# 境界要素法에 의한 線形 壓密問題의 解析

## Analysis of Linear Consolidation Problems by the Boundary Element Method

서　일　교*
Suh, Ill-Gyo

요　약

본 연구에서는 Biot의 線形壓密理論에 근거한 2차원 壓密問題의 근사해를 구하기 위한 경계요소법을 제시한다. 먼저 線形 壓密問題의 기초미분방정식의 時間依存性을 제거하기 위하여 시간에 대한 Laplace변환을 적용시키고, 變換空間에서의 미분방정식을 대상으로 定式化를 한다. 변환공간에서의 變位와 間隙水壓에 대한 境界積分方程式系를 유도하고, 變換空間에서의 連成問題에 대한 基本解를 구체적으로 보인다. 變換空間에서의 解를 實空間의 解로 변환하기 위하여 Hosono의 數値 Laplace逆變換法을 적용하였으며, 해석예로서 2차원 半無限 地盤의 局所載荷에 의한 壓密問題를 해석예로 선택하였고, 嚴密解와 비교하여 提案解法의 適用性 및 妥當性을 보였다.

Abstract

This paper presents a boundary element method for obtaining approximate solutions of 2-dimensional consolidation problems based on the Biot's linear theory.

Laplace transform is applied to differential equation system in order to eliminate the time dependency. The boundary integral equations in transformed space are formulated and the fundamental solutions are shown in a closed form. In order to convert the transformed solutions to the ones in real space, the Hosono's numerical Laplace transform inversion method is applied.

As a numerical example, a half-space consolidation problem subjected to a strip local load is selected and the applicabitity of the method is demonstrated through the comparison with the exact solutions.

## 1. 序　論

물에 포화된 흙에 힘을 가하면, 흙의 변형은 間隙水의 이동과 함께 발생하며, 변형이 종료될 때까지는 긴 시간을 필요로 한다. 이와 같이 긴 시간이 걸리는 압축현상을 壓密(consolidation)이라 하고, Terzaghi에 의해 1차원의 非連成問題(uncoupled problem)로서 처음으로 해석되었다. 한편 Biot는 Terzaghi의 이론을 확장하여 間隙水壓과 흙의 변형이 連成된 多次元 壓密理論을 제안하였다[1]. 지금까지 압밀이론의 해석에는 Terzaghi의 1차원 이론이 간단하기 때문에 많이 이용되었으나, 局所載荷와 같이 側方變形을 포함한 地盤擧動을 조사하기 위해서는 多次元 壓密理論을 적

* 제주대학교 건축공학과 전임강사

이 논문에 대한 토론을 1996년 6월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

용해야 한다. Biot의 多次元 압밀이론에 관한 근사해석법으로서 지금까지 유한요소법에 의한 연구가 많이 이루어져 왔다[3,4].

한편 압밀문제와 같은 半無限 領域問題에 대한 경계요소법의 적용가능성 및 그 우수성은 인식되어져 있으나 압밀문제에 대한 구체적인 적용은 連成性에 의해 문제가 복잡하기 때문에 그 적용예가 적다. Predeleanu[6]는 시간의존 기본해를 이용한 해석법을 제안하였으나 해석예를 제시하지 못하였고, Aramaki[7]는 비연성문제로 정식화하여 해법을 단순화하였으나 경계적분과 함께 체적적분을 적용하여야 한다. Cheng[8]은 連成問題에 대해 Laplace변환을 적용하였으나 부자연스런 未知數를 사용하기 때문에 해법의 전개가 매우 복잡하며, Nishimura[10]는 連成問題에 대해 時間依存 基本解를 적용한 해법을 제시하였으나 단순한 원형 디스크문제에 대해서만 嚴密解와 계산결과를 비교하고 있을 뿐이다.

본 논문에서는 Biot의 線形壓密理論에 근거한 2次元 壓密問題의 解析을 위하여 境界要素法에 의한 近似數値解析法을 제안한다. 非定常問題를 풀기 위해서 먼저 지배미분방정식에 Laplace변환을 적용하고, 변환공간에서의 기본식에 대한 加重殘差式(Weighted Residual Equation)으로 부터 變位와 間隙水壓에 대한 경계적분방정식(Boundary integral equation)을 유도한다. 또 변환공간에서의 連成問題에 대한 基本解(Fundamental solution)를 구체적으로 제시하고, 변환공간에서의 해를 실시간 공간에서의 해로 변환하기 위하여 數値 逆變換法으로서 汎用性과 精度가 뛰어난 Hosono법을 선택하여 적용한다. 또한 해석예를 통하여 제안해법의 타당성을 밝힌다.

## 2. 基礎關係式

물로 포화된 線形 等方 多孔質 彈性體를 대상으로 한다. 해석대상영역을 $\Omega$, 경계를 $\Gamma$, $\Gamma$의 外向單位法線벡터를 $\mathbf{n}$으로 하고, 시간영역을 T=[0, t]로 나타낸다. 이때 압밀문제에 대한 기초관계식은 다음과 같이 주어진다[1,10].

$$\tau_{i,j} + \rho F_i = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &\equiv \tau'_{ij} + \delta_{ij}\, p \\ &= (\lambda u_{k,k} + p)\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned} \tag{2}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

$$q_i = \frac{k}{\gamma_\omega} p_{,i} \tag{4}$$

$$q_{i,i} = n\beta p - u_{i,i} \tag{5}$$

여기서 $u_i$, $e_{ij}$, $\tau_{ij}$, $\tau'_{ij}$, p, $q_i$, $F_i$는 각각 變位, 變形度, 全應力, 有效應力, 間隙水壓, 間隙流體의 流速, 單位質量當 物體力이고, $\rho$, k, $\gamma_\omega$, n, $\beta$는 각각 흙의 密度, 透水係數, 流體의 單位體積重量, 空隙率, 流體의 體積 壓縮率이다.

이상의 기초 관계식으로 부터 變位 $u_i$와 間隙水壓 p에 관하여 다음과 같은 Biot의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + p_{,i} + \rho F_i = 0 \tag{6}$$

$$p_{,ii} - \frac{m}{K}\dot{p} + \frac{1}{K}\dot{u}_{i,i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2) \tag{7}$$

여기서

$$K = \frac{k}{\gamma_\omega} \tag{8}$$

이다. 식(6)과 (7)로 주어진 連成 微分方程式에 의한 初期値-境界値問題를 풀기 위하여 다음과 같은 境界條件과 初期條件을 설정한다.

境界條件

$$\begin{array}{lr} u_i = \hat{u}_i & (\Gamma_u \times T) \\ \tau_i = \tau_{ij}\, n_j = (\tau_{ij}' + \delta_{ij}\, p) n_j = \hat{\tau}_i & (\Gamma_\tau \times T) \\ p = \hat{p} & (\Gamma_p \times T) \\ q = q_i n_i = -K p_{,i} n_i = \hat{q} & (\Gamma_q \times T) \end{array} \tag{9}$$

初期條件

$$\begin{aligned} u_i \ (t=0) &= {}_0u_i \\ \dot{u}_i \ (t=0) &= {}_0v_i \end{aligned}$$

$$p \quad (t=0) = {}_0p$$
$$u_{i,i} \quad (t=0) = {}_0e \qquad (10)$$

여기서 식(6)과 (7)로 주어진 非定常問題에 대하여 Laplace變換을 적용한다. 식(6)과 (7)에 시간변수 t에 관한 Laplace변환을 적용하면, 變換空間에서의 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu)\bar{u}_{j,ij} + \bar{p}_{,i} = -G_i \qquad (11)$$

$$\bar{p}_{,ii} - \frac{m}{K}\omega\bar{p} + \frac{\omega}{K}\bar{u}_{i,i} = -H$$
$$(i, j, \alpha = 1, 2) \qquad (12)$$

단,

$$G_i = \rho F_i$$

$$H = \frac{m}{K}\,{}_0P - \frac{1}{K}\,{}_0e \qquad (13)$$

여기서 변환된 함수 $\bar{f}$ 는 다음과 같이 정의되는 것이다.

$$\bar{f}(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega t} f(t)\,dt \qquad (14)$$

식(11), (12)를 다음과 같이 행렬로 나타낸다.

$$L_{ij}\bar{U}_j = \bar{B}_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (15)$$

여기서 $[L_{ij}]$는 微分演算子行列(Differential operator matrix)로서

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_1^2 & (\lambda+\mu)D_1D_2 & D_1 \\ (\lambda+\mu)D_2D_1 & \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_2^2 & D_2 \\ \frac{\omega}{K}D_1 & \frac{\omega}{K}D_2 & \Delta - \frac{m}{K}\omega \end{bmatrix} \qquad (16)$$

이고

$$\{\bar{u}_j\} = \{\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{p}\}^T, \ \{\bar{B}_i\} = \{-G_1 \ -G_2 \ H\}^T \qquad (17)$$

이다. 식(16)에서 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$(2차원 Laplacian), $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$인 微分演算子를 의미한다.

### 3. 境界積分方程式 및 基本解

식(15)에 대하여 텐서 $V^*_{ik}$를 加重函數(Weighting function)로 하는 다음의 加重殘差式(Weighted residual equation)을 생각한다.

$$\int_\Omega (L_{ij}\bar{U}_j - \bar{B}_i)V^*_{ik}\,d\Omega = 0$$
$$(i, j, k = 1, 2, 3) \qquad (18)$$

식(18)에 發散定理(Divergence theorem)를 적용하면 다음의 적분방정식을 얻는다.

$$\int_\Omega \mathcal{L}_{ij} V^*_{jk}\bar{U}_j\,d\Omega =$$
$$= \int_\Gamma \{\bar{\tau}_\alpha(\mathbf{x};\omega)V^*_{\alpha j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}';\omega) - \bar{u}_\alpha(\mathbf{x};\omega)\Sigma^*_{\alpha j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}';\omega)\}\,d\Gamma(\mathbf{x})$$
$$+ \int_\Gamma \{\bar{p}_{,n}(\mathbf{x};\omega)V^*_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}';\omega) - \bar{p}(\mathbf{x};\omega)V^*_{3j,n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}';\omega)\}\,d\Gamma(\mathbf{x})$$
$$- \int_\Omega \bar{B}_i(\mathbf{x}')V^*_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}';\omega)\,d\Omega(\mathbf{x}')$$
$$(i, j, k = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2)$$
$$(19)$$

여기서 $\mathbf{x}$는 경계상의 점, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$은 영역 내부점을 나타내고

$$[\mathcal{L}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_1^2 & (\lambda+\mu)D_1D_2 & -\frac{\omega}{K}D_1 \\ (\lambda+\mu)D_2D_1 & \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_2^2 & -\frac{\omega}{K}D_2 \\ -D_1 & -D_2 & \Delta - \frac{m}{K}\omega \end{bmatrix} \qquad (20)$$

이다. 여기서 좌변 적분에서 다음과 같이 둔다.

$$\mathcal{L}_{ij}V^*_{jk} = -\delta_{ik}\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \qquad (i, j, k = 1, 2, 3) \qquad (21)$$

식(21)에서 $\delta_{ik}$는 Kronecker delta, $\delta(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y})$는 Dirac의 델타함수(delta function)이며, 이 미분방정식으로 부터 $V^*_{jk}$는 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$에서 特異(singular)인 基本解(Fundamental solution)임을 알 수 있다. 식(21)을 식(19)에 대입하면 영역내부점 $\mathbf{y}'$에서의 처짐 및 間隙水壓과 경계상의 값들로 관계지어지는 다음과 같은 積分方程式을 얻을 수 있다.

$$\overline{U}_j(y',\omega) = \int_\Gamma \{ \overline{\tau}_\alpha(x;\omega)V^*_{\alpha j}(x,y';\omega) - \overline{u}_\alpha(x;\omega)\Sigma^*_{\alpha j}(x,y';\omega) \} d\Gamma(x) + \int_\Gamma \{ \overline{p}_{,n}(x;\omega)V^*_{3j}(x,y';\omega) - \overline{p}(x;\omega)V^*_{3j,n}(x,y';\omega) \} d\Gamma(x) - \int_\Omega \overline{B}_i(x')V^*_{ij}(x',y';\omega)d\Omega(x')$$

$(i,j,k=1,2,3,\ \alpha=1,2)$

(22)

여기서 $\overline{U}_\alpha=\overline{u}_\alpha(\alpha=1,2)$ $\overline{U}_3=\overline{p}$이다. 식(21)에서 주어지는 基本解를 이용하여 영역 내부점 $\mathbf{y}'$을 경계상의 점 $\mathbf{y}$로 접근시키는 極限操作을 하면 다음과 같은 境界積分方程式(Boundary integral equation)을 얻을 수 있다.

$$c_{kj}\overline{U}_k(y;\omega) = \int_\Gamma \{ \overline{\tau}_\alpha(x;\omega)V^*_{\alpha j}(x,y;\omega) - \overline{u}_\alpha(x;\omega)\Sigma^*_{\alpha j}(x,y;\omega)\} d\Gamma(x) + \int_\Gamma \{ \overline{p}_{,n}(x;\omega)V^*_{3j}(x,y;\omega) - \overline{p}(x;\omega)V^*_{3j,n}(x,y;\omega)\} d\Gamma(x) - \int_\Omega \overline{B}_i(x')V^*_{ij}(x',y;\omega)\, d\Omega(x') \quad (i,j,k=1,2,3,\ \alpha=1,2)$$

(23)

여기서 $C_{kj}$는 形狀係數로서 매끈한 경계인 경우 $C_{kj}=\frac{\delta_{kj}}{2}$로 주어진다. 또 식(23)에서 주어지는 變換空間에서의 表面力 벡터 $\overline{\tau}_\alpha$와 텐서 $\Sigma^*_{\alpha j}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{\tau}_\alpha = (\overline{\tau}_{\alpha\beta}' + \delta_{\alpha\beta}\overline{p})n_\beta = \{(\lambda\overline{u}_{k,k}+\overline{p})\delta_{\alpha\beta}+\mu(\overline{u}_{\alpha,\beta}+\overline{u}_{\beta,\alpha})\}n_\beta \quad (24)$$

$$\Sigma^*_{\alpha j} = \left\{\left(\lambda V^*_{kj,k} - \frac{\omega}{K}V^*_{4j}\right)\delta_{\alpha\beta} + \mu\left(V^*_{\alpha j,\beta}+V^*_{\beta j,\alpha}\right)\right\}n_\beta \quad (25)$$

다음은 식(21)을 만족한 基本解 $V_{ij}$를 구하기 위하여 基本解 텐서 $V^*_{ij}$를 微分演算子行列$[L_{ij}]$의 轉置餘因子行列(Transposed cofactor matrix$-[\mu_{ij}]$와 스칼라함수 $\phi^*$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$V^*_{ij}(x,y;\omega) = \mu_{ij}\phi^*(x,y;\omega) \quad (i,j=1,2,3) \quad (26)$$

식(26)을 식(21)에 대입하면 스칼라함수 $\phi^*$는 다음 미분방정식을 만족하는 해로서 주어진다.

$$\mathcal{L}\phi^* = -\delta(x-y) \quad (27)$$

여기서

$$\mathcal{L} = \det(\mathcal{L}_{ij}) = \mu(\lambda+2\mu)(\Delta-\eta^2)\Delta^2 \quad (28)$$

$$\eta^2 = \left\{m+\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\}\frac{\omega}{K} \quad (29)$$

결국 식(28)의 微分演算子를 만족하는 기본해 $\phi^*$는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi^*(r) = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)\eta^4}\left[\left(\frac{\eta^2}{4}r^2+1\right)+K_0(r\eta)\right] \quad (30)$$

식(26), (30)으로 부터 기본해 텐서 $V^*_{ij}$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)\eta^2}\{\Psi^*_1\delta_{\alpha\beta}+\Psi^*_2 r_{,\alpha}r_{,\beta}\}$$

$$V^*_{\alpha 3} = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\eta^2}\frac{\omega}{K}\zeta^* r_{,\alpha}$$

$$V^*_{3\beta} = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\eta^2}\zeta^* r_{,\beta}$$

$$V^*_{33} = \frac{1}{2\pi}K_0(r\eta) \quad (\alpha,\beta=1,2) \quad (31)$$

여기서

$$\Psi^*_1 = \left\{\frac{(\lambda+\mu)}{2}\frac{m\omega}{K}-(\lambda+2\mu)\eta^2\right\}\ln(r) - (\lambda+\mu)\left(\eta^2-\frac{m\omega}{K}\right)\left(\frac{1}{r^2\eta^2}-\frac{1}{r\eta}K_1\right) + \frac{\omega}{K}\left\{\frac{1}{2}\ln(r)+\frac{1}{r^2\eta^2}-\frac{1}{r\eta}K_1\right\}$$

$$\Psi^*_2 = (\lambda+\mu)\left\{\left(\eta^2-\frac{m\omega}{K}\right)\left(K_0+\frac{2}{r\eta}K_1-\frac{2}{r^2\eta^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{K}\right\} - \frac{\omega}{K}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{r^2\eta^2}+\frac{2}{r\eta}K_1+K_0\right)$$

$$\zeta^* = \eta K_1 - \frac{1}{r} \quad (32)$$

이고 $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, $K_0$, $K_1$은 각각 0次 및 1次 第2種 變形 Besse 函數(Modified Bessel functions of the second kind of order 0 and 1)이다. 또 식(32)로 주어지는 기본해 $V^*_{ij}$를 식(25)에 대입하면 텐서 $\boldsymbol{\Sigma}^*_{ij}$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Sigma^*_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\eta^2}\left[\left\{\frac{\lambda}{\mu}\left(\Psi^*_{1,r}-\Psi^*_{2,r}-\Psi^*_2\frac{1}{r}\right)+\frac{\omega}{K}\zeta^*-\Psi^*_2\frac{2}{r}\right\}r_{,\beta}n_\alpha\right.$$
$$-\left(\Psi^*_{1,r}-\Psi^*_{2,r}\frac{1}{r}\right)\left(r_{,\alpha}n_\beta+\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{\alpha\beta}\right)$$
$$\left.-2\left(\Psi^*_{2,r}-\Psi^*_2\frac{2}{r}\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}\frac{\partial r}{\partial n}\right]$$

$$\Sigma^*_{\alpha 3}=\frac{\omega}{2\pi(\lambda_2\mu)\eta^2K}\left[\left\{\lambda\zeta^*_{,r}+(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{r}\zeta^*+\eta^2K_0\right)\right\}n_\alpha\right.$$
$$\left.+2\mu\left(\zeta^*_{,r}-\frac{1}{r}\zeta^*\right)r_{,\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\right]$$

$$\Sigma^*_{3\alpha}=\frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)\eta^2}\left[\frac{1}{r}\zeta^*n_\beta+\left(\zeta^*_{,r}-\frac{1}{r}\zeta^*\right)r_{,\beta}\frac{\partial r}{\partial n}\right]$$

$$\Sigma^*_{33}=-\frac{1}{2\pi}\eta K_1\frac{\partial r}{\partial n} \tag{33}$$

여기서

$$\Psi^*_{1,r}=\left(A_1+\frac{1}{2}\frac{\omega}{K}\right)\frac{1}{r}+\left(A_2-\frac{\omega}{K}\right)\left\{\frac{2}{\eta^2}\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\eta}{r}K_0+\frac{2}{r^2}K_1\right)\right\}$$
$$\Psi^*_{2,r}=\left(A_2-\frac{\omega}{K}\right)\left\{\frac{4}{\eta^2}\frac{1}{r^3}-\frac{2}{r}K_0-\frac{1}{\eta}\left(\eta^2+\frac{4}{r^2}\right)K_1\right\}$$

$$\zeta^*_{,r}=\frac{1}{r^2}-\eta^2K_0-\frac{\eta}{r}K_1$$
$$A_1=\frac{(\lambda+\mu)}{2}\frac{\omega}{K}-(\lambda+2\mu)\eta^2$$
$$A_2=(\lambda+\mu)\left(\eta^2-\frac{\omega}{K}\right)$$
$$A_3=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\frac{\omega}{K}$$

#### 4. 離散化

식(23)으로 주어지는 境界積分方程式에 대해서 領域의 境界를 N개의 境界要素를 도입하여 분할하면 다음과 같은 離散境界積分式(Discretized boundary integral equation)을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2}\overline{U}_i=\sum_{n=1}^{N}\int_{\Gamma_n}\{\overline{\tau}_\alpha V^*_{\alpha j}-\overline{u}_\alpha\Sigma^*_{\alpha j}\}d\Gamma$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\int_{\Gamma_n}\{\overline{p}_{,n}V^*_{3,j}-\overline{p}V^*_{3j,n}\}d\Gamma$$
$$-\sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}\overline{B}_iV^*_{ij}d\Omega \qquad (i,j=1,2,3) \tag{34}$$

식(34)를 행렬로 나타내면

$$H_{j\alpha}u_\alpha+H_{j3}\overline{p}=G_{j\alpha}\tau_\alpha+G_{j3}\overline{p}_{,n}-R_j \tag{35}$$

식(35)를 경계상의 모든 절점에 대해 적용시키고 경계조건을 적용하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix}H_1 & H_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\overline{u}\\ \tilde{u}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}G_1 & G_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}\\ \overline{p}\end{pmatrix}-R \tag{36}$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}$ $\bar{\mathbf{p}}$는 경계조건에서 주어진 既知벡터이다.

식(36)으로 주어지는 聯立方程式系를 풀면 경계상의 모든 未知數를 결정할 수 있게 된다.

#### 5. 數值 Laplace逆變換

식(36)으로 부터 얻어지는 해는 Laplace 변환공간에서의 해이기 때문에 실시간 공간에서의 해를 얻기 위해서는 변환공간에서의 해를 逆變換하여야 한다. Laplace逆變換은

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{st}F(\omega)d\omega \tag{37}$$

으로 주어지는 Bromwich 적분에 의해 구할 수 있으나 위에서 언급한 해법으로 얻어지는 해는 離散解이기 때문에 식(37)을 적용할 수 없고 數值 逆變換法을 사용해야만 한다.

수치 Laplace逆變換法은 대개의 경우 해의 성격을 미리 예측하여 選別的으로 적용하여야 하는 것이 대부분이고 汎用性이 큰 방법은 거의 없다. 그 중에서도 지금까지는 Durbin법이 잘 알려져 있으나 최근 범용성과 해의 精度가 뛰어난 Hosono法이 개발되어 많이 적용되고 있다[5),11)]. 특히 Durbin법에 비하여 특정 시각에서의 해를 적은 수의 파라미터로서 계산할 수 있다[12)].

Hosono法은 Bromwich적분 (37)에서 指數函數를 근사시키고 거기에 Euler변환을 이용한 방법으로서 逆變換式은 다음과 같은 級數로 주어진다.

$$f(t)=\frac{e^{\sigma}}{t}\left[\sum_{n=1}^{k-1}f_n+\frac{1}{2^{\mu+1}}\sum_{\nu=0}^{\mu}A_{\mu,\nu}f_{k+\nu}\right] \tag{38}$$

여기서

$$A_{\mu,\mu}=1,\quad A_{\mu,\nu-1}=A_{\mu,\nu}+\binom{\mu+1}{\nu} \tag{39}$$

$$f_n=(-1)^n I_m\{\bar{f}(\omega_n)\} \tag{40}$$

$$\omega_n=\frac{1}{t}\left\{\sigma+i\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \tag{41}$$

이고 $I_m\{\bar{f}\}$는 複素函數 $\bar{f}$의 虛數部이다. 임의의 시각 t에서의 實空間解 f(t)는 변환 파라미터 $\omega_n$ $(n=1,2\cdots N)$에 대한 $N(=k+\mu)$개의 $\bar{f}(\omega_n)$ 값과 식(38)에 의해 계산된다. 여기서 파라미터는 일반적으로 $k=15$, $\mu=5$, $\sigma=5.0$이 적당한 것으로 알려져 있다[5]. 또한 실제로 k값을 15이상 크게 하여도 계산시간에 비하여 결과의 精度는 크게 높아지지는 않는다. Hosono法을 적용한 해석 알고리즘은 Fig.1과 같다.

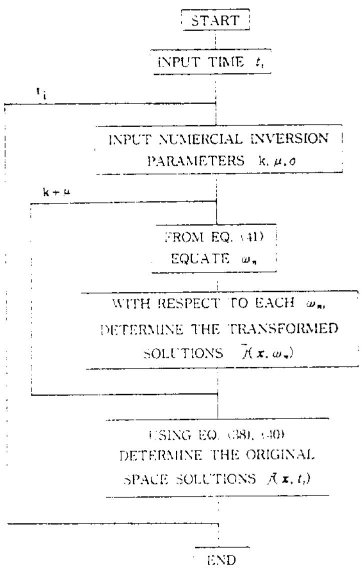


Fig. 1 Analysis algorithm

### 6. 數値解析 例

이상에서 언급한 제안해법의 有效性을 검증하기 위하여 數値解析 例를 보인다. 해석에서 一定要素를 사용하며, 數値積分으로서 8점 Gauss적분을 적용하였고, 特異積分은 전부 解析的으로 계산하였다. 또 物體力과 初期條件을 0으로 가정한다.

수치해석 예로서 Fig.2와 같이 帶形의 局所荷重을 받는 2차원 半無限 地盤의 壓密問題를 대상으로 하였고, 그 해석모델을 Fig.3에 보였다. 여기서 프와송비와 물의 壓縮率을 0, 彈性定數 E=1.0으로 하였고, 전 경계를 56개의 일정요소로 분할하였다. 또한 시간에 대하여 $\bar{t}=2Gkt/(\gamma_\omega a^2)$의 無次元時間을 도입하였다.

해석결과로서 Fig.4는 地表面下 z/a=0.5에서 x/a=0.0, 1.0, 2.0인 곳의 間隙水壓 p/q의 무차원시간 $\bar{t}$에 대한 변화를 Schiffman[2]에 의한 解析解와 비교한 것이다. Fig.5와 Fig.6은 間隙水壓의 수직방향 분포와 수평방향 분포의 계산결과를 解析解와 비교한 것이다. Fig.7은 地表面下 z/a=0.5, x/a=0.0인 점에서 프와송비가 0인 경우와 0.45인 경우의 間隙水壓 p/q의 經時變化를 보인 것이다.

이상으로부터 본 해법에 의한 계산결과가 일정요소를 사용함에도 불구하고 해석해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

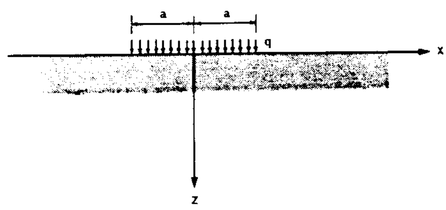


Fig. 2 Half-space subjected to a strip uniform load q

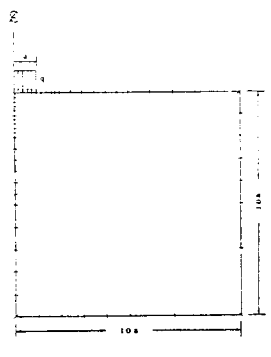

Fig. 3 Discretization

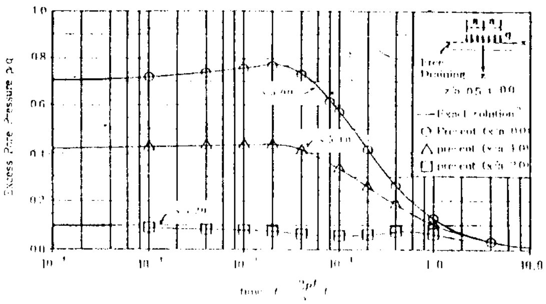

Fig. 4 Comparison of excess pore pressure p/ q with respect to time $\hat{t}$

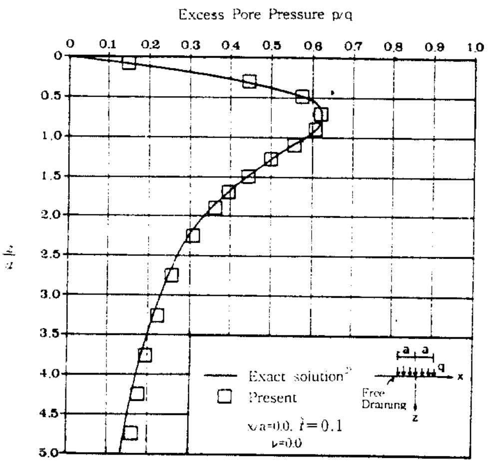


Fig. 5 Comparison of excess pore pressure in vertical direction

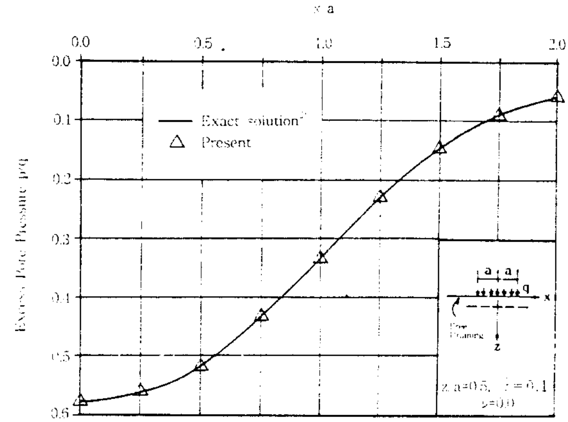


Fig. 6 Comparison of excess pore pressure in horizontal direction

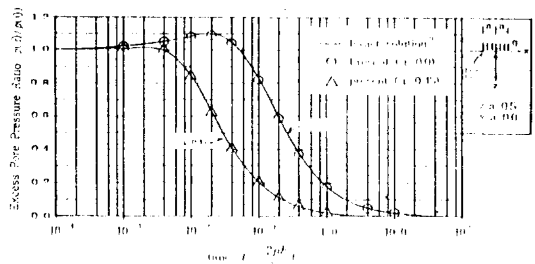

Fig. 7 Comparison of excess pore pressure with respect to $\nu$=0.0 and 0.45

## 7. 結 論

본 논문에서는 2次元 線形 壓密問題를 해석하기 위한 境界要素法에 의한 近似解析法을 제안하였다.

Biot의 線形 連成 壓密理論에 의한 미분방정식을 대상으로 하여 Laplace변환을 적용하였고, 변환공간에서의 境界積分方程式과 基本解를 구체적으로 제시하였으며, Hosono의 數値 Laplace逆變換法을 이용한 해석 알고리즘을 제시하였다. 수치해석예로서 半無限 地盤의 4각형 局所載荷에 의한 압밀문제를 해석하였고 얻어진 數値解와 嚴密解와의 비교를 통하여 제안해법의 有效性을 밝혔다.

## 참 고 문 헌

1. Biot, M.A., "General Theory of Three-Dimensional Consolidation", *J. Appl. Phys.*, 12, 1941, pp.155-164.
2. Schiffman, R.L., Chen, A.T., and Jordan, J. C., "An Analysis of Consolidation Theories", Proc. *ASCE*, 95, SM1, 1969, pp.285-312.
3. Sandhu, R.S., and Wilson, E.L., "Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media", Proc. *ASCE*, 95, EM3, 1965, pp.641-651.
4. Christian, I.T., and Boehmen, I.W., "Plane Strain Consolidation by Finite Elements", Proc. *ASCE*, 96, SM4, 1970, pp.1435-1457.
5. 細野敏夫, "數値 Laplace變換", **日本電氣學會論文誌 A**, 第99卷, 第10號, 1979, pp.494-500.
6. Predeleanu, M., "Boundary Integral Method for Porous Media", Proc. 3rd. Int. *BEM* Symp., 1981, pp.325-334.
7. Aramaki, G., Kuroki, T., and Onishi, K., "Consolidation Analysis by Boundary Element Method", *Proc. 4th. Int. BEM Symp.*, 1982, pp.

363-376.
8. Cheng, A.H-D., and Liggett, I.A., "Boundary Integral Equation Method for Linear Porous-Elasticity with Applications to Soil Consolidation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 20, 1984, pp.255-278.
9. 登坂宣好, "聯立微分方程式系の境界積分方程式表現", **第35回應用力學聯合講演會講演論文抄錄集, 1985, pp.323-324.**
10. Nishimura, N., and Kobayashi, S., "A Boundary Integral Equation Method for Consolidation Problems", *Int. J. Solids and Structures,* 25, 1, 1989, pp.1-21.
11. 徐 日教, 登坂宣好, "ラプラス變換を用いた線形壓密問題の境界要素解析", 第2回計算力學シンポジウム報文集, 日本科學技術連盟, 1988, pp.183-188.
12. Tosaka, N., and Suh, I.G., "Boundary Element Analysis of Dynamic Coupled Thermoelasticity Problems", *Computational Mechanics,* Vol.8, 1991, pp.331-342.

(접수일자 : 1995. 8. 7)