선형탄성 파괴역학해석에서 J-적분법에 의한 p-Version 균열모델의 적용

Application of p-Version Crack Model Based on J-integral Method in LEFM Analysis

이 채 규*
Lee, Chay-Gyu
우 광 성**
Woo, Kwang-Sung
김 영 인**
Kim, Young-Ihn

요 약

이차원 선형탄성파괴역학 문제에서 인장모우드 상태의 응력확대계수를 명료하게 산정할 수 있는 독립적 적분경로에 근거를 둔 새로운 J-적분 균열모델이 제안되었다. 이 방법은 p-수렴 개념에 기초를 두며 기존의 유한요소 컴퓨터코드에 쉽게 적용할 수 있다. 본 연구에서는 균열선단에서의 응력상태가 조사되었으며, 균열선단으로 부터 떨어진 정규거리로 표현되는 서로 다른 적분경로에 따라 J-적분치가 유한요소해석시 Rice의 이론처럼 경로에 독립적인 해를 얻을 수 있는지 분석되었다. 세가지 수치예제인 중앙균열판, 일변균열판과 양변균열판과 양변균열판의 p-수렴 해석결과가 종래의 h-수렴법에 의한 해석결과와 비교되었으며, 또한 이 결과는 제안된 방법의 정확성과 수치적 안정성을 보여주고 있다.

Abstract

A new path independent contour integral formulus for the distint calculation of mode I stress intensity factors in two dimensional linear elastic fracture mechanics problems is presented. This method is based on p-convergence concepts and can be easily appended to existing finite element computer codes. In this study, the stress state at crack tip has been investigated and the path independence of J-integral values has been tested with respect to different contours expressed by normalized distance apart from the crack tip. Numerical results by p-convergence for the problems such as centrally cracked panels, single and double edged cracks in rectangular panels have been compared with those by the conventional h-convergence. The comparison demonstrates the accuracy and stability of the proposed method.

* 한국건설 품질관리 연구원 구조부 부장
** 영남대학교 토목공학과 부교수
*** 조선대학교 토목공학과 교수

이 논문에 대한 토론을 1996년 6월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

연속체의 해석영역과 경계조건, 그리고 하중상태가 단순할 경우는 소위 경계치문제(B.V.P. ; Boundary Value Problem)로 수학적 정식화를 통한 지배방정식의 이론해를 구하면 된다. 이 때 지배방정식은 일반적으로 편미분방정식(partial differential equation)으로 주어지는데 주지하다시피 방정식의 엄밀해를 구하는 방법은 변수분리법(separation of variables), 상승법(product method), 후리에 법(Fourier's method) 등이 있으나 제한된 경우의 편미분방정식을 해석하는데 그친다. 특히, 연속체에서 수학적 특이성(mathematical singularity)이 발생되는 문제의 엄밀해는 보다 제한적이라 말할 수 있다. 그러므로, 수치해석방법이 모색되어 유한차분법, 유한요소법, 경계적분법 등이 특이성을 갖는 연속체문제를 해결하는 중요한 수단으로 각광을 받아오고 있는 것이다.

구조역학문제에서 응력특이가 발생되는 요인에는 세가지로 요약해 볼 수 있는데 첫째는, 기하학적인 요인이다. 즉, 균열문제, 손상단면(cut-outs), 개구부(opening), 보강재연결, 경계조건의 급작스런 변화 등을 꼽을 수 있다. 둘째는, 재료적인 요인으로 서로 재료적인 성질이 다른 복합재료로 구성된 적층판(laminated plates)을 생각할 수 있다. 셋째는, 하중에 의한 요인을 들 수 있다. 집중하중이나 선하중(line load)이 이에 해당된다. 이 중에서, 균열문제는 $r^{-1/2}$의 기하학적 요인에 의한 응력특이가 발생되는 대표적인 문제로 균열선단에서 응력경사가 매우 가파르게 되므로 유한요소 연구자들의 관심을 끌어오고 있다.

균열문제의 유한요소 해석방법은 변위외삽법(displacement extrapolation method)변형, 에너지방출율법(strain energy release rate method), 가상균열확장법(virtual crack extension method) 및 J-적분법(J-integral method) 등을 들 수 있다. 변위외삽법은 균열선단에서 임의 거리만큼 떨어진 수개 지점의 변위를 이용하여 각각의 응력확대계수를 직접 계산한 후 외삽법을 이용하여 균열선단의 응력확대계수를 계산하는 방법으로써 정확한 응력확대계수를 산정할 수 없다. 에너지방출률법으로 응력확대계수를 산정하기 이해서는 균열확장선과 확장후의 균열확장길이에 대한 변형에너지의 변화율인 에너지방출률 G값을 확장 전, 후에 대한 유한요서해석을 2번 수행하여 얻어지는 방법이다. 산정된 에너지방출률을 응력확대계수식과 등치로 놓아 응력확대계수를 구하는 방법이다. 가상균열확장법도 에너지 개념에 기초한 에너지방출률법과 유사하나 에너지방출률을 유한차분개념을 갖고 해석한 에너지방출률법에 비해 변형에너지를 구성하는 강성도매트릭스를 가상균열길이에 대해 한번만에 미분하여 에너지방출률값 G를 구할 수 있도록 하는 알고리즘이 Parks[1]에 의해 제안되었다. Parks는 이 방법을 강성도미분법(stiffness derivative method)라 하여 1번의 유한요소해석을 통하여 에너지방출률을 계산할 수 있도록 하였다. 이 때 가상균열길이를 어떻게 가정하느냐에 따라 에너지방출률값이 영향을 받게 된다고 논문에서 밝히고 있다. 참고로, Parks는 가상균열길이를 초기균열길이의 10^{-6} 정도 사용하였다.

그러나, 이러한 방법들은 균열판의 응력이 비례한도(proportional limit)내에 있고 균열선단의 소성영역(plastic zone)이 작은 경우, 즉 소영역 항복(small scale yielding)에 근거를 둔 선형탄성파괴역학(LEFM)이론에 적합한 방법이다. 따라서, 균열선단에서의 소성영역이 커지게 되면 이 때는 에너지법에 기초를 둔 가상균열확장법이나 에너지방출율법은 더 이상 정당화 될 수 없다. 이러한 대영역 항복(large scale yielding)의 경우는 탄소성파괴역학(EPFM)의 이론이 필요하게 되는데 유한요소법을 사용하여 응력확대계수 및 균열의 전진 등을 파악하기 위해서는 J-적분법이 유용한 방법으로 알려져 있다.

그 동안 우[2,3,4]의 연구에 의하면 응력특이가 발생도는 쉘, 평판, 평면응력문제에 p-version 유한요소모델은 기존의 h-version 유한요소모델에 비해 해의 신뢰성과 정확도가 뛰어나며 사용자(user-)의 시간, 즉 입력자료의 간편성과 CPU 시간의 절감을 가져온다고 보고되어 있다. 균열문제에 대한 p-version 유한요소 적용은 Mehta[5]의 논문

이 처음이며 삼각형 요소만이 고려되어 있는 COMET-X 프로그램을 사용하여 인장력을 받는 균열판을 해석하였다. 이 후 우[6,7,8,9,10,11]의 연구에서는 적분형 르장드르함수를 형상함수로 하멸 초유한사상법(transfinite mapping technique)에 기초를 둔 사각형 요소를 사용하여 균열 쉘, 인장력을 받는 균열판 및 원공(circular hole)을 갖는 균열판과 전단변형을 고려한 휨을 받는 균열판, 균열을 갖는 축대칭구조의 해석과 반복하중을 받는 피로해석(fatigue analysis) 등을 수행하였다. 특히, [8]의 논문에서는 종래의 등매개변수요소(isoparametric element)를 사용하고 4개의 기본요소에서 부터 균등요소분할 또는 유산균등요소분할(quasi-uniform mesh refinement)에 의한 h-version 유한요소모델에 의한 수치해석 결과와 4개의 요소만으로 모델링한 후 형상함수의 차수 p를 점증적으로 증가시키는 p-version 유한요소모델의 수치해석 결과가 비교되었다. 이 때 p-version 모델은 h-version 모델에 비해 정해에 대한 수렴속도가 2배 가량 빠름을 입증해 보였다. 위의 연구에서는 응력확대계수 산정을 위해 변위외삽법, 에너지방출률법과 가상균열확장법이 알고리즘으로 사용되었다.

한편, J-적분법의 개선된 방법도 최근에 알려진 방법만도 2가지를 들 수 있다. 첫번째는, 일반 유한요소해석 결과로부터 두가지 응력확대계수 K_I과 K_{II}를 직접 구할 수 있는 표면적분법(surface integral technique)으로 Babuska[12,13]에 의해 제안되었으나 균열선단부근의 변위장을 점근전개식(asymptotic expansion)의 형태로 유도하고 있어서 사용하기에 다소 복잡한 방법이다. 두번째는, 등가영역적분법(equivalent domain integral method)[14,15]로 종래의 J-적분법이 임의적분경로를 따라 수행되는 선적분(line integral)인데 비해 Divergence Theorem을 사용하여 두 개의 적분경로가 형성하는 면적에 대한 면적분(area integral)을 수행함으로써 선적분에서 적분경로에 대한 수직 방향벡터(normal vector)를 구하는 과정에서 얻어지는 해의 민감성을 제거하여 균열매개변수인 J-적분값을 안정적으로 산정하는 방법으로 사용성에서는 다소 편리하나 해의 정확도가 향상되는 이점은 발견할 수 없다.

따라서, 본 연구에서는 Rice[16]가 제안한 J-적분법을 적용한 p-version 균열모델이 사용되어 기존의 알고리즘을 사용한 h-version 모델과의 비교를 수행하며 적용 대상의 균열문제는 인장력을 받는 균열판으로 국한하고 재료적 성질은 탄성범위내에서 수행되는 선형탄성파괴역학(LEFM)의 이론에 따랐다. 본 연구의 결과를 토대로 장차 재료적 비선형이론에 근거를 둔 탄소성파괴역학(EPFM)에 J-적분법을 사용한 p-version 유한요소법을 적용할 수 있도록 하는 것이 본 연구의 목적이라 하겠다. 한편, 균열선단에서 임의의 적분경로를 채택하더라도 J-적분값이 일정하다는 이 방법이 h-version 유한요소법과 p-version 유한요소법으로 해석하였을 때 과연 균열선단으로 부터 임의의 적분경로를 채택하여도 적분경로에 상관없이 안정된 값을 주는가를 주요한 연구방향으로 설정하였다. 또한, 두 가지 유한요소법에 의한 수치해석 결과를 자유도의 증가에 따라 도시하여 수렴속도를 평가하고자 한다. 아울러, 다양한 h-version 유한요소모델의 해석 결과 및 기존의 연구결과와 본 논문에서 제시되는 균열모델과 비교 분석을 하고자 한다.

2. J-적분법

2.1 기본 개념

취성재료로 단위두께를 갖는 균열판의 균열성장 조건은 Griffith[17]의 에너지평형이론(energy balance approach)에 따라 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\frac{d}{da}(U)=\frac{d}{da}(U_0+U_a+U_r-F)=0 \qquad (1)$$

U : 전체에너지

U_0 : 비균열판의 탄성에너지

U_a : 균열발생에 의한 탄성에너지 변화

U_r : 균열면의 형성에 의한 균열 표면에너지의 변화

F : 외력에 의한 외부에너지

그림 1에서 보는 바와 같이 비균열판의 강성도

는 직선 OD의 기울기와 같으나 da 만큼 미소균열이 발생되면 평판의 강성도는 떨어져 직선 OC의 기울기가 된다. 따라서, 균열이 da만큼 발생함에 따라 탄성에너지 방출량은 그림 1의 빗금친 면적 OAC와 같게 된다. 미소 균열 da에 대한 에너지 방출량을 에너지방출률 G로 나타내는데 아래 식과 같다.

$$G=\frac{d}{da}(F-U_a) \qquad (2)$$

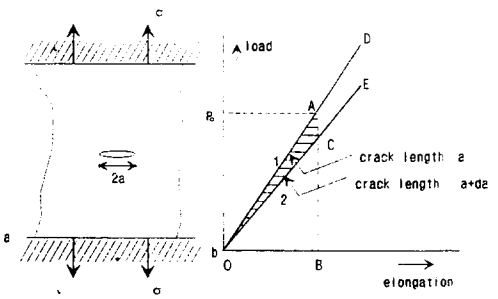

그림 1. 균열판의 하중-변위선도

비균열판의 탄성에너지는 균열진전에 무관한 값이므로 식(2)에서 $dU_0/da=0$이 된다. 아울러, 에너지방출률로 정의되는 G는 균열유발력(crack driving force)이라 한다. 한편, 단위두께당 발생되는 균열저항력(crack resistance) R은 식(3)과 같다.

$$R=\frac{d}{da}(U_a) \qquad (3)$$

그러므로, 균열유발력 G가 균열저항력 R을 넘게되면 균열이 발생하게 되는 것이다. Rice[16]는 에너지방출률 G가 그림 1에서 보는 바와 같이 선형탄성일 경우 에너지법에 기초한 에너지방출률 법이나 가상균열확장법을 도입하여 산정할 수 있으나 비선형문제일 경우 균열유발력으로 정의되는 에너지방출률을 일반적으로 구할 수 있는 균열매개변수 J를 제안하였다. 따라서, 선형탄성문제에 국한된 본 연구에서는 G=J이다. U_a는 해석영역 A에서의 변형에너지밀도 W의 합으로서, 직교좌표계를 사용하였을 때의 변형에너지밀도 W는 아래와 같다.

$$W=W(x,y)=W(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \qquad (4)$$

여기서, $\varepsilon=[\varepsilon_{ij}]$는 미소 변형률텐서를 나타낸다. 한편, F는 그림 2와 같이 해석영역의 길 ds에서의 변위 u와 표면력벡터(traction vector) T를 이용하여 표현할 수 있다. 따라서 임의의 면적 A에서의 에너지방출율은 다음과 같이 식(5)와 같이 정의된다.

$$\frac{dU}{da}=\int\int_A\frac{\partial W}{\partial a}dx_1dx_2-\int_\Gamma T\frac{\partial u}{\partial a}ds \qquad (5)$$

여기에, Green's Theorem을 적용하면 임의의 적분경로 Γ에서의 에너지방출율, 즉 J-적분은 다음과 같은 선적분형태로 나타낼 수 있다.

$$J=\frac{dU}{da}=\int_\Gamma(W\cdot dy-T\cdot\frac{\partial u}{\partial x}ds) \qquad (6)$$

이러한 임의의 적분경로 Γ상에서 선적분을 이용하여 에너지방출율을 계산하는 J-적분값을 계산하기 위하여 임의의 적분경로 Γ는 시작점과 끝점은 반드시 두 균열면상에 있어야 한다.

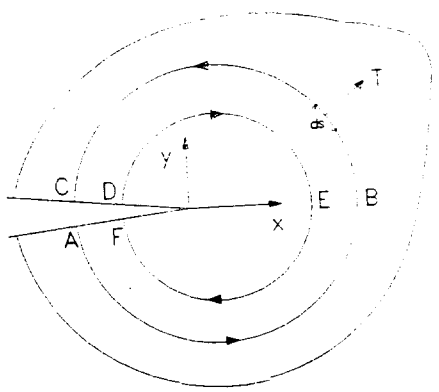

그림 2. 직교좌표상에서 균열면의 임의 적분경로

그림 2에서 임의로 선정한 경로 Γ_{ABC}와 Γ_{DEF}를 포함하고 있는 폐합경로 $\Gamma(=\Gamma_{ABC}+\Gamma_{DEF}+\Gamma_{CD}+\Gamma_{FA})$에서 계산되는 J-적분값은 응력 및 변위의 변형률이 일정하다고 한다면 적합성을 만족하기 위하여 다음 조건을 만족하여야 하며, 이는 Rice[16]에 의해 증명된 바 있다.

$$J=\int_{ABC}Qd\Gamma-\int_{DEF}Qd\Gamma+\int_{CD}Qd\Gamma+\int_{FA}Qd\Gamma=0 \qquad (7)$$

단, $Q=Wdy+T\frac{\partial u}{\partial x}ds$

균열면상에 존재하는 Γ_{CD}, Γ_{FA} 경로상에서는 dy=0이며 아울러, 균열면에 작용되는 표면력벡터 T가 0이 되기 때문에 Q는 0이 된다. 그러므로, 이 두개의 경로에서의 J-적분값은 0이 된다. 즉 경로 Γ_{ABC}과 Γ_{DEF}에 대한 J-적분값은 동일하다는 결론에 도달한다. 따라서 어떤 임의의 적분경로가 시작과 끝점이 균열면을 포함하고 있다면 J-적분값은 어느 경로에 상관없이 항상 일정하다는 것을 알 수 있다.

한편, 선형탄성조건에 있는 평면탄성문제에 있어서 J-적분값은 앞에서도 언급된 바와 같이 에너지방출률 G와 동일한 값을 갖게 되며 식(8)의 응력확대계수 K_I와 직접적인 관계를 갖게 된다.

$$K_I = \left(\frac{8\,\mu J_1}{1+x} \right)^{1/2} \tag{8}$$

여기에서, μ는 전단탄성계수이고, x는 평면조건에 따른 계수로서 다음과 같이 계산한다.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{9a}$$

$$x = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)} \quad : \text{평면응력 조건} \tag{9b}$$

$$x = 3-4\nu \quad : \text{평면변형 조건} \tag{9c}$$

2.2 유한요소법에서 J-적분값의 계산

그림 3과 같이 균열선단에서 떨어져 있는 임의 요소의 가우스 적분점 p를 이용하여 적분경로를 취하는 경우 J-적분값은 적분경로와 무관하기 때문에 일반적으로 $\xi=\xi_p$의 일정한 경로를 취하든가 혹은 $\eta=\eta_p$의 일정한 경로를 취한다. 식(6)에서 2번째항의 표면력벡터 T를 계산하기 위하여 적분경로상의 가우스 적분점에서 단위정규벡터 n_j를 정의하여야 한다. 가우스 적분점에서 $\xi=\xi_p$, $\eta=\eta_p$의 방향을 나타내는 벡터 A, B는 각각 다음과 같다.[18]

$$A^T = \left[\frac{\partial x_1}{\partial \eta}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta}, 0 \right] \quad : \xi=\xi_p \tag{10a}$$

$$B^T = \left[\frac{\partial x_1}{\partial \xi}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, 0 \right] \quad : \eta=\eta_p \tag{10b}$$

요소의 평면에 수직인 벡터 C는 A벡터와 B벡터의 곱으로서 다음과 같다.

$$C^T = \left[0, 0, \left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right] \tag{11}$$

적분경로에 대하여 수직인 벡터 D는 다음과 같다.

$$D^T = C \times A = [\, D_1, D_2, 0 \,] \quad : \xi=\xi_p \tag{12a}$$

$$= C \times B = [\, D_1, D_2, 0 \,] \quad : \eta=\eta_p \tag{12b}$$

따라서, 단위정규벡터(unit normal vector) n는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$n^T = [\, n_1, n_2, 0 \,] = \left[\frac{D_1}{N}, \frac{D_2}{N}, 0 \right] \qquad N = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \tag{13}$$

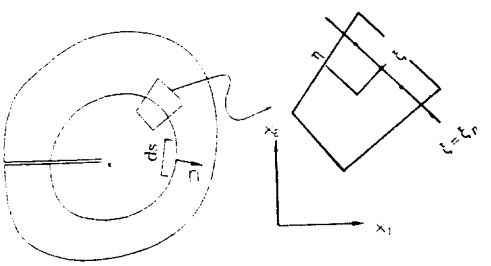

그림 3. J-적분값을 산정하기 위한 적분경로

따라서, 식(6)의 표면력벡터 T는 단위 정규벡터 n를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\, n_1 + \sigma_{12}\, n_2 \\ \sigma_{12}\, n_1 + \sigma_{22}\, n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

한편, 가우스 적분점에서 적분경로의 길이 ds는 다음과 같이 계산된다.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2}\, d\eta \quad ; \xi = \xi_p \tag{15a}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2}\, d\xi \quad ; \eta = \eta_p \tag{15b}$$

평면응력문제에 있어서 변형에너지밀도는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$W=\frac{1}{2}\left[\ \sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\sigma_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] \quad (16)$$

따라서, 각 요소의 J-적분값은 식(14), (15), (16)를 식(6)에 대입한 후 얻을 수 있는데 적분경로가 $\xi=\xi_p$인 경우에는 식(17a), $\eta=\eta_p$인 경우에는 식(17b)와 같이 계산할 수 있다.[18]

$$J^{(e)}=\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\sigma_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)n_1\right.$$
$$\left.-\left((\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2}\right\}d\eta \quad (17a)$$

$$J^{(e)}=\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\sigma_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)n_2\right.$$
$$\left.-\left((\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2}\right\}d\xi \quad (17b)$$

3. P-Version 유한요소모델

계층적 성질을 가지고 있는 고차 다항식에 근거한 형상함수는 정규영역에 대하여 3개의 그룹으로 분류된다. 3개의 그룹은 각각 기본모우드(basic mode), 주변모우드(side mode) 및 내부모우드(internal mode)로 정의된다. 기본모우드는 p=1일 때 선형 형상함수를 의미하며 종래의 유한요소법인 h-version과 동일하다. 주변모우드는 p=2에서부터 발생하여 좌표값을 갖지 않은 절점(nodeless node)이 꼭지점을 제외한 4변에 추가되는 모우드이므로 기본적으로 저매개변수요소(sub-parametric element)에 근거를 둔 방법이라 할 ⇐ 있다. 내부모우드는 유한요소법의 수렴조건 중의 하나인 완전성(completeness)을 만족하기 위하여 p=4 이상에서부터 발생되는 모우드로 형상함수의 형태가 볼록한 거품형상을 띄므로 거품모우드(bubble mode)라고도 한다. 따라서 p=4인 경우 기본모우드에 해당하는 4개의 형상함수, 주변모우드에 해당하는 12개의 형상함수 및 내부모우드에 해당하는 1개의 형상함수를 포함하여 총 17개의 형상함수가 필요하게 된다. 본 연구에서 사용한 형상함수는 적분형 르장드르함수로서 기존의 르장드르함수를 식(18)과 같이 정규영역에 대해 적분한 형태를 취하며 형상함수의 차수를 8차까지 사용하였다. 이에 대한 자세한 내용은 이미 여러 논문에서 발표되었으므로 본 논문에서는 생략하기로 하며 대표적인 참고문헌(19,20)을 참고하기 바란다.

$$F_{i+1}(\xi)=\sqrt{\frac{2i-1}{2}}\int P_i(t)\,dt \quad (18)$$

여기에서, $P_i(t)$는 Rodrigues에 의하여 다음과 같이 정의되었다.

$$P_i(t)=\frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dt^i}(t^2-1)^i \quad i=0,1,2,3\ldots \quad (19)$$

유한요소방정식에서 강성도매트릭스 계산, 하중벡터산정 및 J-적분값을 계산하기 위하여 Gauss-Legendre Quadrature 적분법을 이용하였다. Gauss 적분법은 불균등하게 배치된 적분점에 대하여 피적분함수에 가중치를 곱하여 적분값을 산정하는 방법으로써 피적분함수의 차수를 p라고 할 때 적분점의 갯수는 (p+1)/2개 이상이 필요로 한다. 수치적분의 차수는 매우 중요하여 충분히 많은 적분점을 사용하면 정확한 적분값을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 피적분함수로서 르장드르함수를 사용하였으며 피적분 차수와 관계없이 1개의 요소에 대하여 10×10개의 적분점을 사용하였다. 또한, p-version 유한요소법은 해석하고자 하는 구조물의 형상을 표현할 수 있는 최소 갯수의 요소만을 사용하므로 일반적으로 크기가 대형인 요소가 사용된다. 그러므로, 기하학적형상을 정확하게 사상(mapping) 할 수 있는 기법이 모색되어야 하는데 본 연구에서는 초유한보간자(transfinite interpolant)를 사용한 혼합사상(blending mapping) 방법이 도입되어 임의의 곡선경계를 정확하게 사상할 수 있도록 하였다.[4]

4. 수치해석 예제

제안된 J-적분법을 이용한 p-version 유한요소법의 수치해석예제는 참고문헌[8]에서 채택한 인장

을 받는 중앙균열판(centrally cracked panels), 일변 균열판(single edged crack) 및 양변 균열판(double edged crack)을 대상으로 하였다. 해석대상의 대칭성을 이용하여 중앙균열판과 양변균열판은 전체 해석영역의 1/4영역에 대하여, 일변균열판은 1/2영역에 대하여 체눈설계(mesh design)를 실시하였다. 해석영역에 대한 p-version 유한요소 모델은 그림 4에서 보는 바와 같이 8개, 6개 및 4개의 요소만으로 구성하였으며 4개의 요소로 구성할 때는 1개의 요소위치를 균열선단 후면에 두는 경우를 Type 1으로 정하고, 균열선단 전면에 두는 경우를 Type 2로 정하였다. 그림 4에서 보는 바와 같이 p-version 유한요소의 체눈형상은 형상비(aspect ratio)와 왜곡도(skewness)가 매우 크기 때문에 유한요소 해의 정확도에 의문을 가질 수 있다. Woo[19]의 연구에 의하면 적분형 르장드르함수로 정식화된 계층요소를 사용하게 되면 형상함수 p가 5차 이상일 때 형상비는 1 : 4000까지, 왜곡도는 160도까지 사용하여도 정해에 대한 상대오차 5%내에 들 수 있는 통용성(robustness)을 갖고 있음을 알 수 있다.

한편, 본 연구에서 제안되는 p-version 유한요소 모델에 의한 수치해석 결과를 h-version 유한요소 모델 결과와 비교하기 위하여 그림 5와 같이 체눈의 갯수를 46개, 64개, 72개, 104개로 요소분할하여 h-version 유한요소 모델을 구성하였다. h-version 유한요소 모델의 체눈설계(mesh design)에서 46개 요소망과 64개 요소망은 균열선단을 중심으로 4개의 요소분할을 하였고, 72개 요소망과 104개 요소망은 균열선단 주위에 8개의 요소로 분할하였다. 또한, 균열선단부의 응력특이현상을 정확히 모델링하기 위하여 그림 6에서 보는 바와 같이 3 : 1형상비를 갖는 4분점 삼각형 특별균열선단요소(quarter point triangular special crack tip element)를 이용하였으며 균열선단 이외의 부분에 대해서는 등매개변수요소(isoparametric element)를 사용하였다. 등매개변수요소는 3×3의 가우스 적분점을 갖도록 하였다.

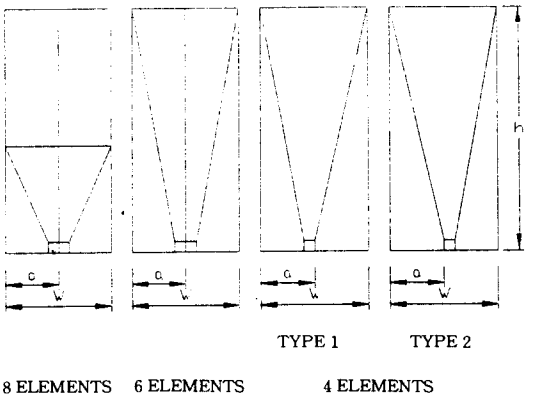

그림 4. p-version 유한요소의 체눈설계

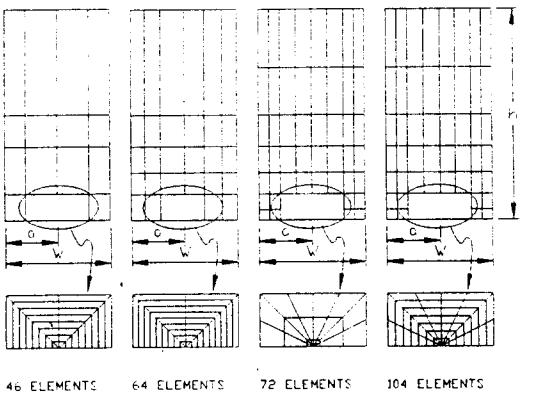

그림 5. 등매개변수요소를 사용한 h-version 유한요소의 체눈설계

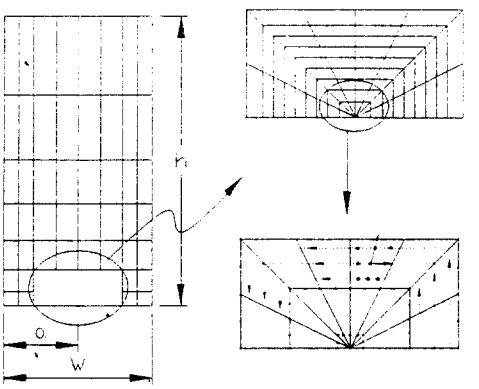

그림 6. 균열선단부의 4분점 삼각형 특별요소와 그밖의 등매개변수요소로 체눈설계된 h-version 모델 (120개 요소)

4.1 중앙 균열판(Centrally Cracked Panels)

첫번째 수치해석예제로 인장력을 받고 있는 중앙균열판의 균열해석이 수행되었다. 해석모델은 균열길이가 2a, 균열판의 폭이 2W, 그리고 균열판의 높이는 2h인 중앙균열판이 2축대칭상태이므로 그림 4와 같이 모델링되었으며 h/W=2로 고정하였다. 임의의 적분경로에 대한 J-적분값의 적분경로 독립성(path independence of J-integral value)을 조사하기 위하여 균열선단에서 부터 균열면을 따라 임의의 거리 r만큼 떨어진 지점에서 취한 적분경로에서 계산된 J-적분값과 거리 r를 균열길이 a로 나누어 정규화한 무차원값 r/a과의 관계를 나타내었다. a/W=0.5로 고정시켰을 때 그림 7에서 보는 바와 같이 h-version 유한요소 모델에 의한 해석결과는 104개 등매개변수요소(742자유도)를 사용하였을 때 r/a>0.4이면 J-적분값이 비교적 안정되게 산출되나 균열선단에 가까울수록 J-적분값은 심하게 불안정한 상태를 보이고 있음을 알 수 있다. 본 논문에서는 보이지 않았지만 104개 유한요소모델에서 좀 더 요소분할을 수행하여 152개 등매개변수요소(1001자유도)를 사용할 경우는 r/a>0.15일 때 거의 일정한 J-적분값이 계산됨을 알 수 있다. 아울러, 4분점 균열선단요소와 등매개변수가 혼합된 120개 유한요소모델(794자유도)의 경우 앞에서 보여준 152개 등매개변수요소 모델과 유사하게 r/a>0.15에서 안정된 J-적분값을 보여주고 있다. 그러나, 전체적으로 보면 균열선단으로 부터 멀어질수록 J-적분값은 다소 작아짐을 알 수 있다. 반면 p-version 유한요소모델에 의한 해석결과를 살펴보면 4개 요소의 Type 2는 정규화된 적분경로 r/a의 변화에 따라 심한 진동을 하고 있으나, 동일한 4개 요소로 모델링된 Type 1은 형상함수의 차수 p가 7차(228자유도) 이상이면 r/a>0.15일 때 일정한 J-적분값을 산출할 수 있다. 즉, 같은 4개의 요소분할을 하여도 그림 4에서 보는 바와 같이 균열선단을 중심으로 1개의 요소를 균열선단 후면으로 요소분할 위치를 선정한 Type 1이 균열선단 전면으로 요소분할 위치를 산정한 Type 2에 비해 훨씬 응력특이현상을 잘 표현해 준다. 한편, 그림 4에 보는 바와 같이 6개 요소로 모델링된 p-version 모델은 형상함수 차수 p가 6차(254자유도) 이상이면 r/a>0.15일 때 안정된 J-적분값을 얻을 수 있다. 또한, 일정한 J-적분값이 계산되는 구간의 평균 J-적분값을 비교하여 보면 p-version 유한요소모델를 기준으로 h-version 유한요소모델은 약 10%의 상대오차가 있음을 알 수 있다. 여기서, 8개 요소로 모델링된 p-version 모델의 결과 값은 이미 4개 요소와 6개 요소로 모델링된 p-version 모델이 충분히 정확한 값과 수렴성을 보여주고 있으므로 여기에서는 보이지 않았다.

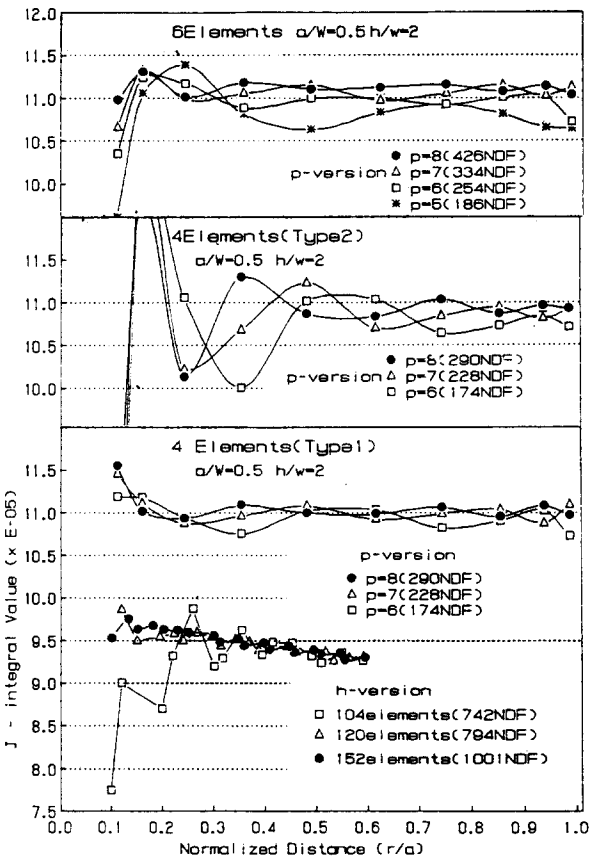

그림 7. h-version과 p-version 유한요소모델의 비교를 통한 적분경로의 독립성(path independence)

앞의 예제는 J-적분값이 유한요소해석을 하였을 경우 과연 적분경로에 무관하게 일정한 값을 보여주는지를 조사하였다. 한편, 자유도의 증가에 따른 p-version 유한요소 모델과 h-version 유한요

소 모델과의 수렴성을 기존의 연구결과[21]와 함께 나타내었다. 그림 8에서 보는 바와 같이 p-version에 의해 계산된 무차원 응력확대계수인 보정계수(correction factor : factor : K_I/K_o)는 p-level의 증가에 따라 매우 좋은 수렴성을 보여 주고 있으며 Feddersen 및 Brown[21]의 값에 접근해 나아가고 있음을 알 수 있다. p-version 유한요소 모델의 결과를 기존의 연구결과와 비교하여 보면 자유도가 200일 때의 무차원 응력확대계수값은 Feddersen의 값과는 2%의 상대오차, Irwin[21,23]의 결과와는 약 6%의 상대오차가 발생하였다. 반면 h-version 유한요소 모델에 의한 해석결과는 자유도가 500 이상일 경우 Feddersen의 값과는 10%의 상대오차, Irwin의 값과는 약 2%의 상대오차가 발생하였다.

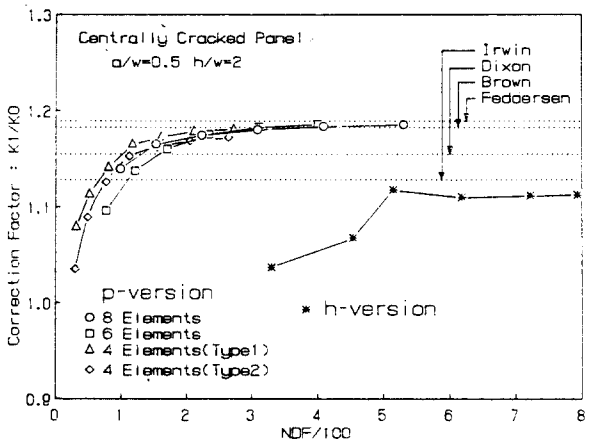

그림 8. 자유도 증가에 따른 무차원 응력확대계수의 비교

유한요소해의 신뢰성을 검증하기 위해 균열판의 폭에 대한 균열크기(a/W)의 증가에 따른 무차원 응력확대계수의 변화를 p-level=8일 때의 p-version 유한요소 결과와 4분점 균열선단요소를 포함하여 120개 요소(794자유도)를 사용한 모델의 해석결과를 기존의 연구결과와 함께 나타내었다. 그림 9에서 보는 바와 같이 p-version 유한요소 모델은 전반적으로 Feddersen의 연구결과와 1% 이내의 상대오차가 있는 값을 계산할 수 있었다. 반면에 120개 요소를 이용한 h-version 유한요소모델은 a/W>0.6에서만 Dison의 연구결과와 유사한 값을 얻을 수 있을 뿐 전반적으로 p-version 유한요소 모델과는 약 5% 이상의 상대오차를 보여주고 있다.

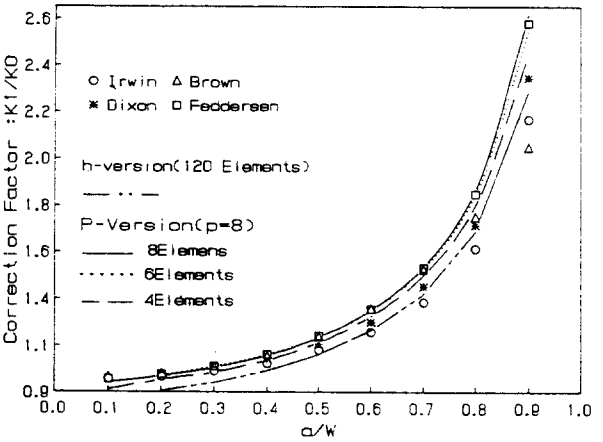

그림 9. 균열크기의 변화에 따른 무차원 응력확대계수의 비교

그림 10은 자유도의 역수와 J-적분값과의 관계를 나타낸 것이다. p-version 유한요소법에서는 수렴성 조사(convergence test)후 유한요소의 해가 수렴영역(asymptotic range)에 들게 되면 수렴영역상태의 자유도 역수와 J-적분값의 관계를 도시하면 그림 10과 같이 강한 직선성(linearity)을 갖고 있음을 보여 준다. 그러므로, 자유도가 무한대일 경우 즉, 유한요소법으로 추정할 수 있는 정해(exact solution)를 얻을 수 있게 되는데 이를 극한 J-적분값(limit value of J-integral)이라 한다. 물론, h-version 유한요소법에서도 균등요소분할 또는 유사균등요소분할(quasi-uniform mesh refinement)을 하게 되면 동일한 직선성을 얻을 수 있으며 이로부터 극한 J-적분값을 예측할 수 있게 된다. 그림 10에서 보는 바와 같이 h-version 유한요소 모델결과로 부터 외삽법(extrapolation)을 통하면 극한 J-적분값은 10.80E-5을 얻은 반면 p-version 유한요소모델은 4개의 요소로 모델링된 Type 2를 제외한 4개 요소의 Type 1과 6개 및 8개 요소로 모델링된 p-version 모델은 외삽법을 통해 동일한 극한 J-적분값인 11.18E-05를 얻을 수 있었다. 반면 h-version 유한요소 모델에서는 전체 해석영역을 유사균등 요소분할한 경우

에는 자유도의 증가에 따라 강한 직선성을 보여주고 있으나 균열 선단부분만을 국부적으로 요소분할하게 되면 더 이상 직선성을 유지하지 못하는 것을 알 수 있었다. 또한 무한자유도에 해당하는 극한 J-적분값을 외삽법에 의하여 계산하여 보면 h-version 유한요소 모델의 결과는 p-version 유한요소 모델을 기준으로 약 3%의 상대오차가 있음을 알 수 있다.

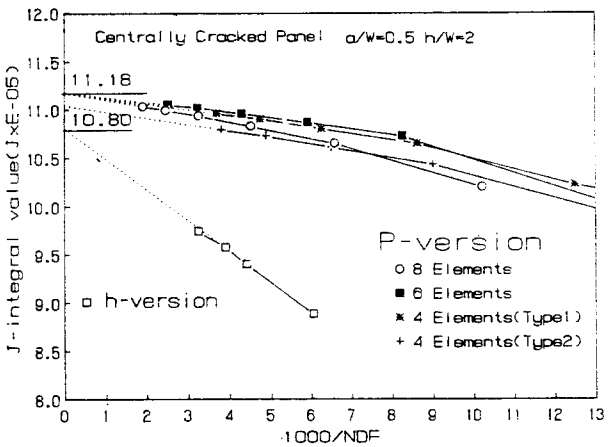

그림 10. 자유도 역수와 J-적분값과의 강한 직선성

4.2 일변 균열판(Single Edged Cracks in a Rectangular Panel)

두번째의 해석예제로는 인장응력 상태에 있는 일변균열판에 대하여 무차원 응력확대계수를 계산하였다. 구조물의 모델링은 구조물의 대칭성을 이용하여 구조물의 1/2영역에 대하여 중앙균열판과 동일하게 실시하였다. 이 때 균열 판의 높이와 균열판의 폭 비(h/W)는 2로 고정하였다. 그림 11에서 보는 바와 같이 균열크기와 균열판의 폭(a/W)이 0.1에서 0.4로 변화함에 따라 p-version 유한요소 모델은 형상함수의 차수 p가 8일 때의 계산결과는 8개 및 6개의 요소를 사용한 경우 기존의 연구결과[8,21,22]와 일치된 경향을 보여주고 있으며 4개의 요소를 사용한 경우도 상대오차 약 1% 이내의 값을 보이고 있다. 또한 등매개변수 요소 104개로 모델링된 h-version 유한요소 모델의 결과도 1% 이내의 상대오차내에서 무차원 응력확대계수를 계산할 수 있었다.

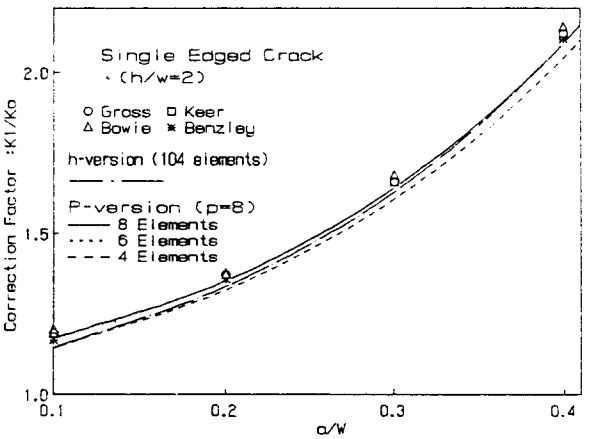

그림 11. 인장력을 받는 일변균열판의 무차원 응력확대계수의 비교

4.3 양변 균열판(Double Edged Cracks in a Rectangular Panel)

마지막 해석예제는 양변에 균열을 가지고 있는 판에 인장력이 작용하는 경우이다. 해석대상 균열판의 대칭성을 이용하여 1/4영역에 대하여 모델링을 하였다. 체눈설계는 이전의 중앙균열판의 경우와 동일하게 취하였으며 균열판의 높이와 폭의 비 즉, h/W는 2로 고정하였다. 형상함수의 차수를 8차로 사용한 p-version 유한요소 모델의 해석결과와 등매개변수요소 104개의 요소를 이용한 h-version 유한요소 모델의 해석결과를 기존의 연구결과[8,21,22]와 함께 그림 12에 나타내었다. 그림12에서 알 수 있는 바와 같이 6개 및 8개의 요소를

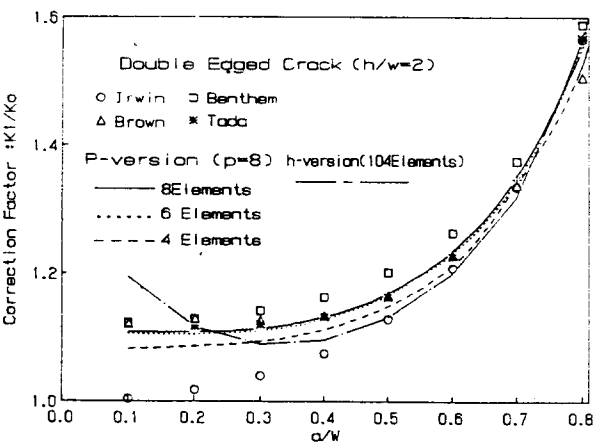

그림 12. 인장력을 받는 양변균열판의 무차원 응력확대계수 비교

사용한 p-version 유한요소 모델의 계산결과는 Brown[21,22]과 Tada[23]의 연구결과와 거의 일치하고 있으나 4개의 요소만을 사용하고 있는 경우에도 약 3%정도의 상대오차가 발생하였다. 그러나 h-version유한요소 모델의 해석결과는 a/W가 0.1인 경우 그림에서 보는 바와 같이 매우 상이한 값을 보이고 있으며 a/W>0.7인 경우를 제외하고는 전반적으로 p-version 유한요소 모델과는 약 5%정도의 상대오차가 발생하였다.

5. 결 론

본 연구에서는 균열판 해석을 위한 J-적분법에 기초를 둔 p-version 유한요소 모델을 제안하였다. 제안된 유한요소 모델을 이용한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 적분경로의 독립성(path independence)－중앙균열판의 경우 균열선단으로 부터의 정규거리(r/a)에 따른 적분경로의 독립성을 분석하였다. h-version 유한요소 모델의 경우 104개의 등매개변수요소(isoparametric element)로 모델링한 경우(742 자유도)는 r/a>0.4부터, 152개의 등매개변수요소(1001 자유도)와 4분점 균열선단요소와 등매개변수요소를 혼합하여 120개 요소로 모델링한 경우(794 자유도)는 r/a>0.15에서 적분경로에 상관없이 거의 일정한 J-적분값을 보여 주었다. 반면, p-version 유한요소 모델의 경우 4개 요소로 모델링된 Type1(228 자유도, p=7)과 6개 요소의 p-version 모델(254 자유도, p=6)도 r/a>0.15에서 일정한 J-적분값을 산정할 수 있음을 보여 주었다.

(2) J-적분값의 비교－중앙균열판의 경우 p-version 유한요소 모델을 기준으로 h-version 유한요소 모델은 약 10% 정도의 상대오차를 보여주고 있다. 기존 연구와 비교하면 p-version 모델은 자유도가 150이상일 때 무차원 응력확대계수는 Feddersen의 값과 2% 이내의 상대오차를, Irwin의 결과와 약 6% 이내의 상대오차가 발생되었다. 반면, h-version 모델은 자유도가 500이상일 경우 Feddersen과 약 10% 이내의 상대오차를, Irwin의 값과는 약 2% 이내의 상대오차를 보여 주었다. 한편, 양변균열판의 경우 Brown과 Tada의 연구결과와 비교하여 p-version 모델의 경우 형상함수의 치수를 8차로한 6개 요소 및 8개 요소모델의 경우도 a/W비가 0.1에서 0.8까지 변화함에따라 약 3% 정도의 상대오차를 보여 준다. 반면에, h-version 모델의 경우 a/W가 0.1부근에서는 전혀 상이한 값을 보여 주었으며 a/W가 0.7인 경우를 제외하고는 약 5% 정도의 상대오차를 보여 주었다. 그러나, 일변균열판의 경우 a/W가 0.1에서 0.4로 변화함에 따라 104개 등매개변수요소로 모델링된 h-version 모델과 형상함수 8차로 4개의 요소로 모델링된 p-version 모델의 경우 Benzley의 결과와 비교하여 공히 1% 정도의 상대오차로 높은 정확도를 보여 주었다.

(3) Type1과 Type2 모델의 비교－4개의 요소로 분할된 p-version 모델은 Type1이 Type2에 비해 적분경로의 독립성은 물론이고 해의 신뢰성 및 정확도 측면에서 훨씬 효율적임을 알 수 있었다. 이는 동일한 요소를 사용하더라도 그림 4와 같이 균열선단을 중심으로 후면으로 요소분할을 하는 것이 전면에 요소분할을 하는 것 보다 균열선단의 응력특이를 표현하는데 보다 적합한 체눈설계(mesh design)라 결론지을 수 있다.

이상의 결과에서 볼 때 J-적분법을 사용한 p-version 유한요소 모델은 종래의 h-version 유한요소 모델에 비하여 상대적으로 훨씬 적은 자유도에서도 충분한 수렴성을 보여 주며, 특히 적분경로에 따른 독립성을 보여 주고 있기 때문에 Rice가 제안한 J-적분법을 사용하기에 적합한 모델이라 할 수 있다. 또한, 균열판의 균열양상과 균열크기의 변화등에 대해서도 기존의 연구자들에 의한 이론식 및 경험식과 비교하여 높은 정확도를 보여 주고 있다.

감사의 글

본 연구는 1994년도 조선대학교 학술연구비 지원을 받아 연구되었습니다. 이에 대해 귀 재단에 깊은 감사를 보냅니다.

참 고 문 헌

1. Parks, D. M., "A Stiffness Derivative Finite Flement Technique for Determination of Elastic Crack Tip Stress Intensity Factors," *Int. J. Fracture*, Vol. 10, No.4, 1974, pp.487-502.
2. Woo, K. S., and Basu, P. K., "Analysis of Singular Cylindrical Shells by P-Version of FEM," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 25, No.2, 1989, pp.151-165.
3. 우광성, "특이성을 갖는 비정형 평판의 P-Version 유한요소해석," **한국전산구조공학 논문집**, Vol. 3, No. 3, 1990, pp.101-111.
4. 우광성, 이채규, 윤영필, "圓孔을 갖는 有限板의 應力集中에 대한 P-Version모델," **대한토목학회 논문집**, 제12권 제4-1호, 1992, pp.1-8.
5. Mehta, A. K., *P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechnics,"* Doctoral Dissertation, Washington University, St. Louis, Missouri, 1978.
6. 우광성, "균열된 쉘의 파괴역학해석을 위한 선진 유한요소기법," **전산구조공학 논문집**, Vol. 4, No. 2, 1991, pp.77-85.
7. 우광성, 이채규, "P-Version 유한요소법에 의한 피로균열 해석," **전산구조공학**, 제5권, 제3호, 1992.
8. 윤영필, 우광성, 박병기, 신영식, "인장력을 받는 균열판의 응력확대계수 산정을 위한 P-Version 균열모델," **전산구조공학논문집**, 제6권, 제4호, 1993.
9. 이채규, 우광성, "휨 거동을 받는 균열판의 전단변형을 고려한 P-Version 유한요소모델," **대한토목학회논문집**, 제14권, 제6호, 1994.
10. Woo, K. S. and Jung, W. S., "Stress Intensity Factors for 3-D Axisymmetric Bodies Containing Cracks by P-Version of F.E.M.," *Int. J. Struct. Eng. Mech*, Vo. 2, No. 3, 1994.
11. Woo, K. S. and Lee, C. G., "P-Version Finite Element Approximations of Stress Intensity Factors for Cracked Plates Including Shear Deformation", *Int. J. Eng. Fract. Mech.*, to appear.
12. Babuska, I. and Miller, A., "The Post-Processing Approach in the Finite Element Method-Part 1 ; Calculation of Displacements, Stresses and Other Higher Derivatives of the Displacements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 20, 1984, pp.1085-1109.
13. Babuska, I. and Miller, A., "The Post-Processing Approach in the Finite Element Method-Part 2 : The Calculation of Stress Intensity Factors," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 20, 1984, pp.1111-1129.
14. Nikishkov, G. P. and Atluri, S. N., "Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-Dimensional Crack, by the Equivalent Domain Integral Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 24, 1987, pp.1801-1821.
15. Raju, I. S. and Shivakumar, K. N., "An Equivalent Domain Integral Method in the Two-Dimensional Analysis of Mixed Mode Crack Problems," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 37, 1990, pp.707-725.
16. Rice, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks," *ASME J. of Appl. Mech*, 35, 1968, pp.376-386.
17. Griffith, A. A., "The Phenomenon of Rupture and Flaw in Solids," *Phil. Trans.*, Royal Society of London, Vol. A-221, 1920, pp.163-198.
18. Owen, D. R. J. and Fawkes, A. J., *ENGINEERING FRACTURE MECHANICS Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press Ltd., 1983.
19. Woo, K. S., "A Robustness of Hierarchi Element Formulated by Integrals of Legendre Polynomials," *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 3, 1993.
20. Szabo, B. and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
21. Barsom, J. M. and Rolfe, S. T., *Fracture & Fatigue Control in Structures*, Prentice-Hall, 1987.
22. Benzely, S. E., "Representation of Singularities with Isoparamrtric Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 10, 1974, pp. 1281-1287.
23. Tada, H., Paris, P., and Irwin, G. R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Second Edition, Paris Production Inc., 1985.

(접수일자 : 1995. 9. 1)