

# Lanczos 알고리즘을 도입한 Ritz Vector법에 의한 구조물의 동적해석

## Structural Dynamic Anaysis by Ritz Vector Method Modified with Lanczos Algorithm

심 재 수\*  
 Shim, Jae-Soo  
 황 의 승\*\*  
 Hwang, Eui-Seung  
 박 주 경\*\*\*  
 Park, Joo-Kyung

### 요 약

동적해석에 대한 최근의 연구는 구조물의 자유도보다 적은 모우드 형상들을 사용하여 구조물을 해석하는 효과적인 방법을 찾는데 있다. Ritz알고리즘과 모우드가속도법은 모우드중첩법을 개선하고자 개발되었는데, Ritz 알고리즘은 하중의 공간적 특성을 포함하지만, 계산과정에서 유용한 직교성을 잃는 경향이 있으며, 모우드가속도법은 만족할 만한 해를 얻기 위해 많은 수의 모우드 형상들을 고려해야하는 단점이 있다. 또한 앞의 두 방법을 조합한 방법이 개발되었으나 너무 많은 계산과정과 시간을 필요로 한다.

이 연구의 목적은 Lanczos 알고리즘을 이용하여 Ritz 알고리즘의 효율성과 정확성을 보완하고 이를 프로그램화하여 검증하는데 있다.

본 연구의 결과로부터 Modified Ritz 알고리즘을 이용한 동적해석방법이 합리적이 증명되었다.

### Abstract

Recent researches in dynamics are focused on finding effective methods to analyze the dynamic behavior of structures by fewer mode shapes their number of dgrees of freedom. Ritz algorithm and mode acceleration method were developed to improved the mode superposition. Ritz algorithm can include distribution of external loads but be apt to lose the orthogonality condition, which is useful properties in the analysis. Also mode acceleration method should consider a large number of mode shapes to get a satisfactory results. Another method, combining previous two method, was developed but too much computational efforts and times were required.

The purpose of this study is to develop and evaluate the Ritz algorithm modified with the lanczos algorithm to improve the efficiency and accuracy.

As a result of this study, dynamic analysis using modified Ritz algorithm was proved to be the rational analysis method.

\* 경희대학교 토목공학과 교수  
 \*\* 경희대학교 토목공학과 조교수  
 \*\*\* 서영기술단 근무 대리

이 논문에 대한 토론을 1996년 6월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

거대 구조물의 선형탄성 동적 해석에 있어서 해의 정확성과 경제성에 대한 관심이 고조되면서, 동적 해석에 대한 최근의 연구<sup>1,7,8)</sup>는 많은 수의 자유도를 가진 구조물을 상대적으로 적은 수의 모드 형상을 사용하여, 비교적 높은 정확도의 해를 찾는 경제적인 해석 방법을 개발하는데 집중되어 있다. 일반적으로 거대 구조물의 해석에는 정확도보다는 적정 정도의 해를 경제적이고 효율적으로 구하는 것이 현실적인 주 관점이 된다.

Wilson et. al.<sup>5,6)</sup>에 의해 도입된 Ritz vector는 Eigen vector들과는 달리, 간단한 순환관계에 의하여 생성되고, 또한 하중의 공간적 특성을 반영하므로 Eigen value 해석을 이용한 모드중첩법보다 해의 정확도와 계산시간에 있어서 많은 개선을 보인다. 그러나 운동방정식의 변환 과정에서 유용한 직교성을 갖기 위해 많은 계산이 필요하고 반복 연산으로 인해 오차가 가중되어 가는 단점이 있다.

Component Mode Method<sup>4)</sup>는 거대구조물을 여러 개의 부분구조물로 나누고 이들 부분구조물을 처리하여 보다 적은 구조물로 시스템을 변환시켜 경제적으로 동적 해석을 하는 방법이다. 이 방법에는 부분구조물의 독립변위(Master D.O.F)와 종속변위(Slave D.O.F)를 어떻게 선택하느냐에 따라 해의 정확도 변화가 크다는 단점이 있으므로 동적 하중의 공간적 특성과 시간적 특성을 각각 고려하는 Ritz 알고리즘과 모드가속도법을 적용하면 같은 수의 Ritz 모드만을 사용한 것보다 향상된 결과를 얻을 수 있다.<sup>8)</sup> 그러나 또한 Eigen value를 구하기 위해서 전체 구조물의 Eigen 해석을 해야 하는 부가적인 계산 시간이 필요하며 경제적인 해석법의 개발이라는 측면에서 부정적이다.

본 연구에서는 모드가속도법대신에 Lanczos 알고리즘을 Ritz 알고리즘에 도입하였다. Ritz 알고리즘에서의 약점인 벡터들의 직교성 유지를 위한 많은 계산과 오차의 누적을 제거하기 위하여 Lanczos 알고리즘에서는 시스템행렬을 삼대각행렬형(Tridiagonalizing)으로 변환시킨다. 따라서

구해지는 벡터는 앞의 두 벡터와 직교성을 유지하면 자동적으로 나머지 모든 벡터와 직교성이 유지되는 장점이 있다. 이 장점을 Ritz 알고리즘에 혼용하면 Modified Ritz vector들이 경제적으로 결정되고 해의 정도를 높일 수 있다. 감소된 시스템의 강성행렬이 대각행렬이 되고 질량행렬이 삼대각행렬로 되어 운동방정식의 시간이력적분이 경제적으로 수행되는 이점이 추가된다.

이 연구에서는 이의 이론적 내용을 정립하고 이를 프로그래밍하여 소형컴퓨터에서 이용할 수 있는 보다 효율적인 동적 해석법을 제시하고 이 방법의 안정성을 검증하고자 한다.

## 2. Ritz 알고리즘

Eigenvalue 해석을 위한 Ritz 알고리즘은 다음과 같이 요약될 수 있다. 첫번째 Ritz 벡터는 정적 하중에 의한 System의 변위로부터 얻어진다.

$$[K] \{\bar{X}_1\} = \{f\} \quad (2.1)$$

여기서,  $[K]$ 는 System의 강성행렬이고,  $\{f\}$ 는 하중의 정적 성분이다.  $\{\bar{X}_1\}$ 을 행렬  $[M]$ 에 대하여 정규화시키면 다음과 같다.

$$\{X_1\} = \frac{\{\bar{X}_1\}}{(\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\})^{1/2}} \quad (2.2)$$

각 벡터들 ( $\{\bar{X}_i\}$ )이 앞에서 결정된 벡터와 질량행렬에 대해 직교하도록 하기 위해 다음 식을 도입한다.

$$\{\bar{X}_i\} = \{\tilde{X}_i\} + \sum_{j=1}^{i-1} C_j \{X_j\} \quad (2.3)$$

여기서,  $\{\tilde{X}_i\}$ 는 모든 이전 벡터들에 대해 직교하는 벡터이다. 이 벡터가 다시 모든 벡터에 직교한다는 조건으로부터 계수  $C_j$ 를 얻기 위하여 양변에  $\{X_k\}^T [M]$ 을 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{X_k\}^T [M] \{\bar{X}_i\} &= \{X_k\}^T [M] \{\tilde{X}_i\} \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \{X_k\}^T [M] \{X_j\} C_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

식(2.4)에 직교조건을 도입하면 우변의 두번째 항이  $j=k$  일 때  $C_k$ 만 남는다.

$$C_k = \{X_k\}^T [M] \{\bar{X}\} \quad (2.5)$$

그러므로, 정규화된 벡터  $\{X_i\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\tilde{X}_i\} = \{\bar{X}_i\} - \sum_{j=1}^{i-1} C_j \{X_j\} \quad (2.6)$$

$\{X_i\}$ 가 정규화 되었기 때문에 질량에 orthonormal 한 벡터  $\{X_i\}$ 가 만들어진다.

$$\{X_i\} = \frac{\{\tilde{X}_i\}}{(\{\tilde{X}_i\}^T [M] \{\tilde{X}_i\})^{1/2}} \quad (2.7)$$

$m$ 개의 벡터가 결정되어지면 다음과 같이 좌표 변환을 할 수 있다.

$$\{U\} = \sum_{i=1}^m (\{X_i\} \{Y_i\}) \quad (2.8)$$

식(2.8)은 모우드중첩법에서 Eigen벡터에 의한 변위의 형상과 일치한다. 일반적으로 시스템의 동적 평형방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{f\} g(t) \quad (2.9)$$

여기서,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  행렬의 크기는  $(n \times n)$ 이다. 식(2.9)를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$[M] \{X\} \ddot{Y} + [C] \{X\} \dot{Y} + [K] \{X\} Y = \{f\} g(t) \quad (2.10)$$

위 식의 양변에  $\{X\}^T$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\{X\}^T [M] \{X\} \ddot{Y} + \{X\}^T [C] \{X\} \dot{Y} + \{X\}^T [K] \{X\} Y = \{X\}^T \{P(t)\} \quad (2.11)$$

여기서,  $\{P(t)\} = \{f\} g(t)$ 이다. 따라서 시스템의 size는  $(n \times n)$ 에서  $(m \times m)$ 으로 감소된다.

$$[M^*] \{\ddot{U}\} + [C^*] \{\dot{U}\} + [K^*] \{U\} = \{f^*\} g(t) \quad (2.12)$$

여기서,

$$[M^*] = \{X\}^T [M] \{X\} : \text{Effective Mass Matrix}$$

$$[K^*] = \{X\}^T [K] \{X\} : \text{Effective Stiffness Matrix}$$

$$[C^*] = \{X\}^T [C] \{X\} : \text{Effective Damping Matrix}$$

$$\{f^*\} = \{X\}^T \{f\} : \text{Effective Load Matrix}$$

일반적으로  $[M^*]$ 은 Ritz벡터가 Mass-orthonormal하기 때문에 단위행렬이 되고  $[C^*]$ 와  $[K^*]$ 는 여전히 꼭 찬 행렬(Full Matrix)이다. 그러므로  $n$ 개의 연성화된 운동방정식(coupled equation)이  $m$ 개의 연성화된 운동방정식으로 감소된다.

이제 이 운동방정식을 비연성(Uncoupled)화하기 위해서 감소된 System에 대하여 Eigen해석을 한다.

$$([K^*] - \omega_j^2 [M^*]) \{Z_j\} = [0] \quad (2.13)$$

$\omega_j$ 는 축소된 System에서 정확한 고유값이고, 전체 System에서는 근사적인 값이다. 고유 벡터  $\{Z_j\}$ 는 직교성(Orthogonality condition)을 갖고 또한 정규화되어진다.

$$\begin{aligned} \{Z_i\}^T [M] \{Z_j\} &= 0 \quad \{Z_i\}^T [K] \{Z_j\} = 0 \quad (i \neq j) \\ \{Z_i\}^T [M] \{Z_i\} &= 1 \quad \{Z_i\}^T [K] \{Z_i\} = \omega^2 \quad (i=j) \end{aligned} \quad (2.14)$$

위 과정을 통하여, 최종 Ritz Vector는 다음과 같다.

$$\{X^0\} = \{X\} \{Z\} \quad (2.15)$$

### 3. Lanczos 알고리즘

Lanczos알고리즘은 시스템행렬을 삼대각행렬(tridiagonal matrix)로 변환시킴으로써 모우드형상벡터가 최초의 두 벡터와 직교성을 만족시킴을 하는 것이다. 이 알고리즘은 다음과 같다.

해석에 이용하기 위하여 하중벡터 $\{P\}$ 는 하중분포를 나타내는 load distribution vector  $\{R\}$ 과 시간의 함수(amplitude function)  $f(t)$ 로 분리한다. 첫번째 벡터는 시스템의 정적 평형방정식으로 부터 만들어진다.

$$[K] \{q_1\} = \{R\} \quad (3.1)$$

여기서,  $\{q_1\} = [K]^{-1} \{R\}$  이다. 만들어진 벡터는 질량행렬에 대해 직교하도록 정규화된다.

$$\{\psi_1\} = \frac{1}{\beta_1} q_1 \quad (3.2)$$

여기서,  $\beta_1 = \sqrt{\{q_1\}^T [M] \{q_1\}}$  이다. 두번째 이후의 모드 형상들은 시스템이 바로 앞에서 만들어진 모드형상으로 진동할 때 발생하는 관성력에 의해 생기는 정적 처짐으로부터 만들어진다.

$$[K] \{q_2\} = [M] \{\psi_1\} \quad (3.3)$$

$$\{\tilde{q}_2\} = \{q_2\} - \alpha_1 \{\psi_1\} \quad (3.4)$$

여기서,  $\alpha_1$ 은 두번째 벡터가 앞의 벡터와 질량행렬에 대해 직교성을 갖기 위한 계수로서 Gram-schmidt의 직교화과정에서 만들어진다.

$$\alpha_1 = \{\psi_1\}^T [M] \{q_2\}$$

$$\{\psi_2\} = \frac{1}{\beta_2} \{\tilde{q}_2\} \quad (3.5)$$

여기서  $\beta_2 = \sqrt{\{\tilde{q}_2\}^T [M] \{\tilde{q}_2\}}$  이다. 세번째 벡터는 다음과 같다.

$$[K] \{q_3\} = [M] \{\psi_2\} \quad (3.6)$$

$$\{\tilde{q}_3\} = \{q_3\} - \alpha_2 \{\psi_2\} - \beta_2 \{\psi_1\} \quad (3.7)$$

여기서,  $\alpha_2 = \{\psi_2\}^T [M] \{q_3\}$

$\beta_2 = \{\psi_1\}^T [M] \{q_3\}$  이 되며

세번째 벡터가 첫번째 벡터와 직교성을 갖기 위한 계수  $\beta_2$ 가 두번째 벡터의 normalization factor와 일치한다.

$$\{\psi_3\} = \frac{1}{\beta_3} \{\tilde{q}_3\} \quad (3.8)$$

여기서,  $\beta_3 = \sqrt{\{\tilde{q}_3\}^T [M] \{\tilde{q}_3\}}$  이다. 네번째 벡터는 다음과 같다.

$$[K] \{q_4\} = [M] \{\psi_3\}$$

$$\{\tilde{q}_4\} = \{q_4\} - \alpha_3 \{\psi_3\} - \beta_3 \{\psi_2\} - \gamma_3 \{\psi_1\} \quad (3.10)$$

여기서,  $\alpha_3 = \{\psi_3\}^T [M] \{q_4\}$

$\beta_3 = \{\psi_2\}^T [M] \{q_4\}$

$\gamma_3 = \{\psi_1\}^T [M] \{q_4\}$  이다.

$$\{\psi_4\} = \frac{1}{\beta_4} \{\tilde{q}_4\} \quad (3.11)$$

여기서,  $\beta_4 = \sqrt{\{\tilde{q}_4\}^T [M] \{\tilde{q}_4\}}$  이다.

$\beta_3$ 는 세번째 벡터의 normalization factor와 동일하다. 여기서 이 방법의 중요한 장점이 나타나는데 그것은  $\gamma_3$ 가 0이 됨을 간단한 행렬 연산에 의해 확인할 수 있다는 것이다. 이는 세번째 벡터가 첫번째 벡터와 자동적으로 직교조건을 만족함을 의미하며, 따라서 Gram-schmidt 과정을 다시 적용할 필요가 없음을 보여준다.

계속하여 추후에 만들어지는 벡터는 앞의 절차와 같이 단지 두벡터에 대하여만 직교하도록 만들어지며, 그렇게 만들어진 벡터는 그 이전의 모든 벡터들과는 자동적으로 직교조건을 만족하는 매우 편리한 형태의 모우드 형상 vector가 만들어진다.

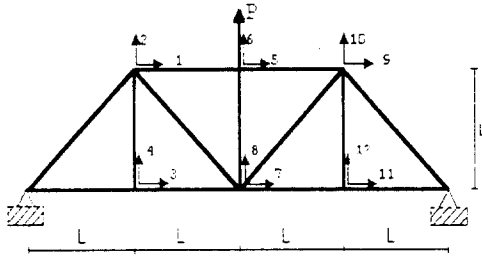
#### 4. 해석예

본 연구의 안정성과 효율성의 검증을 위해서 Ritz알고리즘을 사용하는 범용 소프트웨어인 SAP90과 본 연구에서 개발된 해석방법으로 같은 예제를 해석하여 결과를 비교하였다.

검증에 사용된 예제는 그림 1과 같이 모두 12개의 자유도를 가진 트러스구조물이며 이 트러스구조물의 고유진동수는 표 1과 같다. 6번째 자유도에 조화하중의 주파수를 CASE1~5와 같이 작용시켰다. 각각의 하중이 작용할 때 사용되는 모우드 수를 달리하면서 그 결과를 12개 전 모우드를 사용한 SAP90에 의한 해석결과와 비교한 결과가 그림 2에서부터 그림 6에 나와 있다. 그림 2와 그림 3에서부터, 즉 작용하는 하중의 주파수가 작을 때에는 3개의 vector만으로도 12개의 vector를 고

표 1. 구조물의 고유진동수(rad/ sec)

모우드	1	2	3	4	5	6
$\omega$	1.708	3.02	4.336	4.775	6.775	8.378
모우드	7	8	9	10	11	12
$\omega$	10.431	11.03	11.340	11.545	13.372	13.813



Material Property

$E=100\text{kg/cm}^2$   $A=1.0\text{cm}^2$   $l=10\text{m}$   $\rho=0.1\text{kg/cm}^3$

- CASE 1.  $P=100\sin 0.1t$  at 6th D.O.F.
- CASE 2.  $P=100\sin t$  at 6th D.O.F.
- CASE 3.  $P=100\sin 10t$  at 6th D.O.F.
- CASE 4.  $P=100\sin 40t$  at 6th D.O.F.
- CASE 5.  $P=100\sin 80t$  at 6th D.O.F.

그림 1. 예제구조물

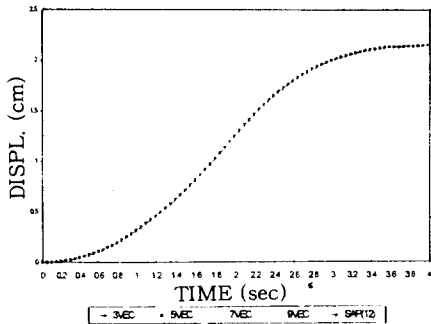


그림 2. CASE 1의 결과 (6번째 D.O.F.의 변위)

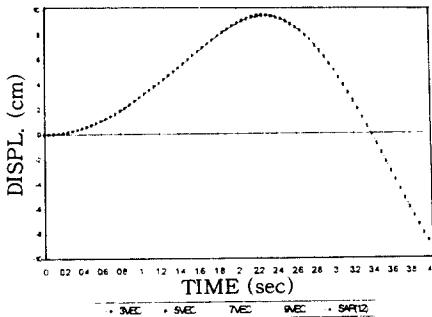


그림 3. CASE 2의 결과 (6번째 D.O.F.의 변위)

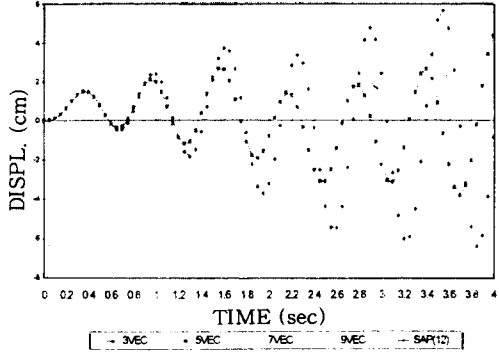


그림 4. CASE 3의 결과 (6번째 D.O.F.의 변위)

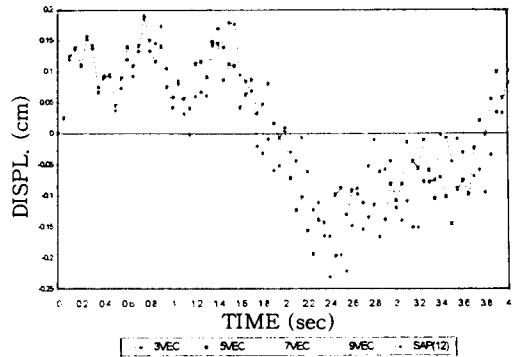


그림 5. CASE 4의 결과 (6번째 D.O.F.의 변위)

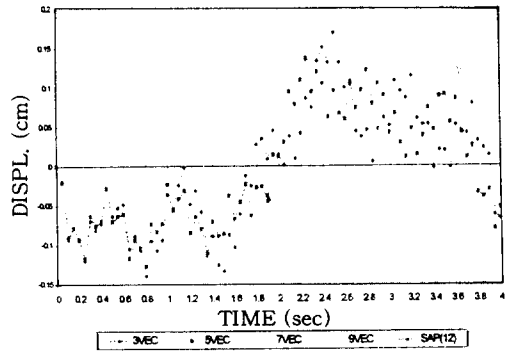


그림 6. CASE 5의 결과 (6번째 D.O.F.의 변위)

려해서 SAP90으로 해석한 결과와 5% 이내의 오차를 보였다. 또 그림4~6에서는 비록 하중의 frequency가 고차일때(CASE 5에서는 가장 큰 고유진동수 보다 5.8배 큼)에도 5개의 vector 만으로도 SAP90의 결과와 근사한 해를 구할 수 있음을 보여주고 있다. 그리고 계산량의 감소를 확인하기

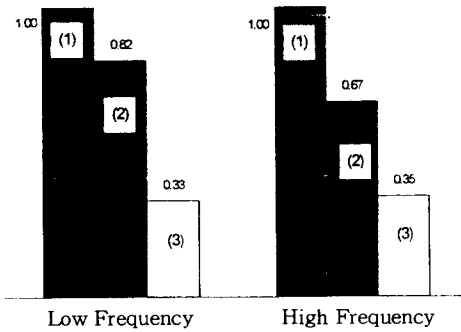


그림 7. 해석에 걸리는 시간 비교

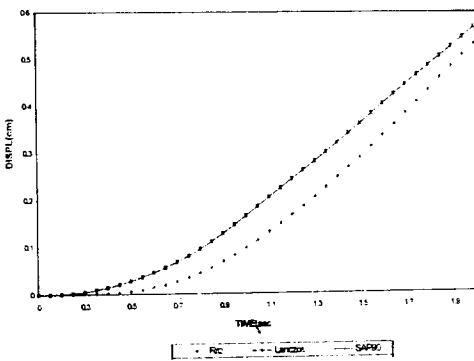


그림 8. Ritz와 Lanczos방법의 정확도 비교(CASE 1)

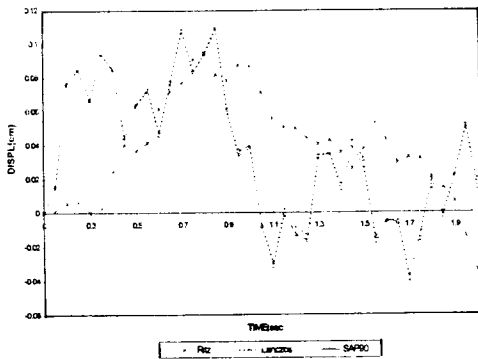


그림 9. Ritz와 Lanczos방법의 정확도 비교(CASE 4)

위해 기존의 Ritz알고리즘을 이용하여 적정정도의 해를 계산하는데 걸리는 계산시간을 1.0으로 보고(1), 본 연구의 결과와 같은 수의 Ritz벡터를 고려했을 경우(2), 그리고 본 연구의 결과(3)를 상대적인 비로 환산하여 그림 7에 나타내었다. 저

주파나 고주파의 하중이 작용할 때 모두 계산시간이 감소함을 알 수 있다. 본 연구에서 개발된 방법의 정확도를 비교하기 위하여 5개의 모드를 사용하여 Ritz방법과 Lanczos알고리즘을 도입한 방법으로 CASE 1과 CASE 4에 대한 결과를 그림 8과 그림 9에 나타내었다. 두 경우 모두에 대해서 본 연구의 방법이 훨씬 오차가 적음을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구의 목적은 거대 구조물의 경제적인 동적 해석을 위한 알고리즘의 정립과 컴퓨터 프로그램을 통하여 이론의 안전성을 검증하고 이를 해석과 설계에 응용할 수 있도록 하는 것이다.

Ritz 알고리즘과 모우드가속도법을 적용한 알고리즘을 사용하면 동적 하중의 공간적, 시간적 특성을 고려한 해석결과의 정확도가 일관성이 없으므로 이를 범용으로 실제 설계에 적용하기에는 무리가 있다. 이를 개선하기 위하여 Ritz알고리즘에 Lanczos알고리즘을 도입하여 예제해석을 한 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 동적 응답을 구하기 위한 선행단계로서 모우드해석은 해의 정확도를 판가름하는 중요한 과정으로써 해석에 포함시킨 모우드의 갯수와 각 모우드 성분이 지닌 특성은 매우 신중하게 선택되어져야함을 알 수 있다. 고려해야하는 자유도가 많아질수록 계산에 소요되는 시간과 노력을 최소화하면서 적절한 정확도의 해를 찾는 동적 해석방법이 필수적임을 상기할 때 본 방법은 매우 합리적인 동적 해석방법임이 증명되었다.

(2) 기존의 Ritz알고리즘이 일반적인 동적해석법에서 나타나는 단지 고차모드의 응답이 제외되어서 나타나는 오차를 피하기 위한 것이라면 본 방법은 기존의 장점에 시간적, 경제적으로도 유리한 점이 추가되었다고 할 수 있다.

앞으로 이 연구를 구조물의 유한요소해석과 결합하여 구조물의 동적 해석과 설계에 바로 적용이 가능하도록 지속적인 연구가 필요하다.

### 참 고 문 헌

1. Arnold, R.R. and Citerley, A.L., "Application

- of Ritz Vectors for Dynamic Analysis of Large Structures," *Computer & Structures*, Vol.21, 1985, pp.901-907.
2. Guyan, R.S., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol.3, 1965, p.380.
  3. Humar, J.L., *Dynamics of structure*, Prentice Hall, 1990.
  4. Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural System Using component Method," *AIAA Journal*, Vol.3, No.4, 1965, pp.678-685.
  5. Willson, E.L. and Bayo, E.P., "Use of Special Ritz Vectors in Dynamics Substructure Analysis," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol.112, 1986, pp.1944-1945.
  6. Willson, E.L., Yusan, M.W., and Dickens, J. M., "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.10, 1982, pp.813-823.
  7. 심재수, 김준호, "개선된 Ritz 벡터를 이용한 구조물의 동적해석," *경희대학교 논문집*, 제20집, 1991, pp.636-649.
  8. 심재수, 박명균, "개선된 콤포넨트모드법을 이용한 거대 구조물의 동적 해석," *한국전산구조공학회 논문집*, 제6권 제1집, 1993, pp.37-44.

(접수일자 : 1995. 12. 22)