한국통계학회논문집 제2권 1호
1995년 4월 pp. 155-165

층화유한모집단 평균에 대한 경험적 베이즈 추정

신 민 웅[1]　　신 기 일[1]

요 약

초모집단(superpopulation)으로 부터 반복적으로 유한모집단을 추출할 때, 이미 조사된 자료들을 이용하면 현재의 유한모집단 모수들을 더 효율적으로 추정할 수 있다. 이러한 문제에 대하여 Ericson(1969)이 유한모집단 표본추출에서 베이지안 분석을 하였고, Ghosh와 Meeden(1986)은 정규 초모집단을 가정하여 유한모집단 평균의 경험적 베이즈 추정을 하였다. Nandram과 Sedransk (1993)는 Ghosh와 Meeden(1986)의 유한모집단들의 분산이 모두 같다는 가정들을 완화하여 유한모집단 평균의 경험적 베이즈 추정을 하였다. 본 연구는 Nandram과 Sedransk의 결과를 층화표본추출의 경우로 일반화하였다.

1. 서 론

어떤 유한모집단의 모수를 베이지안 방법으로 추정할 때 이 유한모집단이 어떤 분포를 하는 무한모집단으로부터 추출되었다고 가정한다. 이 무한모집단을 우리는 초모집단(superpopulation)이라고 부른다. 이 논문은 초모집단(superpopulation)으로부터 생성된 유한모집단(finite population) 표본추출에서 경험적 베이즈 추정(empirical Bayes estimation)문제를 다룬다. 이러한 추정의 예는 작은 지역에서의 추정문제로 인구추정, 실업률, 농산물 산출등의 추정이 있다. 그러한 경우에 어떤 특정 지역의 추정의 효율성을 높이기 위해서는 유사한 인근지역으로 부터의 정보를 사용하여 더 개선된 추정치를 얻을 수 있다.

더욱이, 큰 규모의 조사로 반복해 표본추출된 많은 유한모집단들은 시간의 경과에 따라 천천히 변한다. 결과적으로 이미 조사된 자료(data from earlier surveys)들을 이용하여 현재의 유한모집단 모수추정치(current estimates of finite population parameters)들을 더 개선하여 추정할 수 있다. 예를 들어 색맹 같은 것은 그 출현수가 시간의 경과에 따라 매우 안정적으로 변하고 있다.

이러한 문제에 대한 연구로 Ericson(1969)이 유한모집단 표본추출에서의 베이지안 분석을 매우 성공적으로 수행하였다. Ghosh와 Meeden(1986)은 정규초모집단(normal superpopulation model)을 가정하여 유한모집단 평균의 경험적 베이즈추정을 하였다. 경험적 베이즈 분석에서는 사전 모수들(prior parameters)이 미지이므로 자료(표본)로 부터 추정되어야 한다.

계속해서 Ghosh와 Lahiri(1987)는 정규성의 가정을 완화하고, 사후선형성(posterior linearity)을 가정하였다. 그러나 그들은 표본분산들이 동일하다는 가정을 하여 실용성에 제한이 있었다. 이러한 가정들을 완화하여 Nandram과 Sedransk(1993)는 표본분산들이 동일하지 않은 경우로 일반화하였다.

본 논문은 2절에는 Nandram과 Sedransk(1993)의 결과를 층화표본추출의 경우로 일반화하여 유

1) (449-791) 경기도 용인군 모현면 왕산리 산89 한국외국어대학교 통계학과.

한모집단의 층별평균치를 추정한다. 3절에서는 층화표본추출을 m-단계 반복하였을 경우에 현재의 유한모집단 모수들을 추정한다. 4절에서는 모의실험을 이용하여 경험적 베이즈 추정이 층의 표본평균보다 우수함을 Coverage와 추정된 신뢰구간을 통하여 보였다.

2. 층화 유한모집단 추출

이 절에서는 층화표본추출을 할 경우를 생각한다. Y_{ij}를 i번째 층의 j번째 단위 $(i=1,\cdots,l\ ;j=1,\cdots,N_i)$를 나타낸다고 하자. i번째 층으로 부터 표본의 크기 n_i인 표본을 $Y_{i1},\cdots,Y_{in_i}$, $i=1,\cdots,l$ 로 나타낸다. 이때 표본은 비복원으로 추출한다.

우리의 목적은 유한모집단의 층별평균을 구하는데 있다. 즉 i번째 층의 평균

$$\gamma(Y_i)=\sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}/N_i,\quad i=1,\cdots,l$$

을 추정하고자 한다. 단, $Y_i=(Y_{i1},\cdots,Y_{iN_i})'$이다.

먼저 추론을 하는데 있어서, 우리는 다음과 같은 초모집단 모형을 가정한다.

$$Y_{i1},\cdots,Y_{iN_i}\mid \mu_i,\sigma_i^2 \quad\sim\quad N(\mu_i,\sigma_i^2) \tag{2.1}$$

로 서로 독립이다.

그리고 각 i에 대하여 서로 독립적으로

$$\mu_i\mid \sigma_i^2,\ \theta,\ \delta_i^2 \ \sim\ N(\theta,\delta_i^2) \tag{2.2}$$

라고 가정한다. 단, θ, σ_i^2은 고정되어 있고 미지이며 δ_i^2은 고정되어 있고, 기지라고 가정한다.

2.1 점 추정량(point estimator)

이제 θ , δ_i^2 은 고정되어 있고, $\delta_i>0$, $i=1,\cdots,l$ 은 기지라고 가정할 때에, $\gamma(Y_i)$의 사후평균(posterior mean)을 e_{Bi}라고 하면,

$$e_{Bi}=\overline{Y}_i-(1-f_i)w_i(\overline{Y}_i-\theta) \tag{2.3}$$

이다. 그리고 $\gamma(Y_i)$의 사후분산을 v_{Bi}^2이라 하면

$$v_{Bi}^2 = (1-f_i)\{f_i + (1-f_i)(1-w_i)\}\sigma_i^2 / n_i \tag{2.4}$$

이다.

단, $w_i = (\sigma_i^2 / n_i)/\{\delta_i^2 + (\sigma_i^2 / n_i)\}$이고 $\overline{Y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} / n_i$, $f_i = n_i / N_i$, $i = 1, \cdots, l$이다.

σ_i^2을 추정하기 위하여, $s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 / (n_i - 1)$을 사용한다.

σ_i^2과 δ_i^2이 기지일 때에, θ의 최대우도 추정량은

$$\hat{\theta}_* = \sum_{i=1}^{l} (1-w_i)\overline{Y}_i / \sum_{i=1}^{l} (1-w_i) \tag{2.5}$$

이다. 우리는 w_i의 추정치를 $\widehat{w}_i$라 하면

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{l} (1-\widehat{w}_i)\overline{Y}_i / \sum_{i=1}^{l} (1-\widehat{w}_i), \quad \delta_i^2 > 0, \quad i = 1, \cdots, l \tag{2.6}$$

이다. 여기서 $\widehat{w}_i = (s_i^2 / n_i)\{\delta_i^2 + (s_i^2 / n_i)\}$이 된다.

따라서, i번째 층의 평균의 경험적 베이즈 추정치는

$$e_{EBi} = \overline{Y}_i - (1-f_i)\widehat{w}_i(\overline{Y}_i - \hat{\theta}) \tag{2.7}$$

이다.

$\gamma(Y_i)$의 또 다른 추정치로 다음과 같은 추정치, 각 층의 표본 평균,을 생각할 수 있다.

즉

$$e_i = \overline{Y}_i$$

이다.

2.2 구간 추정량 (interval estimator)

$\theta, \delta^2, \sigma^2$ 그리고 $Y_{i1}, \cdots, Y_{in_i}$가 주어져있을 때, $\gamma(Y_i)$의 $100(1-\alpha)\%$ Highest Posterior Density(HPD) 구간은

$$e_{Bi} \pm v_{Bi}\, z_{\alpha/2}$$

이다. 단, $z_{\alpha/2}$는 표준정규분포의 $100\{1-(\alpha/2)\}\%$ 점이며 v_{Bi}는 (2.4)식에 정의되어 있다.
이때 e_{EBi}에 대한 신뢰구간은

$$e_{EBi} \pm v_{EBi}\, z_{\alpha/2}$$

이고 $v^2_{EBi} = \hat{v}^2_{ui} + \hat{v}^2_{\theta* i}$이다. 그리고 $\hat{v}_{u_i}{}^2 = (1-f_i)\{f_i + (1-f_i)\hat{w}_i\} s_i^2 / n_i,$
$\hat{v}_{\theta* i}{}^2 = (1-f_i)^2 \hat{w}_i^2 \left\{ \sum_{i=1}^{l} \hat{w}_i n_i / s_i^2 \right\}^{-1}$ 이다. 또한 e_i을 중심으로한 신뢰구간은

$$e_i \pm \{(1-f_i) s_i^2 / n_i\}^{1/2} z_{\alpha/2} \tag{2.8}$$

이다.

3. 층화유한모집단 추출을 m-단계 반복하였을 경우

이 절에서는 층화유한모집단들이 m단계 반복적으로 표본추출되었다고 하자. i-단계 유한모집단 (i번째 추출된 유한모집단)의 j번째 층의 원소들을 $X_{i1}^{(j)}, \cdots, X_{iN_i}^{(j)}$ $(i = 1, \cdots, m$ 와 $j = 1, \cdots, l)$로 표시한다. i-단계 유한모집단의 j번째 층으로부터 추출된 표본을 $X_{i1}^{(j)}, \cdots, X_{in_i}^{(j)}$로 나타낸다. 즉 표본의 크기는 $n_i^{(j)}$이다.

우리의 목적은 m-단계 유한모집단의 층별평균

$$\gamma(X_m^{(j)}) = \sum_{k=1}^{N_m^{(j)}} X_{mk}^{(j)} / N_m^{(j)} \quad , \; j = 1, \cdots, l$$

을 추론하는데 있다. 즉 현재의 유한모집단(m단계 유한모집단)의 층별 평균을 추론하는데 있다.

우리는 초모집단 모형을 다음과 같이 가정한다. 즉, i-단계 유한모집단의 j번째 층에 대하여

$$X_{i1}^{(j)}, \cdots, X_{iN_i}^{(j)} \mid \mu_i^{(j)}, \sigma_i^{2(j)} \sim^{iid} N(\mu_i^{(j)}, \sigma_i^{2(j)}) \tag{3.1}$$

$i=1, \cdots, m$ 와 $j=1, \cdots, l$ 이다.

또한, 모든 $i=1, \cdots, m$ 와 $j=1, \cdots, l$ 에 대하여

$$\mu_i^{(j)} \mid \theta, \delta_j^2 \sim N(\theta, \delta_j^2) \tag{3.2}$$

이라고 가정한다. 단, 모든 $i=1, \cdots, m$ 와 $j=1, \cdots, l$ 에 대하여 θ, δ_j^2, $\sigma_i^{2(j)}$은 고정되어 있고 미지이다.

3.1 점 추정량

이제 모든 $i=1, \cdots, m$ 와 $j=1, \cdots, l$ 에 대하여 θ, δ_j^2 그리고 $\sigma_i^{2(j)}$은 고정되어 있다고 가정한다. 현재 유한모집단(m단계)의 j번째 층의 $\gamma(X_m^{(j)})$의 사후평균과 $\gamma(X_m^{(j)})$의 사후분산을 각각 $e_{Bm}^{(j)}$ 그리고 $v_{Bm}^{2(j)}$라고 하자. 그러면

$$e_{Bm}^{(j)} = \overline{X}_m^{(j)} - (1-f_m^{(j)}) w_m^{(j)} (\overline{X}_m^{(j)} - \theta) \tag{3.3}$$

이고

$$v_{Bm}^{2(j)} = (1-f_m^{(j)})\{f_m^{(j)} + (1-f_m^{(j)})(1-w_m^{(j)})\}\sigma_m^{2(j)} / n_m^{(j)} \tag{3.4}$$

이된다. 여기서 $w_m^{(j)} = (\sigma_m^{2(j)} / n_m^{(j)}) / \{\delta_j^2 + (\sigma_m^{2(j)} / n_m^{(j)})\}$ 이고 $f_i^{(j)} = n_i^{(j)} / N_i^{(j)}$ 이다. 또한 $\overline{X}_m^{(j)} = \sum_{k=1}^{n_m^{(j)}} X_{mk}^{(j)} / n_m^{(j)}$, $j=1, \cdots, l$ 이다.

우리는 $\sigma_i^{2(j)}$을 추정하기 위하여 $s_i^{2(j)}$을 사용한다. Nandram과 Sedransk(1993)와 유사하게 구한 δ_j^2의 추정치, $\hat{\delta}_j^2$은

$$\hat{\delta}_j^2 = \max(0, \hat{\delta}_{j*}^2) \tag{3.5}$$

이다.

단, $m \geq 4$ 일 때

$$\hat{\delta}^2_{j*} = \frac{(m-1)(m-3)^{-1}\sum_{i=1}^{m} n_i^{(j)}\{\overline{Y}_i^{(j)} - n.^{-1}(\sum n_i^{(j)}\overline{Y}_i^{(j)})\}^2 - \sum_{i=1}^{m}(1-n_i^{(j)}n^{-1})s_i^{2(j)}}{\sum_{i=1}^{m} n_i^{(j)}(1-n_i^{(j)}n.^{-1})}$$

$\sigma_i^{2(j)}$과 δ_j^2이 기지일 때는, θ의 최대우도 추정량은

$$\hat{\theta}_* = \frac{\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}(1-w_i^{(j)})\overline{X}_i^{(j)}}{\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}(1-w_i^{(j)})} \tag{3.6}$$

이다. 이 때 $w_i^{(j)}$의 추정치 $\hat{w}_i^{(j)}$를 사용하면, 우리는 θ의 추정치를 구할수 있다. 먼저 적어도 하나 이상의 $\hat{\delta}_j^2 > 0$ 일 때, θ의 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}(1-\hat{w}_i^{(j)})\overline{X}_i^{(j)}}{\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}(1-\hat{w}_i^{(j)})} \tag{3.7}$$

또한 모든 $\hat{\delta}_j^2 = 0$ 이면

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} n_i^{(j)}\overline{Y}_i^{(j)}/s_i^{2(j)}}{\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} n_i^{(j)}/s_i^{2(j)}} \tag{3.8}$$

이다. 단, $\hat{w}_i^{(j)} = (s_i^{2(j)}/n_i^{(j)})/\{\hat{\delta}_j^2 + (s_i^{2(j)}/n_i^{(j)})\}$.

따라서, 경험적 베이즈 추정치는

$$e_{EBm}^{(j)} = \overline{X}_m^{(j)} - (1-f_m^{(j)})\hat{w}_m^{(j)}(\overline{X}_m^{(j)} - \hat{\theta}), \quad j = 1, \cdots, l \tag{3.9}$$

이다.

우리는 다른 추정치로 m단계 j층의 평균 $e_m^{(j)} = \overline{X}_m^{(j)}$ 를 생각할 수 있다.

3.2 구간 추정량

$\delta_j^2,\ j = 1, \cdots, l$ 그리고 $X_{i1}^{(j)}, \cdots, X_{iN_i}^{(j)},\ i = 1, \cdots, m$ 이 주어졌을 때 $\gamma(X_m^{(j)})$의 베이즈 추정량의 $100(1-\alpha)\%$ *HPD* 구간은

$$e_{Bm}^{(j)} \pm v_{Bm}^{(j)} z_{\alpha/2} \tag{3.10}$$

이다.

$e_m^{(j)} = \overline{X}_m^{(j)}$ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰 구간은 (2.8)과 유사하게 구할수 있다.

e_{EBm}을 중심으로 한 $100(1-\alpha)\%$ *HPD* 구간은

$$e_{EBm}^{(j)} \pm v_{EBm}^{2(j)} z_{\alpha/2} \tag{3.11}$$

이다. 단, $v_{EBm}^{2(j)} = \hat{v}_{um}^{2(j)} + \hat{v}_{\theta m*}^{2(j)}$이다. 그리고

$$\hat{v}_{um}^{2(j)} = (1-f_m^{(j)})\{f_m^{(j)} + (1-f_m^{(j)})\,\hat{w}_m^{(j)}\}s_m^{2(j)}/n_m^{(j)}, \quad ,$$

$$\hat{w}_m^{(j)} = (s_m^{2(j)}/n_m^{(j)})/\{\hat{\delta}_j^2 + (s_m^{2(j)}/n_m^{(j)})\},\ ,$$

$$\hat{v}_{\theta m*}^{2(j)} = (1-f_m^{(j)})^2\,\hat{w}_m^{2(j)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\hat{w}_i^{(j)} n_i^{(j)}/s_i^{2(j)}\right\}^{-1}$$

이다. 여기서 m의 크기가 커지면 경험적 베이즈 추정량의 신뢰구간은 베이즈 추정량의 신뢰구간과 같게 되므로 m의 크기가 클수록 더 좋은 신뢰구간을 얻을 수 있다.

4. 모의실험

우리는 앞에서 개발된 이론을 근거로 모의실험을 실시하였다. 먼저 2절에 관한 모의 실험으로 20개의 층이있고 반복은 없는 것으로 생각한다. 각 층의 원소의 갯수 $N_i = N = 500$ 으로 하였다. 그리고 각 층에서 10개의 표본을 추출하였다. 이 때 500개의 원소는 다음을 만족하도록 하였다.

즉

$$Y_{i1}, \cdots, Y_{iN_i} \mid \mu_i, \sigma_i^2 \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

로 서로 독립이다.
그리고 각 i에 대하여 서로 독립적으로

$$\mu_i \mid \sigma_i^2, \theta, \delta_i^2 \sim N(\theta, \delta_i^2)$$

이다.

여기서 모수의 참 값으로 $\theta=0$, $\sigma_i^2=4$, $1\le i\le 5$, $\sigma_i^2=5$, $6\le i\le 10$, $\sigma_i^2=6$, $11\le i\le 15$, $\sigma_i^2=7$, $16\le i\le 20$ 을 사용하였다. 또한 $\delta_i^2=0.9$, $1\le i\le 10$, $\delta_i^2=0.13$, $11\le i\le 20$ 를 선택하였다. 이 경우 $\theta=0$ 를 선택한 이유는 우리의 결과가 θ 와 invariant 하기때문에 편리상 선택하였고 σ_i^2 은 Nandram과 Sedransk(1993)의 모의실험 결과와 비교할 수 있도록 선택하였다. δ_i^2의 참값을 작게 선택한 이유는 각 층의 평균이 거의 변화가 없는 경우를 다루기 때문이며 이 또한 Nandram 과 Sedransk 가 선택한 참값과 매우 가깝다. 또한 우리는 $N_i=N$ =1000인 경우에도 모의 실험을 실시하였다. 이 경우 우리는 표본의 s갯수를 20 으로하였다. 이는 편의상 같은 f_i 값을 주기위해서 이다. 위에서 얻어진 표본으로부터 우리는 각층에서의 표본평균과 경험적 베이즈 추정량을 각각 구하고 (2.8) 과 (2.9) 식을 이용하여 90% 신뢰구간과 90% HPD 구간을 각각 추정하였다. 우리는 위와같은 표본을 500번 반복하여 이들로부터 추정된 90% 신뢰구간과 90% HPD 구간을 각각 구하였다. 또한 층별 표본평균의 Coverage 와 경험적 베이즈 추정의 Coverage 를 각각 구하였다. <표 4.1> 이 모의실험 결과이다. 먼저 신뢰구간의 길이는 5 개층을 하나의 군으로 층이 증가 할수록 길이가 길어지는데 이는 우리가 σ_i^2 을 점차 크게 잡았기 때문이다. 각 층에서 구한 단순 평균의 신뢰구간의 길이는 경험적 베이즈 추정량에 비하여 모든 층에서 길게 나왔다. 또한 Coverage 를 비교했을때 경험적 베이즈 추정량이 Coverage 면에서도 우수한 것으로 나타났다. Nandram 과 Sedransk 의 모의 실험결과와는 직접적으로 비교할 수는 없지만 다양한 층 ($l=10,20,30$)에서 그리고 각 층에서 다른 표본수 ($n=10,20,30$)의 결과가 나와 있어 이를 참고 할수 있으리라 생각 된다.

참고적으로 Nandram 과 Sedransk 의 모의 실험에서 $l=20$, $n=10$ 에서 $\delta^2=0.0964$ 일 경우 Coverage 는 0.95 나타났다. 이에 비하여 우리의 결과는 다소 높은 Coverage 를 갖고있다. 그 이유로는 Nandram 과 Sedransk 는 δ^2 을 추정한 반면 우리는 δ^2 을 기지라 가정하였기 때문으로 생각된다. 여기서 주의해야할 점은 표본의 크기가 증가할수록 경험적 베이즈 추정량의 Coverage 가 나빠진다는 점이다. 이에 반하여 층별 표본 평균의 Coverage 는 높아지고 있다. 이는 경험적 베이즈 추정량의 단점으로 지적되고 있으며 따라서 표본의 크기가 큰 경우 경험적 베이즈 추정량의 사용에 주의를 하여야 한다.

<표 4.1> 반복이 없는 경우의 경험적 베이즈 추정

	Sample Mean				Epirical. Bay. Est.			
	n=10		n=20		n=10		n=20	
층번호	Estim. length of C.I.	Cover-age	Estim. length of C.I.	Cover-age	Estim. length of H.P.D	Cover-age	Estim. length of H.P.D	Cover-age
1	1.97	86.4	1.39	87.2	1.82	96.4	1.19	95.8
2	2.00	86.8	1.42	86.4	1.86	96.8	1.22	94.8
3	1.97	87.8	1.41	86.0	1.83	97.6	1.21	93.8
4	2.00	86.2	1.42	88.8	1.86	97.4	1.22	96.0
5	1.95	86.8	1.44	88.4	1.81	97.0	1.24	96.4
6	2.18	85.2	1.58	87.6	2.05	97.6	1.40	98.0
7	2.20	86.8	1.59	88.6	2.08	98.4	1.41	98.0
8	2.24	87.0	1.58	85.2	2.11	98.6	1.40	97.0
9	2.19	85.6	1.58	87.4	2.06	97.8	1.39	96.0
10	2.22	85.4	1.57	89.4	2.09	98.6	1.38	96.6
11	2.36	83.0	1.73	85.6	2.18	97.6	1.48	96.2
12	2.37	85.4	1.76	86.8	2.19	96.6	1.51	96.6
13	2.40	84.8	1.73	87.4	2.21	97.4	1.48	95.6
14	2.40	86.8	1.73	86.2	2.21	96.8	1.48	93.8
15	2.42	82.8	1.72	89.0	2.24	96.4	1.47	96.0
16	2.63	88.8	1.88	86.4	2.46	98.4	1.64	94.4
17	2.62	85.6	1.85	85.4	2.45	98.2	1.61	97.8
18	2.61	84.2	1.87	88.2	2.43	97.8	1.64	97.0
19	2.60	85.2	1.89	87.0	2.42	97.0	1.65	97.2
20	2.60	84.6	1.87	87.2	2.42	97.8	1.63	97.6

3절에 관한 모의 실험으로 우리는 편의상 2 개의 층이 있고 10개의 단계가 있다고 가정한다. 각 단계별, 각 층별 원소의 갯수, 즉 $N_i^{(j)} = N = 500$, $j = 1, 2$, $i = 1, \ldots, 10$ 으로 선택하였다. 각 층의 원소는 다음을 만족하도록 하였다. 즉

$$X_{i1}^{(j)}, \cdots, X_{iN_i}^{(j)} \mid \mu_i^{(j)}, \sigma_i^{2(j)} \sim^{iid} N(\mu_i^{(j)}, \sigma_i^{2(j)})$$

여기서 $i = 1, \cdots, 10$ 와 $j = 1, 2$이다.

또한, 모든 $i = 1, \cdots, 10$ 와 $j = 1, 2$ 에 대하여

$$\mu_i^{(j)} \mid \theta, \delta_j^2 \sim N(\theta, \delta_j^2)$$

이라고 가정한다. 이때 모수에 대한 참값으로 $\theta=0$, $\sigma_i^{2(j)}=4$, $1\le i\le 5$, $\sigma_i^{2(j)}=5$, $6\le i\le 10$, $j=1,2$ 을 사용하였다. 또한 $\delta_1^2=0.9$, $\delta_2^2=0.13$ 을 이용하였다.

2 장에 관한 모의 실험과 같이 $N_i^{(j)}=N=1000$, $i=1,\ldots 10$, $j=1,2$ 의 경우에도 모의 실험이 행해 졌으며 이 경우 각단계, 각 층에서 20 개의 표본을 추출하였다. 역시 500 번의 반복이 행해졌으며 이로부터 최근의 단계(current occasion)의 90% 신뢰구간과 90% HPD 구간의 추정치가 구해졌고 층별 평균의 Coverage 와 경험적 베이즈 추정량의 Coverage 를 각각 구하였다. <표 4.2> 가 그 결과이다.

<표 4.2> 반복이 있는 경우의 경험적 베이즈 추정

	Sample Mean				Emprical Bay. Est.			
	n=10		n=20		n=10		n=20	
층번호	Estim. length of C.I.	Cover-age	Estim. length of C.I.	Cover-age	Estim. length of H.P.D	Cover-age	Estim. length of H.P.D	Cover-age
1	2.82	86	2.02	87	2.49	92	1.76	92
2	2.81	87	1.98	88	2.46	92	1.68	90

앞의 결과와 유사하게 층별 표본 평균에 비하여 추정된 신뢰구간의 길이가 경험적 베이즈 추정량의 HPD 에 비하여 길다는 결론을 얻게된다. 또한 Coverage 는 경험적 베이즈 추정량이 층별 표본 평균보다 더 높기 때문에 표본의 갯수가 적은경우에는 경험적 베이즈 추정량이 더 좋은 것으로 나타났다.

또한 경험적 베이즈 추정량의 Coverage 는 층의 분산이 $\delta_1^2=0.09$ 과 $\delta_2^2=0.13$ 이므로 두번째 층의 Coverage 가 나빠졌다. 이는 각층의 평균이 유사할때 경험적 베이즈 추정량이 우수함을 시사하는 결과이다.

5. 결 론

Nandram과 Sedransk(1993)는 하나의 유한모집단이 반복적으로 조사되었을 때 현재의 유한모집단의 평균을 추정하는 문제를 다루고 있다. 본 논문은 반복적으로 조사되지는 않았지만 여러 유사한 층이 조사된 층화추출의 경우와 반복적으로 여러 유사한 층이 조사된 경우에 있어서 유한모집단의 평균을 추정하는 문제를 다루고 있다. 층화 추출의 경우를 area-sampling 경우로 해석해도 좋으며 정보가 더 많아지는 장점이 있다. 또한 층화평균의 정규가정중 분산의 가정을 일반화하여 경험적 베이즈 추정을 하였다. 이와같이 Nandram과 Sedransk(1993)의 결과는 여러가지의 복합표본설계(complex sample design)에 응용될 수 있다. 모의 실험을 통하여 층화평균에 대한 정규가정중 분산이 작을수록 경험적 베이즈 추정의 효율성이 높아짐을 확인하였다. 이는 다른 층 또는 다른 단계에서의 자료가 많은 정보를 제공하기 때문이다. 경험적 베이즈 추정량은 때로 bias

가 있거나 신뢰구간이 짧아지는 경우가 발생할 수도 있지만 층의 갯수가 충분히 큰경우에는 이러한 문제가 발생하지 않는다. 층의 갯수가 적은경우 bootstrap 방법을 이용하여 bias 를 없애고 Coverage 를 높힐 수 있음을 Carlin 과 Gelfond(1990) 가 보였다.

참 고 문 헌

[1] Carlin, B., and Gelfond. A.(1990). Approaches for Empirical Beyes Confidence Inervals, *Journal of the American Statistical Association,* 85 , No 409, 105-114.

[2] Ericson, W. A. (1969). Subjective Bayesian Models in Sampling Finite Populations (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society,* Ser. B, 31,195-233

[3] Ghosh, M., and Lahiri, P. (1987). Robust Empirical Bayes Estimation of means From Stratified Samples, *Journal of the American Statistical Association,* 82, 1153-1162.

[4] Ghosh, M., and Meeden, G. (1986). Empirical Bayes Estimation in Finite Population Sampling, *Journal of the American Statistical Association,* 81, 1058-1062.

[5] Nandram, B., and Sedransk, J. (1993). Empirical Bayes estimation for the Finite Population Mean on the Current Occasion, *Journal of the American Statistical Association,* 88, 994-1000.