

## 이동물체에 의한 보 구조물의 진동 해석

## Vibration Analysis of the Beam Structure with a Moving Mass

이 우 식\*  
Lee, U-Sik  
임 강 민\*\*  
Lim, Kang-Min

## 요 약

본 논문에서는 이동물체에 의해 가진 받는 보의 동적반응을 보다 용이하게 다룰 수 있는 간결한 수치해석 알고리즘을 제안하였다. 구조물과 이동물체를 각각 균일한 Euler보와 질점으로 모델링하여 보의 운동방정식을 유도하였으며 이 식을 유연영향함수를 이용하여 적분형 미분방정식으로 바꾸어줌으로써 수치해석에 적용할 수 있는 형태로 바꾸어 주었다. 유도된 운동방정식을 모우드 해석기법을 이용하여 수치해를 구하였으며 기존의 수치해석 연구결과들과 비교하여 본 연구결과의 타당성을 검증함으로써 본 연구에서 개발한 수치해석 알고리즘은 이동물체에 의해 가진받는 보의 초기 해석과 설계과정에서 효율적으로 사용할 수 있음을 보였다.

## Abstract

This paper introduced a simple numerical analysis algorithm for the calculation of the dynamic responses of the beam structure with a moving mass. The dynamic equation of motion of the Bernoulli-Euler beam is derived by considering the moving mass as a moving particle, and the dynamic equation of motion is transformed into an integro-differential equation by use of the structural influence function. The numerical solutions of the integro-differential equation are obtained by the modal analysis approach, and compared with those cited from well-known references. The proves that the numerical analysis algorithm proposed herein provide very reliable results, and thus it can be utilized in the design analysis of the beamlike structures exited by a mass which is traveling on it.

## 1. 서 론

구조물 위로 질량을 가진 물체가 접촉하면서 진행할 때 구조물은 동적반응을 보이게 되며 심각한 경우 구조물의 안전에 위협을 초래하게 된다. 이러한 문제의 전형적인 예로는 교량, 철도, 도로, 가상기증기, 포신 등이 있다. 20세기초부터 구조

물이 거대해지고 이동물체의 속도와 중량등이 증가하면서 이러한 문제의 심각성이 부각되어져 많은 연구자들에 의해 구조물과 이동물체간의 상호작용과 이로 인한 구조물의 동적반응 예측에 대한 연구가 꾸준히 이루어져 왔다. 이동물체가 변형된 구조물을 따라 진행되는 동안 구조물과 이동물체 간에는 상호작용력이 발생한다. 상호작용력은 중

\* 인하대학교 기계공학과  
\*\* 인하대학교 기계공학과 대학원

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 6월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

력효과, 이동물체의 관성, 코리올리력, 원심력 그리고 이동물체의 속도변화에 기인하는 힘 등으로 구성된다. 그러므로 이동물체의 속도와 구조물의 구조강성, 이동물체와 구조물과의 질량비는 상호작용력 발생에 중요한 인자이다. 상호작용력에 의해 발생한 구조물의 동적반응은 강한 비선형성을 지닌 복잡한 형태의 편미분방정식형태로 표현된다. 기존의 대부분의 연구에서 이와 같이 복잡한 상호연계 메카니즘을 다음의 가정을 통해 근사화함으로써 구조물의 동적인 거동에 대한 해를 구할 수 있었다. 첫째로 이동물체의 관성을 무시하여 일정한 하중이 이동하는 이동하중문제로 가정한다. 이런 가정은 구조물의 질량에 비해 이동물체의 관성이 충분히 작다는 조건이 필요하다. 둘째로 코리올리력과 원심력등의 연계항을 무시한다. 이 가정은 이동물체의 속도와 그 변화가 충분히 작다는 조건이 요구된다. 마지막으로 이동물체의 속도가 일정하다. 이러한 가정으로 얻어진 해는 그 한계로 인해 만족스러운 결과를 주지 못했다.

이런 문제를 다루는데는 수학적 과정에서 많은 어려움이 발생하므로 지난 수십년간 많은 해석기법들이 제안되었다. 최근에는 컴퓨터의 급속한 발달로 수치해석기법을 이용하여 이 문제를 푸는 연구가 다양하게 이루어지고 있다. Ting<sup>1)</sup>은 그의 연구에서 유연영향함수를 이용하여 구조물의 운동방정식을 적분형 미분방정식으로 변형한 후 후방차분법을 이용하여 이 문제를 다루었고, Akin<sup>2)</sup>은 진동응답을 고유진동모우드의 조합으로 가정한 후 Runge-Kutta방법으로 수치해석하였으며, Cifuentes<sup>3)</sup>은 구조물과 보간의 접촉면을 나타내는 적합조건을 이용한 유한요소법을 이용하여 이 문제를 다루었다. 그러나 이러한 최근의 연구들에서도 구조물과 이동물체간의 상호작용력중 물리적으로 중요한 코리올리력이나 원심력항을 무시하여 비교적 단순한 경우만을 다루었거나 수치해석기법도 비교적 복잡한 과정이 요구되는 방법을 이용함으로써 해의 엄밀성과 효율성에 제한이 있었다. 본 논문에서는 이러한 단점들을 극복하기 위해 보다 간결하고 새로운 수치해석기법을 제시하고, 특히 구조물과 이동물체간의 상호작용력을 모두 포함하여 다음으로써 구조물의 동적 거동을 보다 엄

밀하게 고찰하였다.

## 2. 구조동역학 방정식의 유도

### 2.1 이동물체와 보사이의 상호작용력

이동물체에 의해 가진을 받는 보 구조물은 1과 같이 간단하게 모델링할 수 있다. 구조물과 이동물체는 각각 수평으로 놓여 있는 균일한 형태의 Bernoulli-Euler 보(Beam)와 질량  $M$ 을 가지는 질점으로 가정한다. 보의 길이  $L$ , 강성계수  $EI$ , 그리고 단위길이당 질량  $m$ 이며 시간  $t$ 에서 보 위의 임의의 점  $x$ 의 횡방향 변위는  $w(x, t)$ 로 나타낸다. 이동물체와 보간의 상호작용력은 이동물체와 보와의 접촉점에서만 수직으로 작용한다.  $\xi, v$ 는 보 위에서 이동물체의 위치와 속도를 나타내는 시간함수이다.  $w(\xi, t)$ 를 시간에 대해 전미분하면 이동물체의 횡방향 속도와 가속도는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{dw}{dt}(\xi, t) = \dot{w} + v w' \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}(\xi, t) = \ddot{w} + 2v\dot{w}' + v^2 w'' + \dot{v} w' \tag{2}$$

여기서,  $v$ 는 이동물체의 이동속도이고  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $(\phantom{x})' = \frac{\partial}{\partial \xi}(\phantom{x})$ 이다.

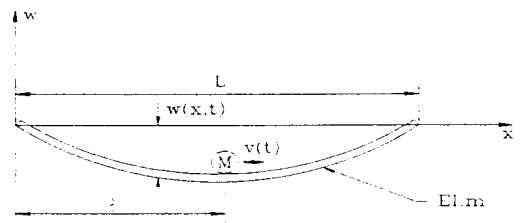


Fig.1 A beam with a moving mass

Fig.2(b)는 이동물체에 대한 자유물체도로 나타낸다. 이동물체에 작용하는 수직방향 힘은 다음과 같이 주어진다.<sup>1,4)</sup>

$$\begin{aligned}
 N(\xi, t) &= M \left\{ g + \frac{d^2 w}{dt^2}(\xi, t) \right\} \\
 &= M \{ g + \ddot{w}(\xi, t) + 2v \dot{w}'(\xi, t) + v^2 w''(\xi, t) \\
 &\quad + v \dot{w}'(\xi, t) \} \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서,  $g$ 는 수직방향 중력 가속도이며  $M \frac{d^2 w}{dt^2}(\xi, t)$ 는 이동 물체에 작용하는 관성력이다. Fig.2(b)에서 이동물체에 의해 보에 작용하는 힘  $P(\xi, t)$ 는  $N(\xi, t)$ 와 크기는 같고 방향이 반대인 힘이다. 윗 식에서 보와 이동물체간의 상호작용력에는 이동물체의 움직임과 보의 동적거동이 연계된 비선형 항이 나타나는 것을 알 수 있다. 식(3)에서 첫째, 둘째항은 각각 이동물체의 자중과 보의 처짐에 의해 발생하는 힘이고 세번째, 네번째항은 물리적으로 코리올리력과 원심력을 의미하며 마지막 항은 이동물체의 속도변화에 의해 발생하는 힘이다.

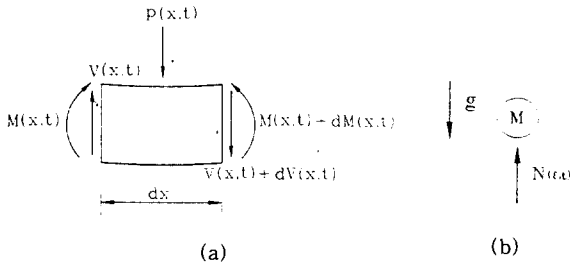


Fig.2 Free body diagrams of (a) beam element and (b) a moving mass

상호작용력  $P(\xi, t)$ 는 접촉점  $\xi$ 에서만 수직으로 작용하는 집중하중이다.  $P(\xi, t)$ 는 보의 운동방정식에 적용하기 위해서 분포하중 형태로 바꾸어 주어야 한다.  $\xi$ 점에 작용하는 횡방향 집중하중에 Dirac delta 함수를 곱하여줌으로써  $\xi$ 점에 작용하는 분포하중 형태로 표현할 수 있다. Dirac delta 함수  $\delta(x-\xi)$ 는 수학적으로 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} \infty & \text{when (if) } x = \xi \\ 0 & \text{when (if) } x \neq \xi \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(x-\xi) dx = F(\xi)$$

즉, Dirac delta 함수  $\delta(x-\xi)$ 는 작용점  $\xi$ 에서  $\infty$ 로 수학적으로 크기를 정의할 수 없으며 식(4)와 같이  $-\infty$ 에서  $\infty$ 까지 영역  $x$ 에 작용하는 함수  $F(x)$ 의  $x=\xi$ 에서의 크기를 분별해 내는 것이다. 중요한 것은 1-차원의 Dirac delta 함수의 물리적 단위는 길이의 역차원이라는 것이다. 단위길이당 횡방향 분포하중  $p(x, t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= P(\xi, t) \delta(x-\xi) \\
 &= M \{ g + \ddot{w}(\xi, t) + 2v \dot{w}'(\xi, t) + v^2 w''(\xi, t) \\
 &\quad + v \dot{w}'(\xi, t) \} \delta(x-\xi) \quad (5)
 \end{aligned}$$

2.2 유연영향함수를 이용한 보의 운동방정식  
외력  $p(x, t)$ 를 받는 Bernoulli-Euler보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right\} + m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = -p(x, t) \quad (6)$$

식(6)에 식(5)를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right\} + m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = \\
 -M \{ g + \ddot{w}(\xi, t) + 2v \dot{w}'(\xi, t) + v^2 w''(\xi, t) \\
 + v \dot{w}'(\xi, t) \} \delta(x-\xi) \quad (7)
 \end{aligned}$$

균일한 단면을 가지는 보에 대해서는 식(7)은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = -M \{ g + \ddot{w}(\xi, t) \\
 + 2v \dot{w}'(\xi, t) + v^2 w''(\xi, t) + v \dot{w}'(\xi, t) \} \delta(x-\xi) \quad (8)
 \end{aligned}$$

보와 같은 연속계에서 힘과 변위에 대한 일반적인 평형방정식은 다음과 같이 강성영향함수(stiffness influence function)를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$F(x) = \int_0^l K(x, \xi) \cdot w(\xi) d\xi \quad (9)$$

여기서,  $F(x)$ 는  $x$ 점에 작용하는 외력이고  $w(\xi)$ 는 연속체의  $\xi$ 점에 발생하는 변위이며,  $K(x, \xi)$ 는 강성영향함수로서  $\xi$ 점에 단위 변위를 주기 위해  $x$ 점에 가해지는 힘을 의미하며 이산계에서 스프링상수  $k$ 와 같은 의미를 지닌다. 식(9)는 유연영향함수(flexibility influence function)를 사용하여 변위에 대한 평형방정식형태로 바꾸어 쓸 수 있다. 유연영향함수는  $\xi$ 점에 정적인 단위 힘이 작용할 때  $x$ 점에서의 변위를 나타내는 함수이며 강성영향함수의 역함수로서 물리적으로 정반대의 의미를 지닌다. 즉, 연속계에서  $\xi$ 점에 작용하는 힘  $F(\xi)$ 에 대한  $x$ 점에서의 변위는 유연영향함수  $C(x, \xi)$ 를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$w(x) = \int_0^l C(x, \xi) \cdot F(\xi) d\xi \quad (10)$$

유연영향함수는 변형에너지의 정의에 따라 다음과 같은 대칭성을 가지며 이를 Maxwell의 상반정리(reciprocal theorem)라고 한다.

$$C(x, \xi) = C(\xi, x) \quad (11)$$

식(8)의 관성항을 우변으로 이항하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$EIw''''(x, t) = -m(x)\ddot{w}(x, t) - M\{g + \ddot{w}(\xi, t) + 2v\dot{w}'(\xi, t) + v^2w''(\xi, t) + v\dot{w}'(\xi, t)\}\delta(x-\xi) = F(x, t) \quad (12)$$

식(12)을 식(10)에 대입하면 다음과 같다.

$$w(x, t) + \int_0^l C(x, a)m(a)\ddot{w}(a, t)da = -C(x, \xi)M\{g + \ddot{w}(\xi, t) + 2v\dot{w}'(\xi, t) + v^2w''(\xi, t) + v\dot{w}'(\xi, t)\} \quad (13)$$

이와같이 식(8)을 유연영향함수를 이용하여 미분형 적분방정식 형태의 식(13)으로 바꾸어주면 해석적으로 처리가 곤란한  $\delta(x-\xi)$ 가 사라지고 방정식이 단순하고 간결한 형태를 가지는 장점이 있다.

### 3. 모우드 해석법을 이용한 진동해석

보의 운동방정식 해를  $x$ 만의 함수  $\phi_m(x)$ 와  $t$ 만의 함수  $q_m(t)$ 의 조합으로 가정하고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^N \phi_m(x) q_m(t) \quad (14)$$

식(14)에서  $\phi_m(x)$ 는 이동물체가 없이 동일한 경계조건을 가지는 보의 고유진동모우드이고  $q_m(t)$ 는 각 모우드에 해당하는 일반좌표계이며  $N$ 은 고려한 진동모우드의 갯수를 나타내며  $\phi_m(x)$ 는 다음의 관계식을 가지는 만족하는 진동모우드를 나타낸다.

$$\lambda_m \phi_m(x) = \int_0^l C(x, a)m(a)\phi_m(a)da \quad (15)$$

여기서,  $\lambda_m = 1/\omega_m^2$ 이며  $\omega_m$ 은 진동모우드  $\phi_m(x)$ 에 해당하는 고유진동수이다. 식(14)를 식(13)에 대입한 후  $m(x)\phi_n(x)$ 를 곱하고 보 전체길이를 따라 적분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^l \left\{ \sum_{m=1}^N \phi_m(x)q_m(t) + \int_0^l C(x, a)m(a) \sum_{m=1}^N \phi_m(a)q_m(t)da \right\} m(x)\phi_n(x)dx = - \int_0^l C(x, \xi)M\left\{g + \sum_{m=1}^N \phi_m(\xi)q_m(t) + 2v \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi)q_m(t) + v^2 \sum_{m=1}^N \phi''_m(\xi)q_m(t) + v \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi)q_m(t)\right\} m(x)\phi_n(x)dx \quad (16)$$

정규모우드의 직교성(orthogonality)을 이용하여 모달질량(modal mass)을 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{m}_m \delta_{mn} = \int_0^l m(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx \quad (17)$$

식(17)에서  $\delta_{mn}$ 은 Kronecker delta 함수이며 다음의 특성을 가진다.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{when (if) } m = n \\ 0 & \text{when (if) } m \neq n \end{cases} \quad (18)$$

그러므로 식(16)의 좌변은 다음과 같이 정리된다.

$$\int_0^l \sum_{m=1}^N \left\{ \phi_m(x) \phi_n(x) dx q_m(t) + \int_0^l C(x, \alpha) m(\alpha) \phi_m(\alpha) \phi_n(x) d\alpha \right\} m(x) dx \ddot{q}_m(t) = \bar{m}_n \{ \dot{q}_n(t) + \lambda_n \dot{q}_n(t) \} \quad (19)$$

식(16)의 우변의 각항은 유연영향함수의 직교성과 식(15)를 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_0^l C(x, \xi) M g m(x) \phi_n(x) dx = M g \lambda_n \phi_n(\xi) \quad (20a)$$

$$\int_0^l C(x, \xi) M \sum_{m=1}^N \phi_m(\xi) m(x) \phi_n(x) dx \ddot{q}_m(t) = M \lambda_n \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) \phi_n(\xi) \dot{q}_m(t) \quad (20b)$$

$$2v \int_0^l C(x, \xi) M \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) m(x) \phi_n(x) dx \dot{q}_m(t) = 2v M \lambda_n \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) \phi_n(\xi) \dot{q}_m(t) \quad (20c)$$

$$v^2 \int_0^l C(x, \xi) M \sum_{m=1}^N \phi''_m(\xi) m(x) \phi_n(x) dx q_m(t) = v^2 M \lambda_n \sum_{m=1}^N \phi''_m(\xi) \phi_n(\xi) q_m(t) \quad (20d)$$

$$v \int_0^l C(x, \xi) M \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) m(x) \phi_n(x) dx q_m(t) = v M \lambda_n \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) \phi_n(\xi) q_m(t) \quad (20e)$$

식(17)를 이용하여 식(19)와 식(20a~e)를 정리하면 다음과 같다.

$$\bar{m}_n \{ \dot{q}_n(t) + \lambda_n \dot{q}_n(t) \} = -M \lambda_n \phi_n(\xi) \left\{ g + \sum_{m=1}^N \phi_m(\xi) \ddot{q}_m(t) + 2v \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) \dot{q}_m(t) + v^2 \sum_{m=1}^N \phi''_m(\xi) q_m(t) + v \sum_{m=1}^N \phi'_m(\xi) q_m(t) \right\} \quad (21)$$

식(21)은 행렬미분식 형태로 바꾸면 다음과 같이  $q$ 에 대한 2차 미분방정식이 된다.

$$([\bar{M}] + M[A][\Phi]) \ddot{q} + 2vM[A][\Phi'] \dot{q} + [A](v^2M[\Phi''] + vM[\Phi'] + [\bar{m}]) q = -Mg(\lambda\phi) \quad (22)$$

여기에서, 각 행렬은 다음과 같다.

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \phi_1 & & & \\ & \lambda_2 \phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \phi_N \end{bmatrix} \quad (23a)$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 \lambda_1 & & & \\ & \bar{m}_2 \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{m}_N \lambda_N \end{bmatrix} \quad (23b)$$

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & & & \\ & \bar{m}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{m}_N \end{bmatrix} \quad (23c)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) & \cdots & \phi_N(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) & \cdots & \phi_N(\xi) \end{bmatrix} \quad (23d)$$

$$[\Phi'] = \begin{bmatrix} \phi'_1(\xi) & \phi'_2(\xi) & \cdots & \phi'_N(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'_1(\xi) & \phi'_2(\xi) & \cdots & \phi'_N(\xi) \end{bmatrix} \quad (23e)$$

$$[\Phi''] = \begin{bmatrix} \phi''_1(\xi) & \phi''_2(\xi) & \cdots & \phi''_N(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_1(\xi) & \phi''_2(\xi) & \cdots & \phi''_N(\xi) \end{bmatrix} \quad (23f)$$

변위, 속도, 가속도는 다음과 같다.

$$q = \{ q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t) \}^T \quad (23g)$$

$$\dot{q} = \{ \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t) \}^T \quad (23h)$$

$$\ddot{q} = \{ \ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_N(t) \}^T \quad (23i)$$

식(22)는 다음과 같이 모달행렬식(modal matrix)으로 바꿔 쓸 수 있다.

$$[m] \ddot{q} + [c] \dot{q} + [k] q = \{f\} \quad (24)$$

상태벡터(state vector)를 다음과 같이 정의하면

$$q = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

식(24)는 1차 미분방정식형태로 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다.

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1} \cdot k & -m^{-1} \cdot c \end{bmatrix} q + \begin{Bmatrix} 0 \\ m^{-1} \cdot f \end{Bmatrix} \quad (26)$$

4차 Runge-Kutta 알고리즘을 이용하여 식(26)으로 부터 q(t)를 구한 후 이를 식(14)에 적용하여 w(x, t)를 구할 수 있다. 다음에서 다루는 예제에서는 초기조건을 w(x, t)=0,  $\dot{w}(x, t)=0$ 로 가정하였다.

#### 4. 수치해석 및 검토

##### 4.1 수치해석 예제

개발된 알고리즘의 결과를 검토하기 위해 이동물체에 의해 가진받는 단순 지지보의 처짐에 대한 예제를 다루어 보았다. 단순 지지보의 경우는 기존의 많은 연구에서 다루고 있다. 사용된 수치해석 입력값은 Cifuentes[3]가 사용한 값들이며 Table 1에 표시되었다.

Table 1 Data used for material values of the beam and a moving mass

Examples	3	4 to 7
Mass of moving mass [lbs <sup>2</sup> /in]	0.1248	15
Mass of beam [lbs <sup>2</sup> /in]	0.4992	350.24
Mass per unit length of beam [lbs <sup>2</sup> /in <sup>2</sup> ]	$2.936 \times 10^{-3}$	1.17
Length [in]	170	300
Flexural rigidity [lb-in <sup>2</sup> ]	$3.99 \times 10^7$	$3.3 \times 10^9$
Velocity of moving mass [in/s]	1074	2000
Gravity [in/s <sup>2</sup> ]	386.4	386.4

Cifuentes는 이동물체에 의한 상호작용력의 모든 항을 고려하였으며 이동물체의 질량은 보 전체 질량의 1/4이며 이동물체는 등속도 운동( $v=1074$  in/sec)을 하고 있다. Cifuentes는 시간을  $10^{-5}$ 초

씩 증가시켰으며 0.66L에서 최대처짐 0.192in가 나타났다. 개발된 알고리즘에 의해 얻어진 결과는 Fig.3과 같다. Fig.3의 횡축은 보의 길이에 대해 무차원화한 값으로써 보 위에서 이동물체의 위치를 나타내며, 종축은 보의 처짐을 나타낸다. 구해진 결과는 시간증분을  $10^{-3}$ 초로 하였을 때의 것이고 0.65L에서 최대처짐 0.193in이 나타난다. 이는 Cifuentes의 결과와 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig.3에서는 기존의 다른 연구방법<sup>12)</sup>으로 같은 문제를 다루어 보았다. Ting<sup>1)</sup>의 방법에 의한 결과는 시간증분 0.05초이고 0.68L에서 최대 처짐 0.189in이다. Akin<sup>2)</sup>에 의한 결과는 시간증분  $10^{-3}$ 초로 하였을 때의 것이다. Akin에 의한 결과는 본 연구에서와 같이 Runge-Kutta 방법에 의하여 구해졌고 본 연구에 의한 결과와 거의 일치한다. Akin은 상호작용력중 이동물체의 속도와 연계된 항을 무시하였는데 Fig.3의 결과는 본 연구 결과와 비교하기 위해 코리올리력과 원심력을 추가하여준 결과이다.

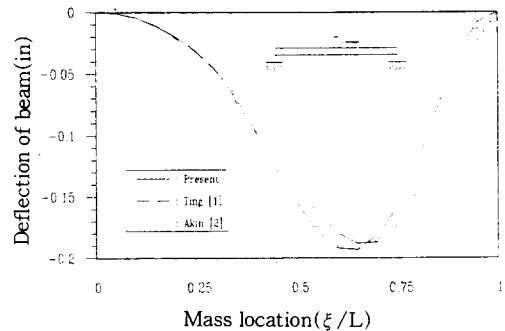


Fig.3 Trajectory of the simply supported beam with a moving mass

##### 4.2 수치해석 검토 및 토의

구조물에 작용하는 코리올리력과 원심력의 영향에 따른 보의 처짐변화를 확인하기 위해 Akin이 다룬 여러가지 경계조건에서 보의 처짐에 대한 문제를 다루어 보았으며 그 결과는 Fig.(4-7)에 표시하였다. Fig.(4-7)은 Akin의 경우와 같이 처짐방향을 양의 방향으로 표시하여 그렸으며 사용된 수치해석 입력값은 Akin이 다룬 경우와 같고 Table 1에 표시하였다. 이동물체는 등속도 운동( $v$

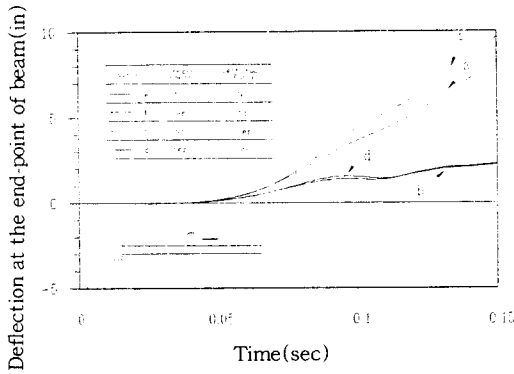


Fig.4 Deflection of the fixed-free beam with a moving mass

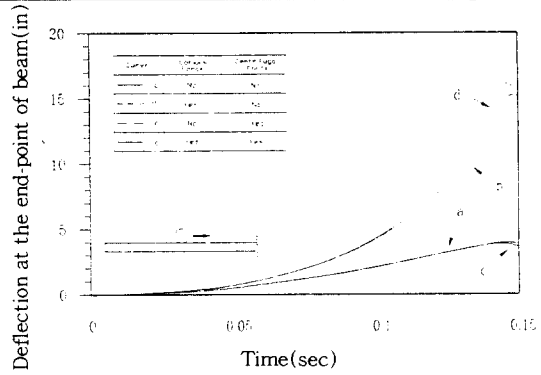


Fig.5 Deflection of the fixed-free beam with a moving mass

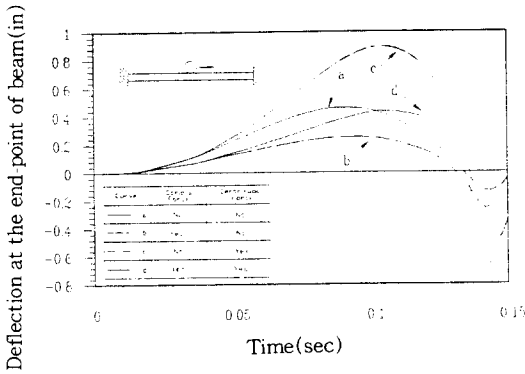


Fig.6 Deflection of the fixed-free beam with a moving mass

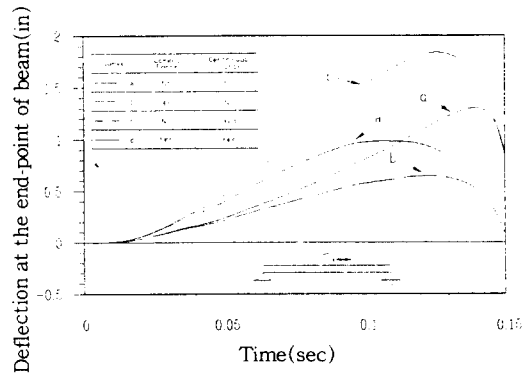


Fig.7 Deflection of the simply supported beam with a moving mass

=2000 in/sec)을 한다고 가정했다. 구해진 결과는 시간을  $10^{-4}$ 초씩 증분해 주었고 주어진 문제에서 고차 모우드의 영향이 거의 없기 때문에 모우드를 3개만 고려하였다. Akin은 논문에서 Stan-  
 isic<sup>8)</sup>의 가정에 따라 코리올리력과 원심력을 무시하여 결과를 구하였다. 하지만 Fig.(4-7)에서 코리올리력과 원심력을 고려하여주면 보의 거동이 확연히 달라짐을 알 수 있다. 각 그림에서 곡선 a는 상호작용력중 코리올리력과 원심력을 모두 무시한 경우의 보의 처짐을 나타내며 이는 Akin의 결과와 일치한다. 곡선 b는 코리올리력만을 곡선 c는 원심력만을 추가한 결과이고 곡선 d는 코리올리력과 원심력을 모두 추가하여 고려한 경우의 결과이다. Fig.4와 Fig.5를 보면 외팔보의 경우는 상호작용력중 코리올리력이 보의 동적거동에 지배적인 영향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나

이동물체의 속도가 커지면 원심력의 영향이 더욱 커지게 된다. 그러므로 이동물체에 의해 가진받는 보의 동적거동을 보다 정확하게 해석하기 위하여 보와 이동물체의 상호작용력에 코리올리력과 원심력을 모두 고려하여 문제를 다루어야 한다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 보의 동적거동을 구하기 위해 보의 지배방정식을 유연영향함수를 이용하여 적분형 미분방정식형태로 표현함으로써 보다 간결한 형태의 수치해석 알고리즘을 유도하여 문제를 다룰 수 있었다. 본 연구에서 제시한 진동해석기법의 정확성을 기존의 연구결과와 비교해 검증하였으며 이동물체에 의해 가진받는 구조물의 동적거동을 보다 정확히 구하기 위해서는 상호작용력중

코리올리력과 원심력을 모두 고려해야함을 알았다. 따라서 본 논문에서 제시한 수치해석 알고리즘은, 특히 고속으로 이동하는 이동질량에 의해 가진을 받는 보강이 모델링되는 여러가지 구조물의 초기 진동해석 및 설계과정에서 보다 엄밀한 해를 구하는데 효율적으로 사용할 수 있다.

### 감사의 글

본 연구는 1995년도 인하대학교 교내연구비 지원에 의하여 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

1. Ting, E.C., Genin, J., and Ginsberg, J.H., "A General Algorithm For Moving Mass Problems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.33, No.1, 1974, pp.49-58.
2. Akin, J.E. and Mofid, M., "Numerical Solution For Response of Beam with Moving Mass," *Journal of Structural Engineering*, Vol.115, No.1, 1989, pp.120-131.
3. Cifuentes, A.O., "Dynamic Response of A Beam Excited by a Moving Mass," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.5, 1989, pp. 49-58.
4. 이우식, 박철휘, 홍성철, "내부에 유체가 흐르는 파이프계의 동적안정성 및 응답해석," *대한기계학회논문집*, 제15권, 제6권, 1991, pp.1861-1871.
5. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibration*, MacMillan Company, New York, 1967.
6. Stanistic, M.M., "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving masses," *Ingenieur-Archiv*, Vol.55, 1985, pp.175-185.
7. Olsson, M., "On the Fundamental Moving Load Problem," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.142, No.2, 1991, pp.299-307.

(접수일자 : 1995. 2. 21)