

등가탄성에너지법에 의한 콘크리트의 연속체 손상모델

Continuum Damage Model of Concrete using Hypothesis of Equivalent Elastic Energy

이기성*

변근주**

송하원***

Lee, Ki Seong Byun, Keun-Joo Song, Ha-Won

요 약

콘크리트는 타설시부터 수많은 미세균열들을 가지고 있으며, 이러한 미세균열들이 성장하고 전파되어 결국에는 콘크리트가 파괴된다. 이러한 일련의 과정을 손상이라 한다. 손상은 주로 2차 텐서로 표현되며 균열은 연속체적 현상으로 취급된다. 본 논문에서는 손상의 특성을 유효응력개념과 함께 등가탄성에너지법을 이용하여 나타내었으며, Helmholtz 자유에너지와 소산 포텐셜을 이용하여 손상모델의 손상전개와 구성방정식을 유도하였다. 구성방정식은 콘크리트의 탄성, 이방성 손상과 소성의 영향을 포함하도록 하였다. 두 가지 형태의 유효접선강성텐서를 사용하였는데, 하나는 탄성-손상의 영향에 의한 것이며 다른 하나는 소성-손상의 영향에 의한 것이다. 모델을 검증하기 위하여 일축과 이축의 하중을 받는 콘크리트 요소에 대하여 유한요소해석을 하였으며 그 결과를 실험결과와 비교하였다.

Abstract

Concrete contains numerous microcracks at initially poured. The growth and propagation of microcracks are believed to finally incur the failure of concrete. These processings are understood as a damage. Damage is represented as a second-order tensor and crack is treated as a continuum phenomenon. In this paper, damage is characterized through the effective stress concept together with the hypothesis of elastic energy equivalence, and damage evolution law and constitutive equation of a damage model are derived by using the Helmholtz free energy and the dissipation potential by means of the thermodynamic principles. The constitutive equation of the model includes the effects of elasticity, anisotropic damage and plasticity of concrete. There are two effective tangent stiffness tensors in this model : one is for elastic-damage and the other for plastic damage. For the verification of the model, finite element analysis was performed for the analysis of concrete subject to uniaxial and biaxial loading and the results obtained were compared with test results.

Keywords : damage, microcrack, hypothesis of equivalent elastic energy, effective stress, plasticity of concrete, anisotropy, finite element analysis

* 정회원, 한국전력기술(주), 토목구조기술처 책임연구원

** 정회원, 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

*** 정회원, 연세대학교 공과대학 토목공학과 조교수

• 본 논문에 대한 토의를 1995년 12월 31일까지 학회로 보내 주시면 1996년 2월호에 토의회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

콘크리트는 상대적으로 낮은 하중 하에서도 미세균열이 발생한다. 이러한 미세균열들은 하중이 증가하면 서로 전파되고 연결되어 재료의 손상을 가져오게 된다. 이와같이 내적 결함에 의해 발생하는 콘크리트의 손상과정을 이해하고 역학적으로 모형화하는 작업은 기시적 거동시 재료가 열화되는 역학적 영향들을 구명하는데 중요한 부분을 차지한다.

내적 결함들과 기시적 거동과의 관계를 체계적으로 다루는 방법으로서 Kachanov[1]가 유효응력개념을 제안하므로 연속체손상역학의 기초를 마련하였고, 많은 연구자들(Krajcinovic[2], Lorrain[3], Ishikawa[4], Ju[5])이 콘크리트에 적용하는 연구를 하여 왔다.

Loland[6]와 Mazars[7]는 콘크리트의 일축인장의 응력-변형률 곡선을 모형화하는데 최대응력이전의 경우와 그 이후의 경우에 대하여 각각 다르게 정의한 스칼라 손상변수를 이용하였다. Simo와 Ju[8]는 변형률과 응력을 각각 기준으로 하는 자유에너지포텐셜을 가정하여 콘크리트의 연속체 손상모형을 제안하였다. Klinsinski와 Mroz[9]는 비탄성변형과 콘크리트의 열화에 대한 논문에서 총변형률을 탄성, 소성, 손상부분으로 나누고 손상비례계수를 이용하여 비탄성거동을 나타내었다. 이들이 사용한 손상비례계수는 유효응력개념에 의한 손상변수와 다른 의미를 갖는 것이다. Mazars와 Pijaudier-Cabot[10]는 연속체 손상역학이 콘크리트에 적용하기 알맞은 것임을 역설하면서 열역학의 비가역과정을 이용하여 유도된 등방성의 스칼라 손상모형들을 비교하였다. Suaris와 Ouyang, Fernando[11]는 Bounding면을 이용하여 반복하중을 받는 콘크리트에 대한 손상모형을 제안하였고, Yazdani와 Schreyer[2]는 무근콘크리트에 대하여 소성과 손상을 합성한 모형을 제안하였다. 그러나 이들의 모델은 탄성텐서의 대칭성을 만족시키지 못하는 물리적인 문제를 가지고 있는 변형률등가법을 이용하여 개발되었다.

본 논문에서는 유효응력개념과 함께 탄성에너지

지등가법을 이용하여 열역학의 자유에너지로부터 손상모형을 유도하고 소성과 합성하여 콘크리트의 거동을 나타낼 수 있는 손상모형을 개발하였다.

2. 손상역학의 기본 방정식

임의의 연속체에서 평형은 변형률텐서 ϵ 와 손상변수텐서 \mathbf{D} 의 함수인 에너지 $W(\epsilon, \mathbf{D})$ 로 나타내는 열역학적 포텐셜에 의해 정의된다. 그러면 다음과 같이 변수들을 표현할 수 있다.

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}, \mathbf{Y} = - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{D}} \quad (1a,b)$$

여기서 σ 는 응력텐서이며 \mathbf{Y} 는 손상변수텐서로서 \mathbf{D} 와 연관된 열역학적 힘을 나타내며 손상에너지해방률이라고도 한다.

응력과 손상에 의해 변화된 유효응력 사이의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\sigma} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \sigma \quad (2)$$

여기서, $:$ 는 텐서의 내적 곱을 나타내며, $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ 는 일반적으로 4차의 대칭텐서로서 손상변수텐서와의 사이에 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}) = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위텐서이다.

Fig. 1은 일축손상을 보여 주는데, 손상되지 않은 초기의 상태(Fig. 1(a))의 부재가 하중을 받

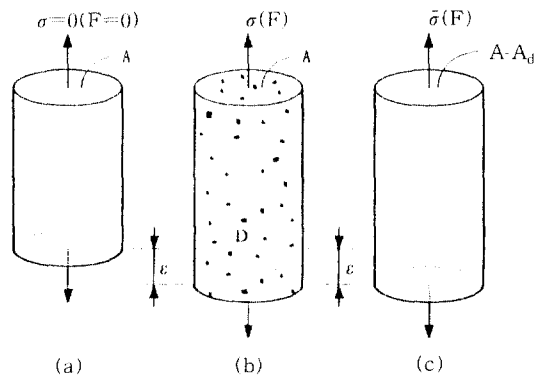


Fig. 1 Uniaxial Damage

번 내부의 결함들에 의하여 손상이 발생(Fig. 1 (b))하게 되며 손상역학은 이와같이 손상된 상태를 가상의 손상되지 않은 상태(Fig. 1(c))로 생각하게 된다.

손상의 구성방정식을 세우기 위해서는 손상변수와 또 하나의 물리적 의미를 갖는 내적변수와와의 관계를 맺어 주는 것이 필요하며 이러한 것으로서 손상되지 않은 재료의 공액탄성에너지 $W^e(\bar{\sigma}, 0)$ 와 손상된 재료의 공액탄성에너지 $W^e(\sigma, \mathbf{D})$ 가 같다고 보는 에너지등가법을 이용하면 다음의 관계를 얻는다.

$$W^e(\sigma, \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^T : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\sigma} ; \varepsilon^e = \frac{\partial W^e(\sigma, \mathbf{D})}{\partial \sigma} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \sigma \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{C} : \mathbf{M}^{T,-1} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{C} 는 탄성강성텐서이며 $\bar{\mathbf{C}}$ 는 유효탄성강성텐서이다.

3. 손상의 전개

온도의 변화가 없는 경우, Helmholtz 자유에너지 Ψ 는 내적변수들을 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\rho \Psi(\varepsilon^e, \mathbf{D}, q, \beta) = W^e(\varepsilon^e, \mathbf{D}) + \Psi_p(q) + \Psi_d(\beta) \quad (6)$$

여기서 ρ 는 밀도이며, $W^e(\varepsilon^e, \mathbf{D})$ 는 탄성변형에너지이고, $\Psi_p(q)$ 와 $\Psi_d(\beta)$ 는 각각 유효소성변형률 q 와 유효손상 β 의 함수인 소성변형경화에너지와 손상에너지이다.

열역학 제2법칙을 나타내는 Clausius-Duhem 부등식에 의해 에너지소산식이 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (7)$$

따라서 손상변수텐서 \mathbf{D} 와 연관된 열역학적 힘 \mathbf{Y} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{Y} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} = -\varepsilon^e : (\mathbf{M}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{D}} : \bar{\mathbf{C}})^s ; \varepsilon^e \quad (8)$$

여기서 첨자 s 는 대칭을 의미한다.

Clausius-Duhem 부등식을 만족하는 손상변수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f_d(\mathbf{Y}, \beta) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{Y} : \mathbf{J} : \mathbf{Y} \right)^{1/2} - [B_0 + B(\beta)] = 0 \quad (9)$$

여기서 \mathbf{J} 는 손상특성텐서이며, B_0 는 손상발생시점이고, $B(\beta)$ 는 손상시점의 증가이다. 또한 \mathbf{J} 는 재료상수인 μ 의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu \\ \mu & 1 & \mu \\ \mu & \mu & 1 \end{bmatrix}, \quad -\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1 \quad (10)$$

식 (9)를 만족시키는 소산력으로부터 손상변수들의 충분형태를 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{D}} = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-\mathbf{Y})} \quad (11)$$

$$\dot{\beta} = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-B)} = \lambda_d \quad (12)$$

또한 식 (9)의 컨시스턴시 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{f}_d = \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\mathbf{Y}} + \frac{\partial f_d}{\partial B} : \frac{\partial B}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\beta} = 0 \quad (13)$$

여기서

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \quad (14)$$

식 (11), (12)와 (14)를 식 (13)에 대입하면 λ_d 를 얻는다.

$$\lambda_d = d \frac{\frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e}{\frac{\partial B}{\partial \beta} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}}} \quad (15)$$

$$\text{여기서 } d = \begin{cases} 1, & \text{if } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\mathbf{Y}} > 0 \\ 0, & \text{if } f_d < 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\mathbf{Y}} \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

이다.

4. 구성방정식

식 (1)로부터 응력의 증분을 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \\ &= \bar{\mathbf{C}} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{D}} : \varepsilon^e : \dot{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (14)를 식 (11)에 대입하고 다시 식 (17)에 대입하면, 변형률증분과 응력증분사이의 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{K}} : \dot{\varepsilon}^e \quad (18)$$

여기서 $\bar{\mathbf{K}}$ 는 유효손상강성텐서로서 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{C}} - \frac{\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{D}} : \varepsilon^e : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \times \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon^e}}{\frac{\partial B}{\partial \beta} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}}} \quad (19)$$

여기서 \otimes 는 텐서의 외적 곱을 나타내며, 일차원 손상의 경우 $J=1$ 이 되고 최대응력시 $\bar{\mathbf{K}}=0$ 이 되므로 식 (19)로부터 $dB/d\beta$ 를 구하면 다음 식과 같이 얻는다.

$$\frac{dB}{d\beta} = \frac{3}{2} E (\varepsilon_{\text{peak}}^e)^2 \quad (20)$$

여기서 $\varepsilon_{\text{peak}}^e$ 는 최대응력시의 탄성변형률이다.

식 (21)과 같이 변형률을 탄성성분과 소성성분으로 분리하면 소성영향을 고려할 수 있다.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (21)$$

식 (21)을 식 (18)에 대입하면 식 (22)와 같다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{K}} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (22)$$

항복면의 컨시스턴시 조건을 쓰면

$$\dot{f}_p = \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{K}} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q} \dot{q} \quad (23)$$

여기서 \mathbf{R} 는 유효소성변형률 q 와 연관된 열역학적

힘이다. 소성의 흐름법칙은 다음과 같이 표현되며

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \quad (24)$$

λ_p 는 다음과 같다.

$$\lambda_p = \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{K}} : \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{K}} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q} \phi} \quad (25)$$

여기서 g 는 소성포텐셜이며 $\phi (= \dot{q} / \lambda_p)$ 는 스칼라함수이다.

이제 식 (22)에서 식 (25)까지 서로 대입하여 정리하면 식 (26)과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{H}} : \dot{\varepsilon} \quad (26)$$

여기서 $\bar{\mathbf{H}}$ 는 식 (27)과 같이 표현되는 유효손상-소성강성텐서이다.

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{K}} - \frac{\bar{\mathbf{K}} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{K}}}{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{K}} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q} \phi} \quad (27)$$

식 (26)은 콘크리트의 탄성, 손상 및 소성을 고려한 구성방정식이 된다.

5. 모델의 검증

본 논문의 구성방정식을 검증하기 위하여 일축 압축응력상태, 일축인장응력상태, 이축압축응력상태, 이축인장응력상태, 일축압축-일축인장응력상태 등의 경우에 대하여 Fig. 2와 같은 콘크리트 요소의 거동을 실험결과와 본 논문의 손상모델을 이용한 결과를 비교하였다. 콘크리트의 파괴기준은 Willam-Warneke의 기준을 사용하였고 소성포텐셜은 Drucker-Prager 형태의 함수를 사용하였으며 경화법칙은 Han-Chen의 부등경화모델 [13]을 사용하였다. 한편 strain rate 효과는 고려하지 않았다.

비교실험으로 선택한 것은 Kupfer[14]의 실험으로서 콘크리트의 재료특성은 압축강도가 32.

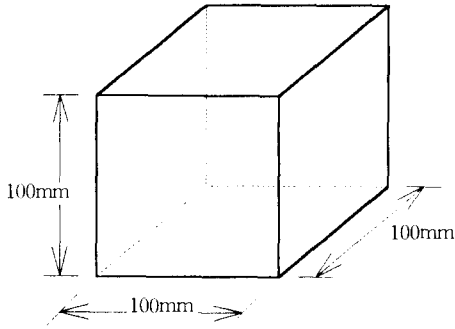


Fig. 2 Cubic Model

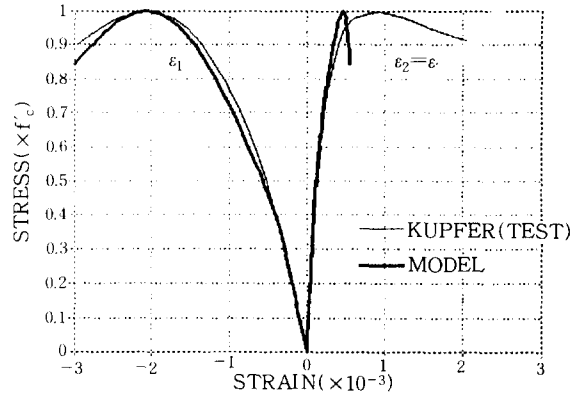


Fig. 3 Comparison of Uniaxial Compression Behavior

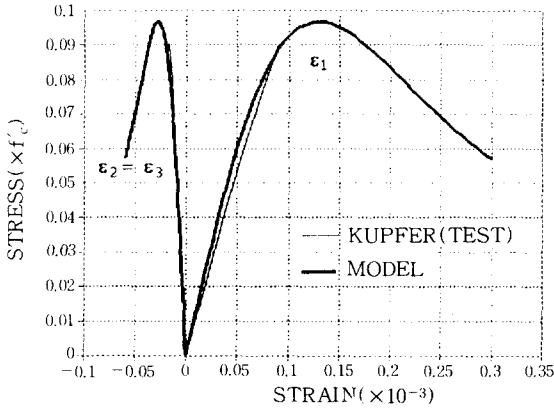


Fig. 4 Comparison of Uniaxial Tension Behavior

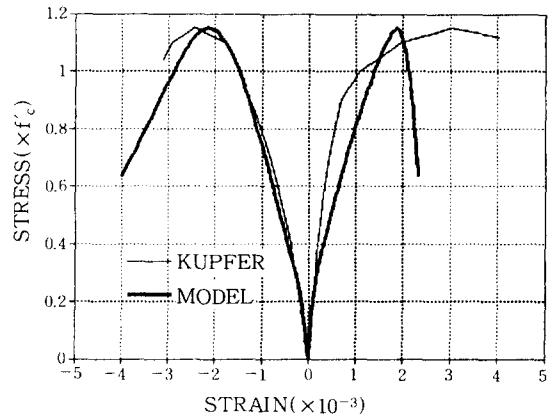


Fig. 5 Comparison of Biaxial Compression Behavior ($\sigma_1 / \sigma_2 = -1.0 / -1.0$)

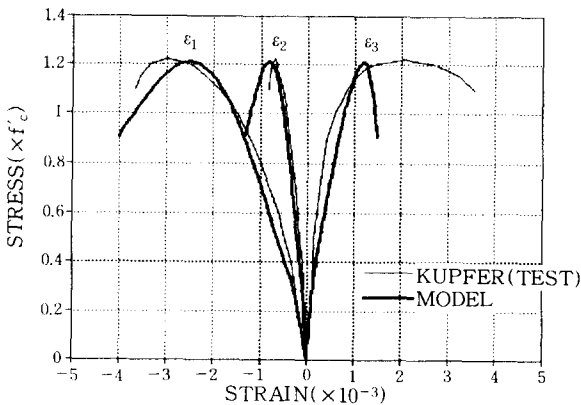


Fig. 6 Comparison of Biaxial Compression Behavior ($\sigma_1 / \sigma_2 = -1.0 / -0.52$)

2MPa(328kg/cm²), 탄성계수가 31700MPa (323250kg/cm²)이며 포아손비는 0.22이다. 실험의 종류는 일축압축거동(Fig. 3) 및 일축인장거동(Fig. 4)의 일축응력상태와 이축응력상태로서 1축과 2축의 응력비에 따라 두축이 모두 동일한 압축응력을 갖는 이축압축거동(Fig. 5), 1축과 2축의 응력비가 (-1/-0.52)인 이축압축거동(Fig. 6), 또한 한축은 압축이며 다른 한축은 인장으로 응력비가 (-1/0.204)인 압축-인장거동(Fig. 7), 그리고 두축이 모두 인장인 이축인장거동(Fig. 8)과 1축과 2축의 응력비가 (1/0.55)인 이축인장거동(Fig. 9)에 대하여 본 모델에 의한 계산결과와 실험결과를 비교하여 그림으로 도시하

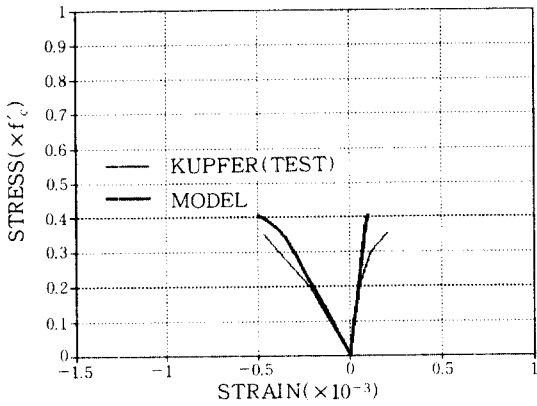


Fig. 7 Comparison of Compression-Tension Behavior ($\sigma_1/\sigma_2 = -1.0/0.204$)

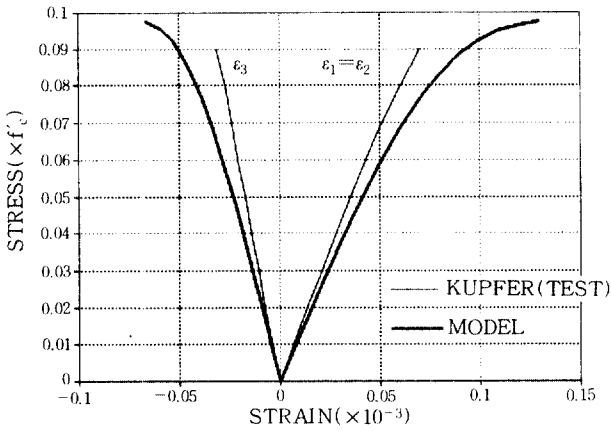


Fig. 8 Comparison of Biaxial Tension Behavior ($\sigma_1/\sigma_2 = 1.0/1.0$)

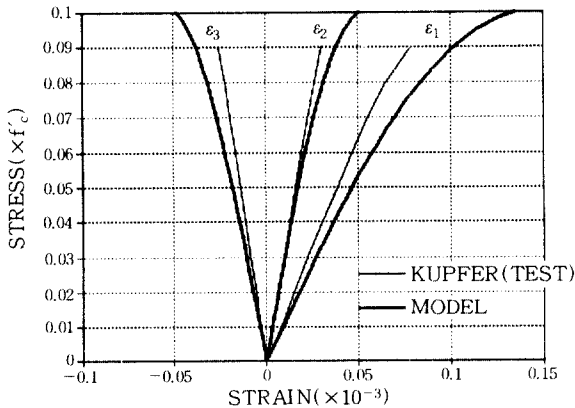


Fig. 9 Comparison of Biaxial Tension Behavior ($\sigma_1/\sigma_2 = 1.0/0.55$)

였다. 그림으로부터 본 모델이 여러 응력상태의 콘크리트 거동을 실험과 유사하게 예측하고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 유효응력개념과 등가탄성에너지법을 이용하여 손상 특성 나타내었으며, Helmholtz 자유에너지와 소산 포텐셜을 이용하여 손상모델의 손상전개와 구성방정식을 유도하였다. 모델을 검증하기 위하여 일축과 이축의 하중을 받는 콘크리트 요소에 대하여 유한요소해석을 하였다. 해석결과와 실험결과의 비교로부터 본 모델이 콘크리트의 비선형 거동을 잘 나타냄을 알았다.

참 고 문 헌

1. Kachanov, L. M., Introduction to Continuum Damage Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.
2. Krajcinovic, D. and Fonseka, G. U., "The continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part I and II", J. Applied Mechanics, Vol. 48, 1981, pp.809-824.
3. Lorrain, M. and Loland, K. E., "Damage Theory Applied to Concrete", Fracture Mechanics of Concrete, 1983, pp.341-369.
4. Ishikawa, M., Yoshikawa, H., and Tanabe, T., "The Constitutive Model in Terms of Damage Tensor", Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, ASCE, 1985, pp.93-103.
5. Ju, J. W., "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspect", Int. J. Solids & Structures, Vol. 25, No. 7, 1989, pp. 803-833.
6. Loland, K. E., "Continuous Damage Model for Load-Response Estimation of Concrete", Cement and Concrete Research, Vol. 10, 1980, pp.395-402.
7. Mazars, J., "Mechanical Damage and Fracture of Concrete Structures", 5th Int. Conf.

- on Fracture, Cannes, 1980.
8. Simo, J. C. and Ju, J. W., "Strain-and Stress-Based Continuum Damage Model-I, II", Int. J. Solids & Structures, Vol. 23, No. 7, 1987, pp.821-869.
 9. Klisinski, M. and Mroz, Z., "Description of Inelastic Deformation and Degradation of Concrete", Int. J. Solids & Structures, Vol. 24, No. 4, 1988, pp.391-416.
 10. Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. "Continuum Damage Theory-Application to Concrete", J. Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 2, ASCE, Feb. 1989, pp.345-365.
 11. Suaris, W., Ouyang, C., and Fernando, V. M., "Damage Model for Cyclic Loading of Concrete", J. Engineering Mechanics, Vol. 116, No. 5, ASCE, May 1990, pp.1020-1035.
 12. Yazdani, S. and Schreyer, H. L., "Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete", J. Engineering Mechanics, Vol. 116, No. 7, ASCE, July, 1990, pp. 1435-1450.
 13. Han, D. J. and Chen, W. F., "A Nonuniform Hardening Plasticity Model for Concrete Materials," J. Mechanics of Materials, Vol. 4, No. 4, 1985, pp.283-302.
 14. Kupfer, H., Hilsdorf, H. K., and Rusch, H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stress," J. American Concrete Institute, Vol. 66, No. 6, 1969, p.656-666.

(접수일자 : 1995. 9. 20)