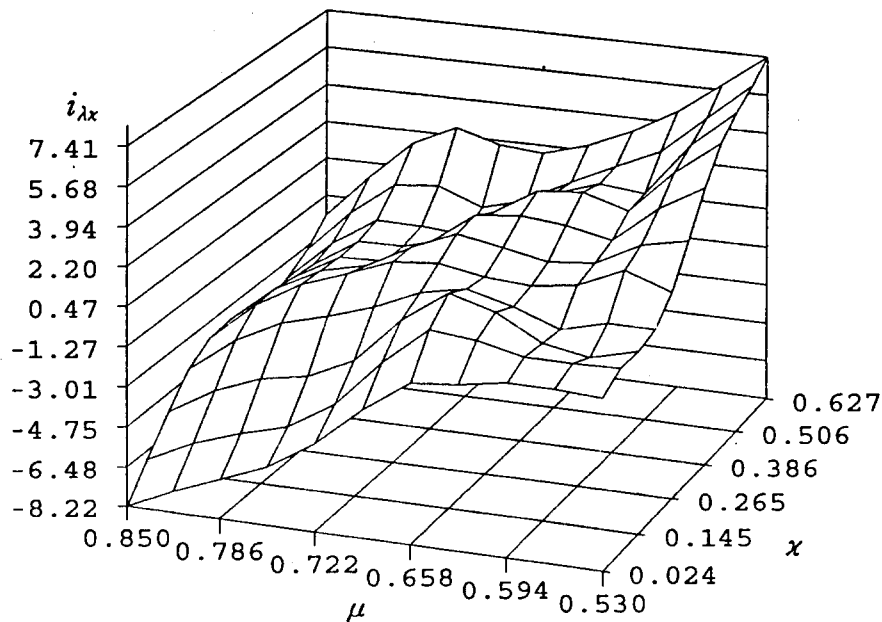
<표 1> $|i_{\kappa}| < 0.0005$ 인 경우의 $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)$ 와 μ, κ, i_{κ} 값

λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ	κ	i_{κ}
0.01	0.36	0.24	0.05	0.04	0.3	0.53	0.3296	0.00012
0.02	0.13	0.01	0.32	0.11	0.41	0.75	0.2708	-0.00008
0.02	0.3	0.03	0.29	0.15	0.21	0.576	0.2384	-0.00017
0.02	0.33	0.19	0.05	0.22	0.19	0.538	0.2678	-0.00043
0.03	0.05	0.06	0.27	0.42	0.17	0.702	0.0774	-0.00007
0.03	0.07	0.03	0.4	0.28	0.19	0.68	0.0855	0.00031
0.03	0.08	0.03	0.57	0.02	0.27	0.656	0.1137	0.00042
0.03	0.15	0.44	0.01	0.16	0.21	0.55	0.204	-0.0001
0.03	0.18	0.28	0.22	0.14	0.15	0.542	0.1379	-0.00049
0.03	0.25	0.03	0.17	0.35	0.17	0.614	0.2405	0.00046
0.03	0.27	0.09	0.33	0.07	0.21	0.554	0.2148	-0.00011
0.04	0.05	0.34	0.1	0.03	0.44	0.67	0.3306	-0.00048
0.04	0.06	0.05	0.14	0.16	0.55	0.794	0.3825	-0.0001
0.04	0.06	0.08	0.31	0.14	0.37	0.712	0.2344	-0.00045
0.04	0.06	0.09	0.1	0.33	0.38	0.752	0.2761	-0.00013
0.04	0.06	0.23	0.03	0.43	0.21	0.676	0.1964	-0.00022
0.04	0.06	0.45	0.13	0.02	0.3	0.586	0.2168	-0.0002
0.04	0.08	0.23	0.32	0.26	0.07	0.578	0.0448	-0.00047
0.04	0.11	0.04	0.03	0.5	0.28	0.736	0.264	-0.00004
0.04	0.11	0.04	0.44	0.11	0.26	0.65	0.1736	0.00011
0.04	0.12	0.03	0.14	0.43	0.24	0.704	0.2274	-0.00041
0.04	0.13	0.28	0.26	0.14	0.15	0.556	0.125	0.00007
0.04	0.14	0.32	0.03	0.39	0.08	0.566	0.141	-0.00021
0.04	0.15	0.03	0.24	0.22	0.32	0.682	0.2853	-0.00003
0.04	0.16	0.05	0.38	0.24	0.13	0.602	0.1277	0.00032
0.04	0.16	0.07	0.01	0.35	0.370	0.716	0.3804	-0.00007
0.04	0.18	0.19	0.32	0.1	0.17	0.554	0.1541	0.00036

추정값의 평균을 \hat{k} 은 제 2절에서 정의된 k 의 실증적추정량이다. 표 1.3에서 보듯이 $|\hat{k} - \hat{k}_m| < 0.01$ 을 만족시켜, \hat{k} 이 최우추정량 \hat{k}_m 과 차이가 매우 적음을 알 수 있다. \hat{k}_m 이 \hat{k} 보다 많은 경우 편기가 작지만 λ 가 작은 경우 혹은 $\mu=0.5$ 에서 $0.2 \leq k \leq 0.7$ 인 경우는 근소하게나마 \hat{k} 의 편기가 작다. 반면에 표준오차가 작아 매우 안정적임을 알 수 있다. 모의 실험결과에서 보듯이 로버스트추정량 \hat{k} 이 베타이항모형에서 매우 효과적임을 알 수 있다.

5. 결론

혼합이항모형은 생물학, 혹은 심리학분야에서 많이 다루는 모형이다. 이 혼합모형에서 진단자간의 일치도를 나타내는 k 는 이항모형에 혼합되어지는 사전분포 $\xi(p)$ 에 따라 다른 형태를 갖는다. 그래서 $\xi(p)$ 에 대한 가정이 틀렸을 때는 k 에 대한 추정값 역시 틀린 값을 얻을 가능성이 크다. 그래서 $\xi(p)$ 에 의존적이지 않은 모수 k 를 정의하고, 이에대한 실증적추정값 \hat{k} 을 일반혼합이항모형에서 k 에 대한 추정값으로 사용하였다. 베타이항모형으로 부터 표본을 추출하여 구한 최우추정값과 이 표본을 이용하여 구한 \hat{k} 을 비교하여본 결과 k 와 λ 가 직교하는 영역에서 \hat{k} 이 \hat{k}_m 보다 편기가 작아지는 경우가 있을 만큼 \hat{k} 이 효과적이며, 또한 \hat{k}_m 과 차이가 근사적으로 작았다. 이를 이용하여 일반혼합이항모형에서 k 와 λ 가 직교하는 영역에서 k 에 대한 로버스트검정법에 대한 연구도 생각할 수 있다.



<그림 2> $i_{\lambda k}$ 와 μ 와 k 의 그래프

<표 3> 100회의 시뮬레이션 ($r=5, n=500$) 에 의해 얻은 $\hat{\lambda}$, \hat{k} 그리고 \hat{k}_m 의 근사적 평균과 표준오차

K	$\mu=0.1$			$\mu=0.5$			$\mu=0.9$		
	$\hat{\lambda}$ 평균 $\pm (s.e.)$	\hat{k} 평균 $\pm (s.e.)$	\hat{k}_m 평균 $\pm (s.e.)$	$\hat{\lambda}$ 평균 $\pm (s.e.)$	\hat{k} 평균 $\pm (s.e.)$	\hat{k}_m 평균 $\pm (s.e.)$	$\hat{\lambda}$ 평균 $\pm (s.e.)$	\hat{k} 평균 $\pm (s.e.)$	\hat{k}_m 평균 $\pm (s.e.)$
0.1	0.6474 (0.0218)	0.0943 (0.0236)	0.0956 (0.0076)	0.0664 (0.0103)	0.1015 (0.0167)	0.1015 (0.0085)	0.0006 (0.0010)	0.0965 (0.0236)	0.0964 (0.0078)
0.2	0.6922 (0.0201)	0.1991 (0.0292)	0.1991 (0.0261)	0.1071 (0.0139)	0.2015 (0.0204)	0.2013 (0.0265)	0.0030 (0.0026)	0.2001 (0.0314)	0.1994 (0.0261)
0.3	0.7294 (0.0200)	0.3001 (0.0336)	0.3011 (0.0455)	0.1514 (0.0167)	0.2955 (0.0229)	0.2954 (0.0446)	0.0077 (0.0039)	0.3020 (0.0359)	0.3024 (0.0459)
0.4	0.7614 (0.0220)	0.4054 (0.0442)	0.4053 (0.0602)	0.1979 (0.0170)	0.3989 (0.0222)	0.3988 (0.0595)	0.0149 (0.0054)	0.3990 (0.0379)	0.3993 (0.0596)
0.5	0.7897 (0.0205)	0.5011 (0.0368)	0.5006 (0.0650)	0.2461 (0.0200)	0.4994 (0.0262)	0.4991 (0.0649)	0.0245 (0.0056)	0.4910 (0.0405)	0.4915 (0.0648)
0.6	0.8153 (0.0179)	0.5969 (0.0368)	0.5977 (0.0603)	0.2955 (0.0200)	0.5969 (0.0219)	0.5964 (0.0608)	0.0362 (0.0080)	0.5977 (0.0412)	0.5980 (0.0613)
0.7	0.8387 (0.0148)	0.6960 (0.0275)	0.6963 (0.0476)	0.3457 (0.0225)	0.6982 (0.0200)	0.6981 (0.0473)	0.0498 (0.0091)	0.6971 (0.0322)	0.6968 (0.0476)
0.8	0.8604 (0.0167)	0.8018 (0.0342)	0.8018 (0.0279)	0.3966 (0.0214)	0.8012 (0.0192)	0.8011 (0.0280)	0.0651 (0.0112)	0.8025 (0.0340)	0.8020 (0.0276)
0.9	0.8808 (0.0160)	0.8798 (0.0190)	0.8813 (0.0130)	0.4481 (0.0203)	0.8930 (0.0097)	0.8968 (0.0078)	0.0819 (0.0088)	0.8807 (0.0181)	0.8832 (0.0126)

참 고 문 헌

- [1] Barndorff-Nielsen, O.E. (1983). On a formular for the distribution of a m.l.e., *Biometrika*, Vol. 70, 343-365.
- [2] Bartko, J.J. (1966). The intraclass correlation coefficient as a measure of reliability, *Psycho. Rep.*, Vol. 19, 3-11.
- [3] Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales, *Educational and Psychological Measurement*, Vol. 20, 30-46.
- [4] Cox, D.R. and Reid, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference, *J.R.S.S. B*, 41, 1-39.
- [5] Cox, D.R. and Reid, N. (1993). A note on the calculation of adjusted profile likelihood, *J.R.S.S. B*, 55, 467-471.
- [6] Crowder, M.J. (1979). Inference about the intraclass correlation coefficient in the beta-binomial Anova for proportions, *J.R.S.S. B*, 41, 230-234.
- [7] Fleiss, J.L. (1971). Measuring nominal scale agreement among many raters, *Psychol. Bulletin*, Vol. 76, 378-382.
- [8] Haseman, J.K. and Kupper, L.L. (1978). The use of a correlated Binomial Model for the analysis of certain toxicological experiments, *Biometrics*, Vol. 34, 69-76.
- [9] Haseman, J.K. and Soares, E.R. (1976). The distribution of fetal death in control mice and its implications on statistical tests for dominant lethal effects, *Mutation Research*, Vol. 41, 277-288.
- [10] Huzurbazar, V.S. (1950). Probability distribution and orthogonal parameters, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 46, 281-284.
- [11] Huzurbazar, V.S. (1956). Sufficient statistics and orthogonal parameters, *Sankhya*, Vol. 17, 217-220.
- [12] Kraemer, H.C. (1979). Ramifications of a population model for kappa as a coefficient of reliability, *Psychometrika*, Vol. 44, 461-472.
- [13] Um, J.S. (1991). *Conditional inference about kappa in the beta-binomial model.*, Ph.D. dissertation, Ohio state univ.
- [14] Verducci, J.S., Mack, E.M. and DeGroot, M.H. (1988). Estimating multiple rater agreement for a rare diagnosis, *J. Multivariate Analysis*, Vol. 27, 512-534.