한국통계학회논문집 제2권 2호
1995년 12월 pp. 33-42

종속관측중단이 관측중단된 자료의 적합도 검정에 미치는 영향[1]

김주한[2], 김정란[2]

요 약

종속 관측중단(dependent censoring)이 카이제곱 형태의 적합도 검정에 어떻게 영향을 미치고 종속정도와 관측중단된 정도에 따라 검정의 오류와 검정력이 변화하는 형태를 시뮬레이션을 통해 경험적으로 알아보았다. Sakar(1987)가 제안한 이변량 지수분포로부터 종속 관측중단된 자료를 만들어 Kim(1993)이 제안한 방법과 Akritas(1988)가 제안한 적합도 검정방법을 적용하였다. 전체적으로 Kim(1993)의 검정법이 더 효과적이었으며 관측중단된 정도가 클 때는 종속정도에 따라 검정의 오류와 검정력이 무척 크게 변하였다.

1. 서론

(X_1,Y_1), ... , (X_n,Y_n)은 서로 독립이고 분포함수 $H(x, y)$를 따르는 이변량 확률변수이고 X_i의 주변분포함수(marginal distribution)는 $F(x)$, Y_i 의 주변분포함수(marginal distribution)는 $G(y)$라 하자. X_i가 Y_i에 의해 오른쪽으로부터 관측중단되었다면 우리는 (X_i, Y_i) 를 직접 관측할 수 없고 $Z_i = \min(X_i, Y_i)$와 Z_i가 관측중단된 것인지 아닌지를 나타내주는 $\delta_i = I(Z_i = X_i)$를 관측하게 된다. 우리가 관심있는 변수는 X_i이고, Y_i는 관측중단변수(censoring variable)라 부른다.

X_i의 분포함수 F가 특정한 분포함수 F_0와 같다는 가설 $H_0 : F = F_0$ 을 검정하는 적합도 검정방법중 카이제곱 형태의 검정방법은 Kim(1993)이 제안한 검정방법과 Akritas(1988)가 제안한 검정방법이 있다. 이러한 방법은 X_i와 Y_i가 독립이라고 가정하고 얻어진 것이다. 그러므로 실제로 X_i와 Y_i가 독립이 아닐 경우에 그러한 방법을 사용하면 가설검정에 있어서 큰 오류를 범할 가능성이 있다. 그러나 우리가 얻은 관측중단된 자료 (Z_i,δ_i)로부터 X_i와 Y_i의 종속정도나 그것이 미치는 영향을 이론적으로 밝히는 것은 불가능하다. 본 논문에서는 X_i와 Y_i의 종속관계가 적합도 검정에 미치는 영향을 시뮬레이션을 통하여 경험적으로 알아보고 두 카이제곱 형태의 검정방법을 비교해 보고자 한다. 시뮬레이션에서 사용한 (X_i,Y_i) 의 분포는 Sakar(1987)가 제안한 이변량 지수분포이다. X_i와 Y_i의 종속정도, 관측중단된 정도, 표본의 크기, 유의수준의 크기 등을 변화시켜 귀무가설이 사실일 때와 귀무가설이 틀린 경우에 대하여 시뮬레이션을 하였다. 전체적으로 Kim(1993)의 검정방법이 Akritas(1988)의 검정방법보다 효과적인 것으로 나타났고, X_i와 Y_i의 종속정도가 약할 때는 관측중단된 정도와 관계없이 오류의 크기가 크지 않았지만, X_i와 Y_i가 어느

---

1) 이 논문은 1993년도 학술진흥재단 자유공모과제 학술연구 조성비에 의해 연구되었음.
2) (305-764)대전광역시 유성구 궁동 220번지, 충남대학교 자연과학대학 통계학과

정도이상 종속되어 있을 경우는 관측중단확률(censoring probability)이 커질수록 오류의 크기가 무척 크게 나타났다.

2. 적합도 검정통계량

임의로 관측중단된 자료(randomly censored data)는 $Z_j=\min(X_j, Y_j)$ 와 $\delta_j=I(Z_j=X_j)$, $j=1,\cdots,n$ 이다. 여기서 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 과 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$은 각각 연속인 분포함수 $F(x)$와 $G(y)$로부터 얻은 확률표본이다. X_j와 Y_j는 모두 음이 아닌 확률변수이고 그들은 서로 독립이라고 가정한다. 우리가 관심있는 변수 X_j의 분포함수 F가 특정한 분포함수 F_0와 같다는 가설 $H_0: F=F_0$ 을 검정하기 위한 카이제곱 형태의 검정방법으로는 Kim(1993)이 제안한 검정방법과 Akritas(1988)가 제안한 검정방법이 있다. Kim(1993)의 검정방법은 F의 카플란-마이어추정치를 이용하는 것이고, Akritas(1988)의 검정방법은 관측중단되지 않은 자료(uncensored data)를 사용하는 것이다. 이 절에서는 두가지 방법에 대해 간단히 설명하려 한다.

$A_i=[a_{i-1}, a_i)$, $i=1,\cdots,k$, $0=a_0<a_1<\cdots<a_{k-1}<a_k=\infty$를 $[0,\infty)$의 분할이라고 하자. $\hat{F}$과 $\hat{G}$은 각각 F와 G의 카플란-마이어 추정치(Kaplan 과 Meier(1958))이고 $\hat{E}$은 $Z_1,\cdots,Z_n$ 에 대응하는 경험적 분포함수(empirical distribution function)라 하자. 즉, $\hat{E}(z)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Z_j\le z)$. n_{1i}는 각 칸 A_i에 있는 관측중단되지 않은 자료의 개수를 나타낸다. p_i, q_i, r_i, w_i, π_i, $i=1,\cdots,k$, 를 다음과 같이 정의하자.

$$p_i = \int_{A_i} dF_0 , \quad q_i = 1-F_0(a_i) , \quad r_i = \int_{A_i} \frac{dF_0}{(1-F_0)^2\,(1-\hat{G})}$$

$$w_i = q_{i-1}\hat{F}(a_i) - q_i\hat{F}(a_{i-1}) , \qquad \pi_i = \int_{A_i} \frac{1-\hat{E}}{1-F_0} dF_0$$

그러면 $H_0: F=F_0$ 을 검정하기 위해 Kim(1993)이 제안한 검정통계량 Q_K와 Akritas(1988)가 제안한 검정통계량 Q_A는 다음과 같이 주어진다.

$$Q_K = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n(w_i-p_i)^2}{r_i q_i^2 q_{i-1}^2} , \quad Q_A = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_{1i}-n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

귀무가설 $H_0: F=F_0$ 이 사실이면, Q_K의 극한분포는 자유도가 $k-1$ 인 카이제곱분포이고, Q_A의 극한분포는 자유도가 k인 카이제곱분포이다.

3. 이변량 지수분포

현재까지 알려진 많은 이변량 지수분포중 Marshall 과 Olkin(1967)이 제안한 이변량 지수분포가 가장 널리 쓰이고 있다. 그들의 이변량 지수분포는 두 확률변수 X와 Y의 주변분포가 지수분포이고 다른 좋은 성질을 가지고 있지만, 분포함수 자체가 연속적이지 못하고 $\Pr(X=Y)>0$ 이 되는 단점이 있다.

연속 이변량 지수분포로는 Block 과 Basu(1974)가 제안한 것과 Sakar(1987)가 제안한 두 종류가 있는데, Block 과 Basu의 분포는 주변분포가 지수분포가 아니고 Sakar의 분포는 LMP(loss of memory property)를 가지지 못한다. 실제로 주변분포가 지수분포이면서 LMP를 가지는 이변량 지수분포는 존재하지 않으므로 우리는 두가지 성질중 더 중요하게 생각되는 성질을 가진 분포를 사용하여야 한다. 본 논문에서는 LMP보다는 두변수의 주변분포에 관심이 있으므로 Sakar의 연속 이변량 지수분포를 사용하려 한다. Sakar(1987)는 자신이 제안한 이변량 지수분포를 따르는 확률변수 (X, Y) 를 다음과 같이 나타낼 수 있음을 증명하였다.

확률변수 Z_1, Z_2, Z_3 는 서로 독립이며 각각 모수가 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 인 지수분포를 따르고, V는 Z_1, Z_2, Z_3와 독립이고 $U(0, 1)$ 분포를 따르는 확률변수이다. $X_1 = \min(Z_1, Z_3)$, $Y_1 = \min(Z_2, Z_3)$ 라 하면 이변량 지수분포를 따르는 확률변수 (X, Y) 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$X = X_1 + \{1-I(Z_1>Z_2)\}\{\lambda_1^{-1}h^{-1}(V^r h(\lambda_1 Y_1))-X_1\}$$
$$Y = Y_1 + I(Z_1>Z_2)\{\lambda_2^{-1}h^{-1}(V^r h(\lambda_2 X_1))-Y_1\} \quad .$$

여기서 $h(x) = 1-e^{-x}$ 이고 $r = (\lambda_1+\lambda_2)/\lambda$, $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 이다.

Sakar(1987)는 위와같이 표현된 이변량 확률변수 (X, Y) 가 다음과 같은 성질을 가짐을 밝혔다.

1. X와 Y의 주변분포는 각각 모수가 $\lambda_1+\lambda_3$, $\lambda_2+\lambda_3$ 인 지수분포이다.
2. $\min(X,Y)$ 는 모수가 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$인 지수분포를 따른다.
3. $\min(X,Y)$ 와 $I(X>Y)$는 서로 독립이다.
4. $\Pr(X>Y) = \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$이다.
5. X와 Y의 상관계수 $\rho(X,Y)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\rho(X,Y) = \frac{\lambda_3}{\lambda}(1+\tau) \ , \ \tau = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{\lambda+(\lambda_1+\lambda_2)j} \left(\lambda_1^j \prod_{k=1}^{j}(\lambda+k\lambda_1)^{-1} + \lambda_2^j \prod_{k=1}^{j}(\lambda+k\lambda_2)^{-1}\right)$$

4. 시뮬레이션

Sakar의 이변량 지수분포를 따르는 확률변수 (X,Y) 의 난수(random number)를 얻은 후 그로부터 관측중단된 자료를 만들어 $H_0 : X \sim F_0(x)$, $F_0 = 1-e^{-x}$를 검정하는 시뮬레이션을 하였다.

제1종 오류와 유의수준을 비교하고 그 변화를 보기위해 실제로 X가 평균이 1인 지수분포를 따르는 경우를 고려하였고 검정력의 변화를 보기위해 X의 평균이 1.5, 2, 3인 경우도 고려하였다. 관측중단확률(probability of censoring)은 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 등 네가지로 나누었고 X와 Y의 종속정도는 정확한 상관계수를 정해놓고 시뮬레이션 하는 것이 불가능하므로 $\phi = \lambda_3/\lambda$ 를 변화시켰다. ϕ의 값은 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 등 5가지를 사용하였다. ϕ가 0인 경우는 X와 Y가 독립인 경우이고 ϕ가 커질수록 종속관계가 강해진다. 검정할 때 유의수준 α는 0.1, 0.05, 0.01 세가지를 사용하였다. 표본의 크기 n은 30, 50, 100 세 경우를 고려하였고, 각각의 표본의 크기에 대하여 카이제곱 검정시 칸(cell)의 수는 4, 7, 11로 하였다. 총 240가지 서로다른 경우를 고려하였고 각 경우 10,000번씩 반복하였다. 난수발생 프로그램은 IMSL을 사용하였고 시뮬레이션 프로그램은 FORTRAN으로 작성하였다. <표1>~<표9>에 10,000개의 표본중 Kim(1993)의 검정법을 사용했을 때 귀무가설이 기각된 개수와 Akritas(1988)의 검정법을 사용하였을 때 기각된 개수를 전체 10,000에 대한 비율로 정리하였다.

X와 Y가 서로 독립일 때(ϕ=0) 귀무가설이 사실인 경우(μ=1.0)를 보면 Kim의 검정법과 Akritas 검정법 모두 주어진 유의수준 α에 가까운 값을 보여주고 있다. 전체적으로 Kim의 검정법의 제1종 오류는 주어진 α보다 조금 낮게 나타나고 Akritas 검정법의 제1종 오류는 주어진 α보다 크게 나타난다. 그 정확도는 관측중단 확률(P_c)이 커질수록 떨어진다. 거의 모든 경우에 Kim의 검정법의 제1종 오류가 Akritas 검정법의 제1종 오류보다 주어진 α값에 더 근접해 있다. 귀무가설이 사실이 아닌 경우(μ>1.0) 검정력을 비교해 보면, 두 검정법 모두 관측중단 확률이 커질수록 검정력이 떨어지고, 전체적으로 Kim의 검정법의 검정력이 Akritas 검정법의 검정력보다 크게 나타나 있다.

X와 Y가 서로 독립이 아닐 때(ϕ>0) 제1종 오류와 검정력을 살펴보면, P_c가 커지고 ϕ가 커질수록 검정법의 효율성이 급격하게 떨어짐을 알 수 있다. ϕ=0.1인 경우에는 ϕ=0인 경우보다 제1종 오류가 주어진 α값으로부터 더 벗어나 있지만 오히려 검정력은 더 증가되어 두 검정법 모두 적절한 것으로 판단된다. ϕ=0.3인 경우는 P_c=0.7인 경우만 제외하고 두 검정법 모두 같은 결과를 보여주고 있다. 이 경우 ϕ=0, ϕ=0.1인 경우와 다른 점은 P_c가 커질수록 Akritas 검정법이 Kim의 검정법보다 상대적으로 더 좋은 검정법으로 판단되는 것이다. ϕ=0.5, ϕ=0.7인 경우는 검정력이 무척 높게 나타나 있지만 상대적으로 P_c가 0.5이상이면 제1종 오류가 무척 커지므로 두 검정법 모두 적절치 않음을 알 수 있다.

시뮬레이션 결과를 정리해 보면 관측중단 확률이 작을 때는 X와 Y가 어느정도 종속되어 있다해도 적합도 검정을 실시하여 좋은 결과를 얻을 수 있지만, 관측중단 확률이 클 때에는 X와 Y의 종속정도가 심해짐에 따라 적합도 검정의 결과 필요이상으로 귀무가설을 자주 기각하게 되므로 매우 주의하여야 할 것이다. 그러므로 실제 자료에 적합도 검정을 적용하려 할 때 먼저 전체 자료중 관측중단된 자료의 비를 구해보고, 그것이 작으면 적합도 검정을 하고 비율이 크면 유의수

준 α를 작게잡아 적합도 검정을 실시하면, X와 Y의 종속관계 때문에 발생할 수 있는 오류를 어느정도 줄일 수 있는 것으로 생각된다.

두 검정법을 비교해 보면, 관측중단 확률이 작거나 두 변수 사이의 종속정도가 약할 때는 Kim의 검정법이 더 효과적이지만, 관측중단 확률이 커지거나 종속정도가 강해질 수록 그런 변화에 상대적으로 덜 민감하게 변하는 Akritas 검정법이 더 효과적인 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

[1] Akritas, M. G. (1988). Pearson-type goodness-of-fit tests : The univariate case, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 83, 222-230.

[2] Block, H. W., and Basu, A. P. (1974). A continuous bivariate exponential extension, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, 1031-1037.

[3] Hjort, N. L. (1990). Goodness-of-fit tests in models for life history data based on cumulative hazard rates, *The Annals of Statistics*, Vol. 18, 1221-1258.

[4] Kaplan, E. L., and Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, 457-481.

[5] Kim, J. H. (1993). Chi-square goodness-of-fit tests for randomly censored data, *The Annals of Statistics*, Vol. 21, 1621-1639.

[6] Marshall, A. W., and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 62, 30-44.

[7] Sarkar, S. K. (1987). A continuous bivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, 667-675.

<표1> $n=30$, $\alpha=0.1$

	ψ / P_c	Kim 0.0	Kim 0.1	Kim 0.3	Kim 0.5	Kim 0.7	Akritas 0.0	Akritas 0.1	Akritas 0.3	Akritas 0.5	Akritas 0.7
$\mu=1.0$	.1	.1009	.0959	.0979	.1047	.1098	.1203	.1184	.1058	.1113	.1048
	.3	.0943	.0943	.1066	.1399	.2010	.1243	.1044	.0953	.1118	.1466
	.5	.0955	.0809	.1424	.2179	.4429	.1225	.0870	.1040	.2020	.3549
	.7	.0921	.0687	.2145	.5176	.7882	.1163	.0650	.1549	.4332	.7251
$\mu=1.5$	.1	.4978	.5211	.5500	.5969	.6303	.3950	.4218	.4494	.4965	.5366
	.3	.3956	.4611	.5973	.7259	.8075	.3005	.3707	.5006	.6417	.7391
	.5	.2559	.3938	.6601	.8394	.9385	.1873	.3092	.5784	.7861	.9087
	.7	.1262	.3078	.7518	.9474	.9916	.0903	.2374	.6894	.9241	.9856
$\mu=2.0$	.1	.9150	.9285	.9360	.9468	.9598	.8654	.8818	.9001	.9160	.9318
	.3	.8377	.8870	.9414	.9710	.9869	.7794	.8277	.9028	.9519	.9733
	.5	.6924	.8177	.9475	.9896	.9969	.6135	.7627	.9161	.9789	.9948
	.7	.4129	.7072	.9659	.9976	.9999	.3274	.6458	.9465	.9961	.9998
$\mu=3.0$	.1	.9997	.9992	1.000	.9995	.9999	.9993	.9991	.9993	.9993	.9999
	.3	.9979	.9988	.9997	1.000	.9999	.9960	.9971	.9988	.9999	.9999
	.5	.9876	.9957	.9996	1.000	1.000	.9762	.9924	.9992	1.000	1.000
	.7	.9005	.9844	.9997	1.000	1.000	.8606	.9743	.9993	1.000	1.000

<표2> $n=50$, $\alpha=0.1$

	ψ / P_c	Kim 0.0	Kim 0.1	Kim 0.3	Kim 0.5	Kim 0.7	Akritas 0.0	Akritas 0.1	Akritas 0.3	Akritas 0.5	Akritas 0.7
$\mu=1.0$	.1	.0943	.0970	.0965	.1070	.1104	.1172	.1126	.1031	.1001	.0996
	.3	.0970	.0958	.1115	.1671	.2615	.1165	.1043	.0888	.1110	.1630
	.5	.0929	.0924	.1686	.3667	.6090	.1163	.0882	.1074	.2514	.4803
	.7	.0927	.0683	.3132	.7216	.9416	.1111	.0648	.2087	.6042	.8931
$\mu=1.5$	.1	.6792	.6823	.7380	.7787	.8195	.5288	.5423	.5982	.6583	.6994
	.3	.5374	.6289	.7893	.8894	.9504	.3971	.4869	.6689	.8000	.8950
	.5	.3724	.5410	.8434	.9601	.9949	.2508	.4131	.7442	.9207	.9823
	.7	.1702	.4458	.9133	.9958	.9999	.1084	.3239	.8558	.9883	.9995
$\mu=2.0$	.1	.9870	.9888	.9918	.9944	.9956	.9666	.9669	.9777	.9839	.9872
	.3	.9613	.9779	.9938	.9979	.9992	.9184	.9442	.9829	.9928	.9979
	.5	.8700	.9512	.9954	.9996	1.000	.7876	.9055	.9859	.9984	.9998
	.7	.5880	.8908	.9988	1.000	1.000	.4658	.8184	.9953	.9999	1.000
$\mu=3.0$	.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.3	.9999	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	1.000	1.000	1.000	1.000
	.5	.9996	1.000	1.000	1.000	1.000	.9986	.9999	1.000	1.000	1.000
	.7	.9882	.9979	1.000	1.000	1.000	.9695	.9979	1.000	1.000	1.000

<표3> $n=100$, $\alpha=0.1$

	P_c \ ψ	Kim 0.0	Kim 0.1	Kim 0.3	Kim 0.5	Kim 0.7	Akritas 0.0	Akritas 0.1	Akritas 0.3	Akritas 0.5	Akritas 0.7
$\mu=1.0$	.1	.0984	.0958	.1025	.1059	.1187	.1188	.1091	.1000	.0937	.0939
	.3	.0975	.0948	.1375	.2209	.3793	.1168	.0919	.0922	.1279	.2324
	.5	.0986	.0910	.2403	.5713	.8563	.1224	.0791	.1436	.4034	.7274
	.7	.1012	.0833	.5166	.9462	.9985	.1240	.0636	.3596	.8738	.9926
$\mu=1.5$	.1	.8838	.9098	.9299	.9524	.9713	.7617	.7939	.8396	.8824	.9166
	.3	.7786	.8691	.9565	.9915	.9973	.6166	.7398	.8893	.9702	.9886
	.5	.5675	.8057	.9829	.9994	1.000	.4044	.6567	.9474	.9959	.9997
	.7	.2582	.7232	.9974	1.000	1.000	.1529	.5687	.9891	.9999	1.000
$\mu=2.0$	.1	1.000	.9999	1.000	1.000	1.000	.9992	.9994	.9999	.9999	.9997
	.3	.9986	.9999	1.000	1.000	1.000	.9945	.9986	.9999	1.000	1.000
	.5	.9885	.9990	1.000	1.000	1.000	.9663	.9948	1.000	1.000	1.000
	.7	.8651	.9931	1.000	1.000	1.000	.7458	.9775	1.000	1.000	1.000
$\mu=3.0$	.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.9996	1.000	1.000	1.000	1.000

<표4> $n=30$, $\alpha=0.05$

	P_c \ ψ	Kim 0.0	Kim 0.1	Kim 0.3	Kim 0.5	Kim 0.7	Akritas 0.0	Akritas 0.1	Akritas 0.3	Akritas 0.5	Akritas 0.7
$\mu=1.0$	.1	.0488	.0482	.0488	.0504	.0549	.0727	.0683	.0586	.0613	.0522
	.3	.0458	.0424	.0517	.0745	.1152	.0751	.0563	.0501	.0555	.0722
	.5	.0490	.0367	.0681	.1673	.3126	.0737	.0463	.0474	.1022	.2190
	.7	.0496	.0279	.1075	.3700	.6732	.0737	.0330	.0673	.2724	.5743
$\mu=1.5$	.1	.3839	.4115	.4339	.4871	.5215	.2632	.2921	.3136	.3605	.3947
	.3	.2822	.3428	.4801	.6253	.7226	.1814	.2437	.3566	.5019	.6231
	.5	.1534	.2711	.5366	.7583	.9004	.0927	.1785	.4270	.6687	.8375
	.7	.0516	.1773	.6315	.9041	.9831	.0378	.1174	.5282	.8493	.9669
$\mu=2.0$	.1	.8650	.8850	.9008	.9185	.9364	.7891	.8061	.8304	.8571	.8828
	.3	.7650	.8219	.9036	.9513	.9773	.6683	.7287	.8365	.9093	.9513
	.5	.5720	.7336	.9105	.9784	.9938	.4632	.6308	.8503	.9546	.9877
	.7	.2710	.5780	.9351	.9940	.9996	.1866	.4738	.8903	.9890	.9988
$\mu=3.0$	.1	.9995	.9991	.9997	.9995	.9994	.9976	.9974	.9978	.9990	.9991
	.3	.9960	.9979	.9994	.9999	.9999	.9901	.9937	.9974	.9991	.9996
	.5	.9778	.9925	.9993	.9998	1.000	.9519	.9815	.9980	.9999	1.000
	.7	.8346	.9678	.9992	1.000	1.000	.7547	.9431	.9979	1.000	1.000

<표5> $n=50$, $\alpha=0.05$

		Kim					Akritas				
	P_c \ ψ	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7
$\mu=1.0$	.1	.0478	.0491	.0488	.0529	.0577	.0671	.0628	.0555	.0557	.0518
	.3	.0458	.0463	.0590	.0938	.1660	.0673	.0587	.0425	.0527	.0852
	.5	.0455	.0442	.0914	.2472	.4871	.0672	.0469	.0473	.1366	.3241
	.7	.0469	.0297	.1880	.5936	.8942	.0665	.0321	.0976	.4403	.7993
$\mu=1.5$	.1	.5762	.5802	.6434	.6942	.7411	.3875	.3998	.4602	.5265	.5685
	.3	.4157	.5155	.6981	.8300	.9187	.2648	.3434	.5334	.6878	.8172
	.5	.2493	.4194	.7624	.9288	.9880	.1393	.2640	.6112	.8582	.9621
	.7	.0799	.3033	.8526	.9897	.9999	.0426	.1873	.7515	.9719	.9988
$\mu=2.0$	.1	.9776	.9791	.9834	.9903	.9931	.9374	.9400	.9561	.9690	.9743
	.3	.9357	.9610	.9882	.9950	.9987	.8526	.8989	.9602	.9830	.9950
	.5	.8012	.9162	.9899	.9991	1.000	.6696	.8298	.9696	.9963	.9992
	.7	.4512	.8179	.9958	1.000	1.000	.2990	.6951	.9865	.9998	.9999
$\mu=3.0$	.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.3	.9999	1.000	1.000	1.000	1.000	.9996	.9998	1.000	1.000	1.000
	.5	.9992	1.000	1.000	1.000	1.000	.9967	.9997	1.000	1.000	1.000
	.7	.9739	.9989	1.000	1.000	1.000	.9325	.9949	1.000	1.000	1.000

<표6> $n=100$, $\alpha=0.05$

		Kim					Akritas				
	P_c \ ψ	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7
$\mu=1.0$	.1	.0486	.0474	.0541	.0530	.0613	.0640	.0587	.0535	.0507	.0470
	.3	.0479	.0473	.0700	.1307	.2645	.0651	.0488	.0428	.0602	.1280
	.5	.0523	.0444	.1452	.4435	.7769	.0705	.0389	.0654	.2638	.5960
	.7	.0561	.0379	.3730	.8976	.9952	.0752	.0288	.2174	.7772	.9818
$\mu=1.5$	.1	.8269	.8584	.8913	.9251	.9504	.6496	.6872	.7448	.8018	.8498
	.3	.6849	.8006	.9267	.9828	.9951	.4765	.6084	.8074	.9342	.9785
	.5	.4423	.7063	.9639	.9984	.9999	.2618	.5097	.8998	.9891	.9993
	.7	.1495	.5949	.9926	1.000	1.000	.0678	.4001	.9697	.9997	1.000
$\mu=2.0$	.1	1.000	.9996	1.000	1.000	1.000	.9980	.9986	.9993	.9997	.9993
	.3	.9979	.9999	1.000	1.000	1.000	.9877	.9965	.9994	.9999	1.000
	.5	.9768	.9980	1.000	1.000	1.000	.9263	.9863	.9999	1.000	1.000
	.7	.7693	.9840	1.000	1.000	1.000	.5958	.9487	1.000	1.000	1.000
$\mu=3.0$	.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.7	.9999	1.000	1.000	1.000	1.000	.9988	1.000	1.000	1.000	1.000

<표7> $n=30$, $\alpha=0.01$

	P_c \ ψ	Kim 0.0	Kim 0.1	Kim 0.3	Kim 0.5	Kim 0.7	Akritas 0.0	Akritas 0.1	Akritas 0.3	Akritas 0.5	Akritas 0.7
$\mu=1.0$	.1	.0090	.0090	.0101	.0091	.0108	.0248	.0199	.0184	.0202	.0170
	.3	.0099	.0076	.0096	.0192	.0301	.0276	.0189	.0129	.0125	.0139
	.5	.0112	.0062	.0128	.0503	.1251	.0277	.0140	.0076	.0198	.0593
	.7	.0144	.0052	.0181	.1400	.4078	.0286	.0108	.0079	.0727	.2654
$\mu=1.5$	.1	.2054	.2253	.2464	.2817	.3278	.0963	.1115	.1219	.1519	.1804
	.3	.1165	.1650	.2668	.4130	.5369	.0497	.0760	.1391	.2527	.3641
	.5	.0418	.1010	.3031	.5628	.7803	.0172	.0433	.1755	.3926	.6263
	.7	.0053	.0416	.3613	.7615	.9451	.0054	.0170	.2286	.6137	.8671
$\mu=2.0$	.1	.7512	.7757	.8024	.8333	.8644	.5835	.6009	.6410	.6901	.7246
	.3	.5928	.6650	.7977	.8876	.9427	.4202	.4905	.6349	.7629	.8568
	.5	.3383	.5206	.8001	.9347	.9819	.2040	.3497	.6549	.8485	.9435
	.7	.0816	.3057	.8255	.9795	.9983	.0388	.1838	.6944	.9412	.9926
$\mu=3.0$	.1	.9981	.9979	.9979	.9990	.9991	.9878	.9855	.9904	.9947	.9952
	.3	.9883	.9925	.9969	.9995	.9996	.9583	.9719	.9887	.9963	.9977
	.5	.9332	.9743	.9970	.9993	1.000	.8515	.9274	.9863	.9977	.9995
	.7	.6285	.9072	.9974	.9998	1.000	.4823	.8011	.9876	.9992	1.000

<표8> $n=50$, $\alpha=0.01$

	P_c \ ψ	Kim 0.0	Kim 0.1	Kim 0.3	Kim 0.5	Kim 0.7	Akritas 0.0	Akritas 0.1	Akritas 0.3	Akritas 0.5	Akritas 0.7
$\mu=1.0$	.1	.0092	.0083	.0079	.0108	.0127	.0190	.0193	.0139	.0157	.0127
	.3	.0083	.0101	.0107	.0237	.0592	.0222	.0193	.0106	.0105	.0162
	.5	.0098	.0077	.0192	.0891	.2650	.0227	.0123	.0079	.0305	.1129
	.7	.0137	.0045	.0485	.3350	.7354	.0262	.0101	.0158	.1665	.5257
$\mu=1.5$	.1	.3695	.3833	.4502	.5127	.5634	.1679	.1831	.2208	.2729	.3200
	.3	.2263	.3027	.4959	.6720	.8146	.0835	.1287	.2723	.4347	.6054
	.5	.0937	.2064	.5595	.8372	.9555	.0303	.0786	.3345	.6539	.8675
	.7	.0133	.1056	.6731	.9618	.9992	.0049	.0376	.4574	.8860	.9888
$\mu=2.0$	.1	.9436	.9516	.9602	.9727	.9803	.8262	.8342	.8718	.8927	.9146
	.3	.8511	.9033	.9653	.9859	.9965	.6634	.7455	.8782	.9397	.9790
	.5	.6186	.8068	.9675	.9960	.9996	.3862	.6038	.8891	.9806	.9975
	.7	.2014	.6127	.9822	.9997	1.000	.0831	.3919	.9264	.9971	.9998
$\mu=3.0$	.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9997	1.000	1.000
	.3	.9998	1.000	1.000	1.000	1.000	.9981	.9990	.9995	1.000	1.000
	.5	.9963	.9997	1.000	1.000	1.000	.9798	.9954	.9995	1.000	1.000
	.7	.9103	.9930	1.000	1.000	1.000	.7803	.9682	.9998	1.000	1.000

<표9> $n = 100$, $\alpha = 0.01$

		Kim					Akritas				
	P_c \ ψ	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7
μ=1.0	.1	.0109	.0109	.0101	.0104	.0148	.0192	.0148	.0126	.0116	.0105
	.3	.0090	.0087	.0158	.0419	.1092	.0191	.0120	.0084	.0097	.0294
	.5	.0107	.0076	.0393	.2322	.5770	.0229	.0097	.0114	.0803	.3129
	.7	.0149	.0075	.1593	.7415	.9808	.0264	.0054	.0520	.4941	.9156
μ=1.5	.1	.6884	.7242	.7787	.8387	.8785	.3924	.4330	.5053	.5890	.6543
	.3	.4864	.6284	.8308	.9506	.9849	.2183	.3439	.5823	.8067	.9255
	.5	.2297	.4897	.9023	.9922	.9994	.0746	.2454	.7230	.9553	.9964
	.7	.0330	.3304	.9647	.9999	1.000	.0087	.1423	.8726	.9983	1.000
μ=2.0	.1	.9990	.9994	.9998	.9999	.9997	.9886	.9914	.9955	.9972	.9976
	.3	.9902	.9977	.9995	1.000	1.000	.9491	.9783	.9963	.9991	.9997
	.5	.9307	.9882	1.000	1.000	1.000	.7822	.9371	.9982	1.000	1.000
	.7	.5420	.9439	1.000	1.000	1.000	.2890	.8122	.9994	1.000	1.000
μ=3.0	.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	1.000	1.000	1.000	1.000
	.7	.9988	1.000	1.000	1.000	1.000	.9896	1.000	1.000	1.000	1.000