경계요소법에 의한 대규모 3차원 지하구조물의 동적 해석

편집자 주 : 본 기사는 Earthquake Engineering and Structural Dynamics (1995sus vol.24 pp.917-934)에 게재된 A. A. Stamos와 D. E. Beskos의 "Dynamic Analysis of Large 3-D Underground Structures by the BEM"을 발췌 번역한 내용으로서 지하구조물의 동적거동해석에 대한 최근까지의 연구동향을 분석한 것입니다. 최근 국내에서 지하구조물의 건설이 급증하고 있고, 특히 지진 등에 대한 동적 거동의 해석이 중요시되고 있고 국내 설정에 비추어 내용은 참고가 될 것으로 사료되어 본 학회지에 번역하여 수록합니다.

1. 서 론

도로 또는 철도망을 개선 또는 확장하기 위한 터널, 각종 지하설비시스템(하수도, 상수도, 가스, 전기통신 관로), 고체 또는 유체연료의 저장을 위한 대규모 지하저장시설, 사람의 보호(핵대피소 등) 또는 민감한 장비의 보호를 위한 지하구조물, 지하발전소 등의 지하구조물은 현재 한 국가의 발전에 있어서 매우 중요한 역할을 한다. 이러한 구조물들은 외적 또는 내적으로 가해진 동적하중 또는 지진파의 작용에 대하여 안전하게 저항할 수 있어야 한다. 본고의 목적은 두 가지이다. 첫번째는 지하구조물의 동역학에 대하여 최근까지의 연구동향을 간략히 서술하고자 하는 것이며, 두번째는 대규모 3차원 지하구조물의 동적거동을 분석할 수 있는 일반적이며, 정확하고 효율적인 방법을 설명하고자 하는 것이다.

2. 지하구조물의 동적해석방법

지하구조물의 해석은 주변지반과의 상호작용에 따라 특히 동적 상태에 있어서 복잡하게 된다. 아마도 이것이 지상구조물의 경우와 비교하여 지하구조물의 동적거동에 대한 문헌이 많지 않은 이유일 것이다. 역사적으로 지하구조물의 동적해석 및 설계에 대한 최초의 연구는 지하 핵대피소에 대한 것이다.[1-3] 그러나, 터널과 관로와 같은 다른 종류의 지하구조물의 동적(특히 지진) 해석과 설계에 관심이 급속히 집중되게 되었다.[4-6] 이들 지하구조물은 일반적으로 지상구조물에 비하여는 비교적 지진에 대하여 영향을 적게 받는다. 일반적으로 지하구조물의 동적해석 방법은 다음과 같이 분류할 수 있다.

(1) 지반-구조의 상호작용을 무시한 유사 정적 방법(quasi-static method)

이 방법에서는 안전측의 가정으로서, 구조물이 충분히 유연하여 주변지반의 변형을 그대로 따른다고 가정한다. 따라서, 지반 지진변형의 진폭 및 파장의 최대값을 사용하여, 구조계의 최대변형률을 구하는 방법이다. 이 방법은 지하철 및 지하관로의 내진설계에 적용되었다.

(2) 지반-구조의 상호작용을 고려한 유사 정적 방법

이 방법은 유연한 지반 내의 강성을 가진 구조물에도 적용될 수 있으며, 탄성기초 상의 보 모형이 사용된다. 이 방법은 장대터널 및 지하관로에 대한 지진거동에 적용되었으며, Penzien 등[7]은 터널단면설계에 있어서 평면변형률 조건하에서의 유한요소법을 연구하였다.

(3) 실험을 통한 동역학적 방법

여러 연구자들에 의하여 실험적인 동역학적 방법이 연구되었다.

(4) 집중질량법을 이용한 동역학적 방법

이 방법은 집중질량, 스프링과 감쇠기로 지반을 모형화하고 불연속 혹은 연속적인 계로서 구조물을 모형화하는 방법이다. 불연속적인 구조의 모형화에 대한 연구는 Wieldinger와 Hinman[8] 및 다수의 연구자들에 의해 수행되었고 Manolis와 Beskos[9]는 연속적인 구조의 모형화를 동역학적으로 연구하였다.

(5) 이론적 동역학적 해석방법

이 방법은 무한 혹은 반무한 탄성영역내의 직선 원형인 터널이나 매설관에 대한 문제로 국한되어 적용되었다. 2차원과 3차원 문제에 대한 본 해석적 방법은 지진파에 대한 지하구조물의 거동을 이해하고 각종 수치적인 방법의 정확도를 평가하는데 매우 유용하다.

(6) 해석내부영역 이산화에 의한 수치적 해석방법

이는 해석되는 물체의 내부영역 이산화를 통한 수치적 해석방법으로서 이 방법에는 주파수영역과 시간영역에 대한 유한차분법과 유한요소법이 있다. 이들 방법들은 지하구조체의 2차원 및 3차원 문제에서 구조물과 지반을 모형화하는 데에 이용된다. 유한차분법과 관련된 연구는 Ang과 Newmark[10,11], Wilkins 등[12], Robinson[13]에 의하여 수행되었으며 유한요소법으로는 Farhoommand와 Wilson[14], Goto 등[15], Howard와 Ibanez[16], El-Tahan과 Reddy[17], Pelz[18], Hwang과 Lysmer[19], Gomez-Masso 등[20], Nelson과 Gong[21], Gomez-Masso와 Attala[22], Monsees와 Merrit[23], Chen 등[24], Savidis 등[25], Navarro[26] 등의 연구가 있다.

(7) 경계요소법에 의한 방법

대상구조체의 표면 이산화를 통한 선형문제의 수치해법으로 주파수영역 혹은 시간영역에서 지반과 구조물의 모형화에 이용된다. 지하구조물의 동적해석을 포함한 2차원 및 3차원 경계요소해석에 대한 연구는 Manolis와 Beskos[27], Kobayashi와 Nishmura[28,29], Kobayashi[30], Vardoulakis 등[31], Kitahara 등[32], Wang과 Banerjee[33], Von Estorff 등[34], Stamos와 Beskos[35], Luco와 de Barros[36,37], Stamos 등[38]에 의해 이루어졌다.

(8) Hybrid 요소를 이용한 수치해석 방법

이 방법은 구조물 혹은 구조물과 주변 지반영역(near field)을 유한요소법을 이용하여 해석하는 방법과 잔여 지반영역(far field)을 다른 수치해석 방법(유한차분법 혹은 주로 경계요소법)으로 해석하는 방법을 결합하는 것으로, 지하구조체의 동역학적 해석에는 유한요소법에 해석적-수치적 방법(Gupta 등[39]), 해석적 방법(Datta 등[40], Wong 등[41]) 또는 유한차분법(Chen과 Krauthammer[42,43]) 등을 결합하는 방법이 주로 사용된다. 시간영역에서는 일반적으로 유한요소법과 경계요소법을 조합하는 방법이 가장 많이 사용되고 평면변형률 조건하의 터널해석을 위한 Hybrid 요소의 사용은 Von Estorff와 Kausel[44], Antes[45] Von Estorff와 Antes[46], Von Estorff 등[34]에 의하여 증명되었다. Liu 등[47]은 3차원 조건하에서의 관로 및 터널의 해석에 대한 주파수영역에서 특수 유한요소-경계요소 조합기법을 사용하였다. 지하의 원통형 및 구형 Shell 구조에 대한 동적해석을 위하여 Underwood와 Geers[48,49], Mathews와 Geers[50]에 의해 유한요소법/특정 경계요소법 조합기법이 적용되어졌다.

상기 8가지 방법들의 부류중에 7가지는 지반-구조계의 상호작용에 있어서 중요한 현상들을 반영하고 있다. 그 중, 부류(2) 및 (4)는 통상 결정하기가 어렵고 주로 예비설계에 사용되는 스프링 및 감쇠기를 통한 근사 해법을 통해 지반구조의 상호작용을 설명하고 있는 반면 나머지 5가지의 부류들은

정확한 방법으로 동적거동현상을 다룬다. 이들 부류들 이외에 해석적 방법들은 매우 제한적인 적용성을 가지고 있으나 실험적인 방법은 상당한 이론적인 뒷받침에도 불구하고 비경제적이며 시간적으로 불리하다. 그러므로 수치적인 방법(부류항목(6)~(8))들만이 지하구조물을 포함한 지반구조의 상호작용문제를 실제적이고 동적으로 해석하는데 있어서 정확하고 경제적인 방법이다. 유한요소법 또는 유한차분법을 사용하여 무한 또는 반무한적인 지반매체를 해석하기 위해서는 경계조건으로 인위적인 경계들을 만들게 되며 이로 인해 매우 방대하고 비경제적인 요소망을 준비해야 하며 계산시간면에서도 비경제적인 무반사경계의 사용이 불가피하게 된다. 그러나 경계요소법은 오직 경계면에서만 이산화과정을 수행하게 되며 더욱 정확하고 무한경계에 대한 발산을 자동적으로 고려할 수 있게 된다.[51,52] 그러므로 지하구조물의 동적해석을 효과적이고 정확하게 수행하기 위해서는 구조물(들)이나 지반에 대해 경계요소법을 사용하거나 구조물 및 근접한 주변지반에 대해서는 유한요소법을 무한지반영역에 대하여는 경계요소법해석을 사용한다.

3. 경계요소법

본고에서는 대규모 지하구조물이 선형 탄성이거나 점탄성질의 거동을 하며 지반과 구조물의 접합면사이에 완전한 밀착이 되었다고 가정된 3차원적인 동적해석방법을 설명한다. 주파수영역의 경계요소법은 선형성때문에 구조물 및 지반에 사용된다. 유한요소-경계요소 조합기법이 사용되어지면 유한요소법 기법에서 존재하던 대칭성은 조합 후에 사라진다. 이는 경계요소를 구조물 및 지반에 동시에 적용한 경우와 마찬가지이다. 그러나 유한요소-경계요소 조합기법을 사용함으로서 발생되는 최종적인 비대칭 행렬의 크기는 경계요소법에 비해 더욱 크다. 구조물에 대하여 경계요소를 그리고 지반에 대하여도 경계요소를 적용하여 조합하므로서 유한요소-경계요소 조합기법보다 더 향상되어진 지반-구조물 접합조건이 형성된다. 재료적 비선형성이나 혹은 기하학적 비선형성이 존재하는 경우에는 유한요소-경계요소 조합기법이 더 좋은 결과를 보인다. 본고에서는 일반적인 3차원 지하구조물에 대하여 기존의 기법들보다 더욱 정확하고 효과적인 선형 동적해석의 수치해석법을 설명한다. 이 방법은 외력이나 지진파의 형태로 발생되는 동적교란이 일시적인 하중을 Laplace 변환하여 구해진 복소수형 하중 또는 조화하중으로 가해질 때는 실제 주파수 영역에서 수행되어진다. Laplace 변환 영역에서 해석이 수행된 경우 결과를 수치적으로 역변환함으로서 시간영역에서의 응답을 구하게 된다. 선형문제의 경우 주파수 영역의 경계요소법은, 시간영역의 경계요소법에 비해 더 많은 장점을 갖는다. 이는 정적형태의 지배방정식이 개념적인 프로그램상의 단순성을 유도하기 때문에 시간이력동안에 충족되는 인과관계의 필연성이 없으며, 점탄성 물질의 거동을 매우 쉽게 공식화할 수 있기 때문이다. 3차원 공간에 대한 동적기본해가 경계요소법에 적용되며 이 방법에서는 자유지반표면의 어느 한 부분뿐만 아니라 지하구조물의 내외면도 이산화되어져야 한다. 지반에 대응하는 경계요소영역과 구조물에 대응되는 경계요소영역을 조합하기 위해서는 두 영역의 접합면에서의 평형방정식과 적합방정식을 성립시켜야 한다. 2차 경계요소, 보다 발전된 적분기법, 효율적인 방정식해법, 모퉁이 및 모서리에 대한 간단하면서도 효율적인 작업, 대칭 및 비대칭성 고려, 정확한 수치적 라플라스 역변환의 기법 등은 보다 정확하고 효율적으로 동적거동을 해석할 수 있도록 해 준다.

4. 경계요소법의 공식화 및 그 해

그림 1은 탄성반무한 공간에서 임의의 동적외부하중 F_1이나 동적내부하중 F_3 또는 임의방향과 시간변분을 가지는 평면 지진파인 SH파, SV파, P파 그리고 Rayleigh파의 영향을 받는 임의의 3차원 형상의 탄성 지하구조물을 도시한 것이다. 그림 1에 도시된 지반-구조물계의 동적응답을 결정하기 위해서 지반영역과 구조물영역에 주파수 영역의 경계요소법을 적용하였으며, 각 영역에서의 결과가 지반과 구조물의 접합면에서의 평형방정

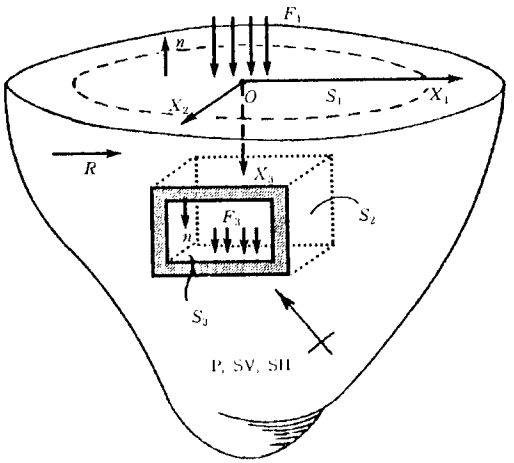

그림 1. 동적하중 및 지진파의 영향을 받는 3차원 지하구조물

식과 적합방정식을 함께 성립하도록 조합하였다.

물체력을 고려치 않으면 체적이 V, 경계표면이 S인 3차원 선형 탄성 등방균질체에 대한 운동방정식은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$(\lambda+\mu)u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} = \rho\ddot{u}_j \qquad (1)$$

여기서 $u_i=u_i(\mathbf{x}, t)$는 체적 V내의 한점 $\mathbf{x}$와 시간 t에서의 변위 벡터를 나타내며, λ와 μ는 Lame의 탄성계수를, ρ는 질량밀도, 콤마(,)와 dot(·)는 각각 공간과 시간에 대한 미분을 나타낸다. 지수 i와 j는 직교좌표축 x_1, x_2, x_3에 대응하는 수 1, 2, 3을 취하며, 반복지수는 누적을 뜻한다. 상기의 지배방정식은 다음의 초기 및 경계조건을 수반한다.

초기조건

$$u_i(\mathbf{x}, 0)=u_{0i},\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0)=u_{0i}\ ;\ \mathbf{x}\in V \qquad (2)$$

경계조건

$$u_i(\mathbf{x}, t)=u^*_i\ ;\ \mathbf{x}\in S_u$$
$$t_i(\mathbf{x}, t)=\sigma_{ij}n_j=t^*_i\ ;\ \mathbf{x}\in S_t \qquad (3)$$

여기서, $S_u \cup S_t = S$이고, t_i는 표면력벡터, σ_{ij}는 응력텐서, n_j는 S상에서의 단위외향법선벡터, u^*_i와 t^*_i는 기지변위와 기지표면력을 나타낸다. 단순화를 위해서 초기조건을 0하여 식 (1)~식 (3)에 시간에 대한 Laplace 변환을 적용하면, 다음과 같이 Laplace 변환된 복소수 주파수방정식이 구해진다.

$$(\lambda+\mu)\bar{u}_{i,ij}+\mu\bar{u}_{j,ii}=\rho s^2\bar{u}_j \qquad (4)$$
$$\bar{u}(\mathbf{x}, s)=\bar{u}^*_i\ ;\ \mathbf{x}\in S_u$$
$$\bar{t}_i(\mathbf{x}, s)=\bar{\sigma}_{ij}n_j=\bar{t}^*_i\ ;\ \mathbf{x}\in S_t \qquad (5)$$

여기서, overbar는 변환된 양, s는 복소수 Laplace 변환변수를 나타낸다.

상반원리를 이용하면 식 (4)의 적분형태 해를 식 (6)과 같이 얻을 수 있다.[12]

$$c_{ij}(\xi)\bar{u}_i(\xi, s)=\int_S[\bar{U}_{ij}\,\bar{t}(\mathbf{x}, s) - \bar{T}_{ij}\,\bar{u}_i(\mathbf{x}, s)]dS(\mathbf{x}) \qquad (6)$$

여기서, $\bar{U}_{ij}$는 3차원 전공간(full-space)에 대한 식 (4)의 기본해텐서, $\bar{T}_{ij}$는 Hooke의 법칙에 의해 $\bar{U}_{ij}$로부터 구해지는 표면력텐서이다. 또한 $\mathbf{x}\in S$이며 $\xi\in V$일 경우에 계수 $c_{ij}=\delta_{ij}$이고 $\xi\in S$일 경우에 계수 $c_{ij}=0.5\delta_{ij}$이다. ξ는 Kronecker's delta δ_{ij}에 포함되는 매끈한 점이다. 기본해 짝인 $\bar{U}_{ij}$와 $\bar{T}_{ij}$은 $r=|\mathbf{x}-\xi|$의 함수이고, 3차원에서 $\bar{U}_{ij}$ 및 $\bar{T}_{ij}$는 각각 $O(1/r)$ 또는 $O(1/r^2)$의 특이성을 나타낸다. Manolis와 Beskos[51]의 연구에서는 $\bar{U}_{ij}$와 $\bar{T}_{ij}$에 관한 명확한 수식을 기술하였다.

$\xi\in S$이며 $c_{ij}=0.5\delta_{ij}$인 경우에 대한 경계적분방정식, 식 (6)의 해는 경계요소법을 사용하여 수치적인 방법으로 구해진다. 표면 S를 유한개의 8절점 2차원 사각경계요소로 이산화하면 식 (6)을 행렬형식으로 변환한 식을 얻을 수 있다.

$$[\bar{U}]\{\bar{t}\}=[\bar{T}]\{\bar{u}\} \qquad (7)$$

여기서, $\{\bar{u}\}$와 $\{\bar{t}\}$는 각각 경계절점에서의 Laplace 변환된 변위와 표면력벡터, $[\bar{U}]$와 $[\bar{T}]$는 경계요소들의 기본짝해 요소들을 포함하는 적분에 포함되는 영향행렬들이다. 상기의 공식화된 경

계요소법은 표면력 또는 다중으로 연결되어 있는 대상물의 내력 문제에 적합하고 식 (6)과 식 (7)은 그림 1에 도시된 지반-구조물계의 구조물에 대하여 적용할 수 있다. 이 식들을 지반에 적용하기 위해서는 표면력만이 작용하는 경우에 한하여서 적용할 수 있다. 그러나, 지진파가 존재할 때에는, 지반에 대해서 상기의 공식화된 식을 단지 수정함으로서 적용할 수 있다.

그림 1에 도시되어진 것과 같이 지반-구조물계가 지진파에 지배를 받을 경우, 표면 S_1과 S_2에 의해서 둘러싸여 있는 지반체에 대한 경계적분방정식은 다음의 형태를 취한다.[53]

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)\bar{u}_i^s(\xi,s) &= \int_{S_2}[\bar{U}_{ij}\bar{t}_i(\mathbf{x},s)-\bar{T}_{ij}\bar{u}_i(\mathbf{x},s)]dS(\mathbf{x}) \\ &+\int_{S_1}[\bar{U}_{ij}\bar{t}_i^s(\mathbf{x},s)-\bar{T}_{ij}\bar{u}_i^s(\mathbf{x},s)]dS(\mathbf{x}) \\ &+A_{ij}\,\bar{u}_i^f(\xi) \end{aligned} \tag{8}$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \delta_{ij}-c_{ij} \quad \text{if} \quad \xi\in S_2 \\ A_{ij} &= 0 \quad \text{if} \quad \xi\in S_1 \end{aligned} \tag{9}$$

그리고 전체변위 $\bar{u}_i$와 표면력 $\bar{t}_i$은 각각의 분산된 항 $\bar{u}_i^s$, $\bar{t}_i^s$과 자유영역의 항 $\bar{u}_i^f$, $\bar{t}_i^f$에 대하여 식 (10)과 같은 관계가 있다.

$$\bar{u}_i=\bar{u}_i^s+\bar{u}_i^f,\ \bar{t}_i=\bar{t}_i^s+\bar{t}_i^f \tag{10}$$

자유영역 변위 $\bar{u}_i^f$는 주어진 지진파로부터 알 수 있는 항이며, 이변위들은 자유지반 표면 S_1에서의 입사파와 반사파의 합을 실제로 나타낸다. 조화시간변분하에서 SH파, SV파, P파 그리고 R파에 대한 변위들의 명시적 표현은 참고문헌[12]에서 찾을 수 있다. 이에 대응하는 $\bar{t}_i^f$는 Hooke의 법칙에 의해서 구할 수 있다. ξ가 지반내부의 한 점일 때, 식 (8)은 $A_{ij}=0$이고, $c_{ij}=\delta_{ij}$에 대하여 타당하다.

표면 S_2 전체와 그림 1에서 도시되어져 있는 바와 같이 고려되어지는 영역 주변의 표면 S_1 일부를 8절점 2차원 사각경계요소로 이산화하여 식 (10)에 적용하면 식 (8)은 다음의 행렬식의 형태로 나타내어 진다.

$$[\bar{U}^g]\{\bar{t}^g\}=[\bar{T}^g]\{\bar{u}^g\}+\{\bar{f}\} \tag{11}$$

여기서, 벡터 $\{\bar{f}\}$는 자유영역 운동과 연관있는 기지의 절점경계값을 포함하고 있고, 첨자 g는 지반을 표시하며, 변위와 표면력이 전체영역에 대응한다는 의미에서 나머지 행렬과 벡터들은 식 (7)의 것들과 유사하다.

그림 1을 고려해보면, 지반과 구조물에 대한 식 (11)과 식 (8)을 각각 다음과 같이 분리해서 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{11}^g & \bar{U}_{12}^g \\ \bar{U}_{21}^g & \bar{U}_{22}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_1^g \\ \bar{t}_2^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11}^g & \bar{T}_{12}^g \\ \bar{T}_{21}^g & \bar{T}_{22}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^g \\ \bar{u}_2^g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{22}^I & \bar{U}_{23}^I \\ \bar{U}_{32}^I & \bar{U}_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_2^I \\ \bar{t}_3^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{22}^I & \bar{T}_{23}^I \\ \bar{T}_{32}^I & \bar{T}_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2^I \\ \bar{u}_3^I \end{Bmatrix} \tag{13}$$

여기서 첨자 I는 선형을, 첨자 1, 2, 3은 자유지반 표면 S_1, 지반선형 접촉면 S_2, 내부표면 S_3을 각각 나타낸다. 지반선형 접촉면에서 평형조건과 적합조건, 식 (14)을 이용하여 식 (12)와 (13)을 조합하면, 식 (15)가 얻어진다.

$$\bar{t}_2^I=-\bar{t}_2^g,\ \bar{u}_2^I=\bar{u}_2^g \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{11}^g & \bar{U}_{12}^g & 0 \\ \bar{U}_{21}^g & \bar{U}_{22}^g & 0 \\ 0 & -\bar{U}_{22}^I & \bar{U}_{23}^I \\ 0 & -\bar{U}_{32}^I & \bar{U}_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_1^g \\ \bar{t}_2^g \\ \bar{t}_3^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11}^g & \bar{T}_{12}^g & 0 \\ \bar{T}_{21}^g & \bar{T}_{22}^g & 0 \\ 0 & \bar{T}_{22}^I & \bar{T}_{23}^I \\ 0 & \bar{T}_{32}^I & \bar{T}_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^g \\ \bar{u}_2^g \\ \bar{u}_3^I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

단지 지진파만이 존재할 경우에는 $\bar{t}^g_1=0$, $\bar{t}^l_3=0$인 경계조건을 이용하고 식 (15)를 정리하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{11}^g & \bar{T}_{12}^g & 0 & -\bar{U}_{12}^g \\ \bar{T}_{21}^g & \bar{T}_{22}^g & 0 & -\bar{U}_{22}^g \\ 0 & \bar{T}_{22}^l & \bar{T}_{23}^l & \bar{U}_{22}^l \\ 0 & \bar{T}_{32}^l & \bar{T}_{33}^l & \bar{U}_{32}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^g \\ \bar{u}_2^g \\ \bar{u}_3^l \\ \bar{t}_2^g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

식 (15)에 경계조건을 대입하면 식 (17)이 구해진다.

$$[\bar{A}]\{\bar{\psi}\}=\{\bar{b}\} \quad (17)$$

여기서 $\{\bar{\psi}\}$와 $\{\bar{b}\}$는 각각 미지와 기지의 벡터이고, $[\bar{A}]$는 전공간 비대칭 행렬이며 같은 문제에 대하여 이 행렬의 크기는 유한차분법과 유한요소법에서 상응하는 행렬과 비교해서 더 작다.

식 (17)을 풀면, 모든 경계에서의 변위와 표면력이 구해진다. $c_{ij}=\delta_{ij}$일 경우의 식 (6)과 $A_{ij}=0$와 $c_{ij}=\delta_{ij}$일 경우의 식 (8)을 사용하면 각각 구조물과 지반 내부에서의 변위들을 구할 수 있다. 응력은 이것들로부터 Hooke의 법칙을 사용하여 구한다. 변환된 영역에서 구해진 해를 수치적으로 역변환시킴으로서 시간영역에서의 응답을 구하게 된다. 주어진 하중 또는 지진파의 시간에 따른 변화가 복잡할 경우에는 그것들을 수치적인 Laplace 변환에 의해서 적용해야 한다.

동적교란이 시간에 따라서 조화함수로 변화할 경우 수치적인 역변환이 필요없기 때문에 실제 주파수 w 영역에서 문제를 해결하는 것이 더 편리하다. iw를 s로 간단하게 대치함으로서 한 영역에서 다른 영역으로 쉽게 변환시킬 수 있다. 여기서 $i=\sqrt{-1}$이다. 결론적으로 주파수(실제 또는 복소수) 영역에서의 문제에 대한 해는 λ와 μ를 복소수인 $\lambda(1+2i\beta)$와 $\mu(1+2i\beta)$로 각각 대치함으로서 점탄성 재료거동을 쉽게 다룰 수 있어야 한다. 여기서 β는 탄성감쇠계수이다.[51]

5. 계산과정에 관한 세부사항

앞절에서 유도된 방법을 기초로 하여, 대규모 3차원 지하구조물의 동적 해석을 위해 본 절에서는 정적분과 특이적분 계산, 모퉁이와 모서리 그리고 불연속 경계조건에 대한 처리방법, 다중영역의 고려, 대칭과 비대칭문제를 고려할 수 있는 가능성, 경계에 작용하는 응력뿐만 아니라 내부변위와 응력의 계산, 선형대수방정식계의 해와 Laplace 변환 및 역변환의 수치적 계산에 대해서 간단히 설명한다.

식 (6) 및 식 (8)의 경계적분을 8절점 2차 사변형경계요소를 사용하여 이산화함으로서 수치적으로 수행되어진다. 이들 적분은 기본해의 변위텐서 $\bar{U}_{ij}$ 혹은 표면력텐서 $\bar{T}_{ij}$와 형상함수를 곱한 형태의 적분요소를 포함한다. 이 적분은 만일 $r\neq0$일 경우에는 일반적인 계산으로 수행되지만 $r=0$일 경우에는 $\bar{U}_{ij}$에 대해서는 $O(1/r)$, $\bar{T}_{ij}$에 대해서는 $O(1/r^2)$의 특이거동으로 특이해를 가지게 된다. 일반적인 적분은 표준 Gauss-Legendre 수치적분법을 적용하여 수행된다. 특이적분은 삼각 극좌표계를 적용하여 계산하는데, 삼각극좌표는 Li et al.[54]의 연구에서 설명되어진 것처럼 평면사각형 위에 경계요소를 투영하여 특이차수를 1차수 감소시키는 장점을 가지고 있다. 따라서 $\bar{U}_{ij}$를 포함한 특이적분은 정상적으로 되고 수치적으로 계산되어지지만 $\bar{T}_{ij}$를 포함한 특이적분은 $O(1/r)$이 되며 강체거동 개념을 적용함으로서 계산되어진다. 0이 아닌 초기상태와 물체력을 고려할 경우에는 식 (6) 및 식 (8)이 체적적분의 형식으로 표현되어진다. 이 체적적분은 Li et al.[54]에 의해 연구되어진 수치적방법으로 계산될 수 있다.

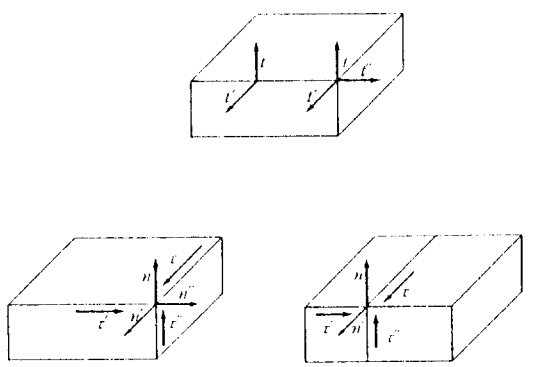

그림 2. 경계요소의 모퉁이와 모서리부에 작용하는 표면력 및 법선벡터와 접선벡터

대상체가 기하학적으로 모퉁이나 모서리를 포함하고 있을 경우에는 그림 2에서 나타낸 것과 같이 한 절점에서 두 개 또는 세 개의 표면력벡터를 갖는다. 변위벡터만 거기에 있다고 가정하면, 미지수는 각 절점당 각각 6개 또는 3개씩 유용한 방정식들의 수를 초과한다. 추가적으로 필요한 식들은 Alarcon, et al.[55]에 의해서 2차원 정적탄성문제에 적용되었던 접선미분과 Hooke의 법칙을 기반으로 적용한 방법으로 구할 수 있다. 3차원 문제에 대하여 그림 2(a)와 (b)를 참조해보면 모퉁이에서의 표면력-응력관계식, Hooke의 법칙 그리고 변형률-변위 관계식을 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\{t_i\} = [A]\{\sigma_{ij}\} \tag{18}$$

$$\{\sigma_{ij}\} = [E]\{\varepsilon_{ij}\} \tag{19}$$

$$\{\varepsilon_{ij}\} = [C]\{u_{i,j}\} \tag{20}$$

여기서 $\{t_i\}=\{t_1, t_2, t_3, t_1', t_2', t_3'\}^T$, $\{\sigma_{ij}\}=\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$이며, 행렬 [A], [E] 및 [C]에 대한 명확한 표현은 Stamos[56]의 논문에서 찾을 수 있다. 본 고에서는 식을 간단히 하기 위하여 Laplace 변환을 나타내는 overbar를 생략하였으며 직교좌표계를 표현하는 기호 i, j=1, 2, 3를 사용하였다. 식 (18)에서 식 (20)까지의 식들을 조합하여 식 (21)을 구할 수 있다.

$$\{t_i\} = [A][E][C]\{u_{i,j}\} \tag{21}$$

그림 2(b)의 모퉁이부분에 나타내어진 단위접선방향벡터를 τ_1, τ_1' 및 τ_1''로 정의함으로서 $\{u_{i,\tau}\}$는 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$\{u_{i,\tau}\} = [D]\{u_{i,j}\} \tag{22}$$

여기서 $\{u_{i,\tau}\}=\{u_{1,\tau}, u_{2,\tau}, u_{3,\tau}, u_{1,\tau}', u_{2,\tau}', u_{3,\tau}', u_{1,\tau}'', u_{2,\tau}'', u_{3,\tau}''\}^T$이며, 행렬 [D]는 Stamos[56]의 논문에서 찾을 수 있다. 따라서 식 (21)과 식 (22)를 사용하여 모퉁이에 작용하는 표면력은 다음식과 같이 법선방향변위의 미분항으로 표현되어질 수 있다.

$$\{t_i\}=[A][E][C][D]^{-1}\{u_{i,\tau}\} \tag{23}$$

여기서 $\{u_{i,\tau}\}$는 Stamos[56]의 연구에서와 같이 형상함수를 적절히 미분함으로서 모퉁이에 위치한 세개 경계요소의 절점변위항으로 계산되어진다. 따라서 식 (23)은 모퉁이에서 필요한 6개의 추가 방정식을 만든다.

그림 2(c)에 나타내어진 모서리의 경우에 대하여는 경계요소상에 존재하는 두개의 법선방향벡터(τ_1 및 τ_1')로 구성된 식 (23)으로부터 단지 3개의 방정식만을 사용할 수 있다. 불연속 표면력 경계조건의 경우는 같은 좌표에 대하여 서로 다른 절점을 정의하고 불연속점에서 서로 다른 표면력을 정의함으로서 간단히 계산되어진다.

다중영역에 대한 문제는 1개 이상의 지하구조물뿐만 아니라 반무한체의 상부에 토질층을 포함한 문제를 의미한다. 물론, 공식화중 무한체의 기본해를 사용하기 때문에 층의 경계에 대한 이산화과정은 필요하다. 특히, 지반에 미소량의 재료점성이 도입된다면, 층의 이산화 및 토질층의 자유면 이산화과정은 무시할만한 정도의 오차만을 발생시키고 수행되어진다[57]. 다상연결체에서의 모퉁이 또는 모서리의 경우는 단일체에 관하여 앞에서 설명되어진 방법과 같이 다루어진다. 이론적으로 추가적인 방정식들이 모퉁이 또는 모서리에 접근하는 어느 한 영역을 기초로 하여 유도되어질 수 있다.

대칭 및 비대칭 하중하에 있는 대칭체의 해석은 일반적인 해석에 비하여 계산시간 및 메모리용량이 감소된다. 여기서 해석방법은 경계요소법 수식화 및 기본해유도 과정에서 대칭 및 비대칭이 고려된 것이다. x_i축에 대해 직각인 면에 대한 대칭을 고려하는 경우에는 다음의 기본관계식을 사용한다.

$$\begin{aligned} &u_j = -u_j^{sm},\ t_j = -t_j^{sm} \quad \text{for } j=i \\ &u_j = u_j^{sm},\ t_j = t_j^{sm} \quad \text{for } j\neq i \end{aligned} \tag{24}$$

또한 비대칭의 경우에는 다음의 기본관계식을 사용한다.

$$u_j = u_j^{asm},\ t_j = t_j^{asm} \quad \text{for } j=i$$
$$u_j = -u_j^{asm},\ t_j = -t_j^{asm} \quad \text{for } j \neq i \qquad (25)$$

여기서 첨자 sm과 asm은 각각 대칭 및 비대칭을 나타낸다. 3차원의 경우에는 3개의 면에 대해 대칭인 문제 또는 대칭 및 비대칭문제가 조합된 문제가 존재한다. 본 방법론에서는 관계식 (24)와 (25)을 Stamos[56]의 연구에서 설명되어진 것과 같이 사용하였다.

경계상에서의 변위와 표면력이 일단 계산되어지면, $c_{ij}=\delta_{ij}$ 조건으로 이산화되어진 식 (6)과 $c_{ij}=\delta_{ij}$과 $A_{ij}=0$인 조건으로 이산화되어진 식 (8)을 사용하여 구조물과 지반내의 변위를 계산하는 것이 가능하게 된다. 구조물과 지반의 내부응력은 Hooke's 법칙과 미분방정식 (6)과 (8)로부터 구해지는 변위의 변화량(gradients)를 기초로 하여 구해진 이산화방정식으로 부터 구해진다. 이 응력적분표현은 기본해텐서 $\bar{U}_{ij}$와 $\bar{T}_{ij}$의 공간미분항을 포함한다. 기본해텐서 $\bar{U}_{ij}$와 $\bar{T}_{ij}$는 Ahmad의 연구[58]에서 명확한 형태로 언급되어 있다. 경계점에서의 응력은 전형적인 방법으로 계산되어지는데 이 전형적인 방법은 표면력－응력 관계식, Hooke's 법칙 그리고 고려하는 점을 포함하는 요소의 절점변위로 나타내어지는 변위미분항에 대한 표현을 조합한 것이다.

일시적인 동적 교란이 작용할 때, Laplace 변환이 초기조건을 쉽게 고려할 수 있고, 가상의 고유진동주파수문제를 제거하기 때문에 Fourier 변환보다 사용하는데 유리하다. 왜냐하면 그것은 복소수 주파수영역에서 수행되기 때문이다. 조화진동문제를 다루는 중 실수 주파수 영역에서 가상의 고유진동주파수영향을 피하는 실제적인 방법은 미소의 점탄성 감쇄를 도입하는 것이다. 이 알고리즘의 높은 정확성은 여러 논문에서 검증되어 있으며 이 알고리즘의 유일한 단점은 역변환을 할 때 계산시간을 증가시키는 복잡한 입력자료를 사용해야 한다는 것이다. 실제로 식 (17)은 변수 s의 연속적인 값으로 계산되어져야 하며 그 응답은 연속적인 시간 t의 이산화된 형식으로 구해져야 한다.

6. 결　　론

3차원 대규모 지하구조물의 동적응답을 결정하기 위한 일반적인 수치해석이 제안되었다. 지반과 구조물을 해석하기 위하여 Laplace 변환을 적용한 경계요소법을 설명하였고, 지반－구조물계에 작용하는 외부 동적하중과 지진파를 고려할 수 있도록 공식화하였다. 동적교란이 전파되는 경우에 시간영역의 응답을 얻기 위하여는 구해진 변환된 해를 수치적인 Laplace 역변환을 수행하여야 하지만 동적교란이 조화적인 경우에는 응답이 주파수 영역으로 부터 직접 얻어지며, 역변환이 필요하지 않다. 이 방법의 특징은 높은 정확도와 효율성이며, 지반－구조물계에 대하여 초기조건 및 점탄성 재료의 거동을 쉽게 고려할 수 있다는 것이다. 그러므로 이 방법은 다양한 지하구조물의 동적거동과 지진에 대한 취약함을 연구하기 위한 적절한 도구로 사용되어 질 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Baron, M. L., Bleich, H. H., and Weidlinger, P., *Theoretical Studies on the Ground Shock Phenomena,* Report No. SR-19, The MITRE Corporation, 1960.

[2] ASCE Maunal, *Design of Structures to Resist Nuclear Weapons Effects,* Manual of Engineering Practice No. 42, ASCE, New York, 1961.

[3] Biggs, J. M., *Introduction to Structural Dynamics,* McGraw-Hill, New York, 1964.

[4] Kuesel, T. R., "Earthquake Design Criteria for Subways," *J. Struct. Div., ASCE,* Vol.95, 1969, pp.1213-1231.

[5] Newmark, N. M., "Earthquake Response Analysis of Reactor Structures," *Proc. 1st Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology,* Berlin, 1971.

[6] Okamoto, S. and Tamura, C., "Behaviour of Subaqueous Tunnels during Earthquakes," *Earthquake Eng. Struct. Dyn., I, 1973,* pp. 253-266.

[7] Penzien, J., Lee, Y. J., and Jean, W. Y., "Seismic Analysis of Rectangular Tunnels in

Soft Ground," *Proc. 10th World Conf. on Earthquake Eng.*, Madrid, A. A., Balkema, Rotterdam, 1992, pp.1619-1624.

[8] Weidilinger, P. and Hinman, E., "Analysis of Underground Protective Structures," *J. Struct. Eng. Mech.*, ASCE. Vol.114, 1988, pp. 1658-1673.

[9] Manolis, G. D. and Beskos, D. E., "Dynamic Response of Framed Underground Structures," *Comput. Struct.* Vol.15, 1982, pp.521-531.

[10] Ang, A. H. S. and Newmark, N. M., *Computation of Underground Structural Response*, DASA Report No. 1336, University of Illinois, Urbana, 1963.

[11] Ang, A. H. S. and Newmark, N. M., *Development of a Transmitting Boundary for Numerical Wave Motion Calculations*, DASA Report No. 2631, University of Illinois, Urbana, 1971.

[12] Wilkins, M. L. et al., *A Method for Computer Simulation of Problems in Soild Mechanics and Gas Dynamics in Three-Dimensions and Time*, Report UCRL-51574, Lawrence Livermor Laboratory, University of California, Pasadena, 1974.

[13] Robinson, A. R., "The Transmitting Boundary-Again," *Structural and Geotechnical Mechanics*, Hall, W. J.(ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970, pp.163-177.

[14] Farhommand, I. and Wilson, E. L., *Nonlinear Finite Element Code for Analyzing the Blast Response of Underground Structures*, Report No. DACA 365-67-0020, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, 1970.

[15] Goto, Y., Ota, J., and Sato, T., "On the Earthquake Response of Submerged Tunnels," *Proc. 5th World Conf. on Earthquake Eng.*, Rome, Italy, Paper No.63, 1973.

[16] Howard, G. E. and Ibanez, P., "Analytical and Experimental Investigation of the Dynamic Response of Underground Nuclear Power Plants," *Trans. 5th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Jaeger, T. A. and Boley, B. A.(eds), North-Holland, Amsterdam, K 7/5, 1979, pp.1-8.

[17] El-Tahan, H. and Reddy, D. V., "Seismic Response of the Cut-and-Cover Type Reactor Containments Considering Nonlinear Soil Behaviour," *Trans. 5th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Jaeger, T. A. and Boley, B. A.(eds), Berlin, 1979, pp. 11-9.

[18] Peiz, R., "A Finite Element Study on Earth Covered Structures Subjected to Impact Loading," *Soils Under Cyclic and Transient Loading*, Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C (eds.), A.A. Balkema, Rotterdam, 1980, 673-680.

[19] Hwang, R. N. and Lysmer, J., "Response of Buried Structures to Travelling Waves," *J. Geotech. Eng. Div.*, ASCE Vol.107, 1981, pp. 183-200.

[20] Gomez-Masso, A., Lysmer, J., Chen, J. C., and Seed, H. B., "Soil-Structure Interaction with Rayleigh Waves," *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 11, 1983, pp.567-583.

[21] Nelson, I. and Gong, C., "Dynamic Response of Buried Concrete Arch to Blast Loading," *Recent Advances in Engineering Mechanics and Their Impact on Civil Engineering Practice*, Chen, W. F. and Lewis, A.D.M(eds.), ASCE, New York, 1983, pp.989-992.

[22] Gomez-Masso, A. and Attala, I., "Finite Element versus Simplified Methods in the Seismic Analysis of Underground Structures," *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 12, 1984, pp.347-367.

[23] Monsees, J. E. and Merit, J. L., "Seismic Modelling and Design of Underground Structures", in G. Swoboda(ed.), *Numerical Methods in Geomechanics-Innsbruck 1988*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1988, pp.1833-1842.

[24] Chen, H. L., Shah, S. P., and Keer, L. M., "Dynamic Response of Shallow-Buried Cylindrical Structures," *J. Eng. Mech.*, ASCE, 116, 1990, pp.152-171.

[25] Savidis, S. A., Ulrich, M., and Klapperich, H., "Seismic Loading of Undergrond Structures," *Structural Dynamics and Soil-Structure Interaction*, Cakmak, A. S., and Herrear, I. (eds.), Computational Mechanics Publica-

tions, Southampton, 1989, pp.403-413.

[26] Navarro, C., "Effect of Adjoining Structures on Seismic Response of Tunnels," *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 16, 1992, pp. 979-814.

[27] Manolis, G. D. and Beskos, D. E., "Dynamic Response of Lined Tunnel by an Isoparametric Boundary Element Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 36, 1983, pp. 291-307.

[28] Kobayashi, S. and Nishimura, N., "Transient Stress Analysis of Tunnels and Caverns of Arbitrary Shape due to Tavelling Waves," *Developments in Boundary Element Methods-2*, Applied Science, London, 1982, pp.177-210.

[29] Kobayashi, S. and Nishimura, N., "Analysis of Soil-Structure Interaction by Boundary Integral Equation Method," *Numerical Methods in Engineering*, Lascaux, P.(ed.), Pluralis, Paris, 1983, pp.353-362.

[30] Kobayashi, S., "Applications of Boudary Integrals Equation Method to Geomechanics," *Numerical Methods in Geomechanics-Nagoya 1985*, Kawamoto, T. and Ichiakwa, Y. (eds.), A. A. Balkema, Rotterdam, 1985, 83-92.

[31] Vardoulakis, I. G., Beskos, D. E., Leung, K. L., Dasugpta, B., and Sterling, R. L., "Computation of Vibration Levels in Underground Space," *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstrs.*, 24, 1987, pp.291-298.

[32] Kitahara, M., Ando, T., and Muranishi, Y., "On the Effect of Viscosity for the Dynamic Strain of Underground Structures," *Theory and Applications of Boundary Element Methods*, Tanaka, M. and Du, Q. H.(eds.), Pergamon Press, Oxford, 1987, pp.75-84.

[33] Wang, H. C. and Banerjee, P. K., "Axisymmetric Transient Elastodynamic Analysis by Boundary Element Method," *Int. J. Solids Struct.* 26, 1990, pp.401-415.

[34] Von Estroff, O., Stamos, A. A., Beskos, D. E., and Antes, H., "Dynamic Interaction Effects in Underground Traffic Systems," *Eng. Anal. Bound. Elem.* 8, 1991, pp.167-175.

[35] Stamos, A. A. and Beskos, D. E., "Dynamic Soil-Structure Interaction in 3-D Underground Structures," *Boundary Elements* XIV, Vol. 2, Brebbia, C. A., Dominguez, J., and Paris, F.(eds), Elsevier Applied Science, London, 1992, pp.169-178.

[36] Luco, J. E., and de Barros, F. C. P., "On the Three-Dimensional Seismic Response of a Class of Cylindrical Inclusions Embedded in Layered Media," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* VI, Cakmak, A. S. and Brebbia, C. A.(eds), Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, pp. 565-580.

[37] Luco, J. E., and de Barros, F. C. P., "Seismic Response of a Cylindrical Shell Embedded in a Layered Viscoelastic Half- Space. I : Formulation ; II : Validation and Numerical Results," *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 23, 1994, pp.553-580.

[38] Stamos, A. A., Von Estorff, O., Antes, H., and Beskos, D. E., "Vibration Isolation in Road-Tunnel Traffic Systems," *Int. J. Eng. Anal. Des.*, 1, 1994, pp.111-121.

[39] Gupta, S., Penzien, J., Lin, T., and Yeh, C., "Three-Dimensional Hybrid Modelling of Soil-Structure Interaction," *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 10, 1982, pp.68-89.

[40] Datta, S. K., Shah, A. H., and Wong, K. C., "Dynamic Stresses and Displacements in Buried Pipe," *J. Eng. Mech.* ASCE, 110, 1984, pp.1451-1466.

[41] Wong, K. C., Shah, A. H., and Data, S. K., "Dynamics Stresses and Displacements in a Buried Tunnel," *J. Eng. Mech.* ASCE, 111, 1985, pp.218-234.

[42] Chen, Y. and Krauthammer, T., "A Combined ADINA-Finite Difference Approach with Substructuring for Solving Seismically Induced Nonlinear Soil-Structure Interaction Problems," *Comput. Struct.*, 32, 1989, 779-785.

[43] Chen, Y. and Krauthammer, T., "Seismic Effects on Large Reinforced Concrete Lifelines- I : Theory : II : Implementation," *Comput. Struct.*, 42, 1992, pp.129-135.

[44] Von Estorff, O. and Kausel, E., "Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-Structure Interaction," *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 18, 1989, pp.1065-1075.

[45] Antes, H., "Dynamic Interaction Analysis in Wave Propagation Problems by a Time-Dependent Boundary Element Method," *Discretization Methods in Sructural Mechanics*, Kuhn, G. and Mang, H.(ed.), Springer, Berlin, 1990, pp.105-114.

[46] Von Estorff, O. and Antes, H., "Dynamic Response of Tunnel Structures," *Structural Dynamics*, Kratzig, W. B., et al.(eds.), A. A. Balkema, Rotterdam, 1991, pp.803-810.

[47] Liu, S. W., Data, S. K., Khair, K. R., and Shah, A. H., "Three-Dimensional Dynamics of Pipelines Buried in Backfilled Trenches due to Oblique Incidence of Body Waves," *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 10, 1991, pp. 182-191.

[48] Underwood, P. and Geers, T. L., "Doubly Asymptotic Boundary Element analysis of Dynamic Soil-Structre Interaction," *Int. J. Solids Struc.*, 17, 1981, pp.687-697.

[49] Underwood, P. and Geers, T. L., "Doubly Asymptotic Boundary Element Analysis of Nonlinear Soil Structure Interaction," *Innovative Numerical Analysis for the Applied Engineering Sciences*, Shaw, R. P. et al.(eds), University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1980, pp.413-422.

[50] Mathews, I. C. and Geers, T. L., "A Doubly Asymptotic Nonreflecting Boundary for Ground-Shock Analysis," *J. Appl. Mech.* ASME, 54, 1987, pp.489-497.

[51] Manolis, G. D. and Beskos, D. E., *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Unwin-Hyman, London, 1988.

[52] Beskos, D. E., "Wave Propagation through Ground," *Boundary Element Techniques in Geomechanics*, Manolis, G. D. and Davies, T. G.(eds.), Elsevier Applied Science, London, 1993, pp.259-406.

[53] Niwa, Y., Hirose, S., and Kitahara, M., "Application of the Boundary Integral Equation(BIE) Method to Transient Response Analysis of Inclusions in a Half-Space," *Wave Motion*, 8, 1986, pp.77-91.

[54] Li, H. B., Han, G. M., and Mang, H. A., "A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct Boundary Element Method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21, 1985, pp.2071-2098.

[55] Alarcon, E., Martin, A., and Paris, F., "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory," *Comput. Struct.*, 10, 1979, 341-362.

[56] Stamos, A. A., *Dynamic Response of Underground Structures*, Ph.D. Thesis University of Patras, Patras, Greece, 1994.

[57] Dominguez, J. and Meise, T., "On the Use of the BEM for Wave Propagation in Infinite Domains," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 8, 1991, pp.132-138.

[58] Ahmad, S., *Linear and Nonlinear Dynamic Analysis by Boundary Element Method*, Ph.D. Thesis, State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York, 1986.

[59] Durbin, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms : an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method," *Comput. J.*, 17, 1974, pp.371-376.

[60] Narayanan, G. V. and Beskos, D. E., "Numerical Operational Methods for Time-Dependent Linear Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18, 1982, pp.1829-1854.

[61] Bathe, K. J., Wilson, E. L., and Peterson, *SAP Ⅳ, a Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*, Report No EERC 73-11, University of California, Berkeley, 1973.

[62] Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, Amsterdam, 1973.