

# 선형 변단면 보요소의 강도행렬 Stiffness matrices for linearly tapered beam elements

최 외 호\*  
Choi, We-Ho  
민 경 주\*  
Min, Kyung-Joo  
이 승 우\*  
Lee, Seung-Woo

## 요 약

선형 변단면 부재의 삼차원 공간에서의 해석을 위하여 강도행렬을 유도하였다. 변단면 부재의 구조물을 해석하기 위하여 본 연구에서 유도된 강도행렬을 사용하여 구한 결과와 분할부재를 균일단면 탑 형태로 표현하여 ANSYS에서 구한 결과를 비교하여 본 연구의 결과 효율성 및 정확성이 증진된 것을 확인하였다. 본 연구에서 유도된 강도행렬은 변단면 부재와 균일단면 부재의 해석에 사용할 수 있다.

## Abstract

For the three dimensional analysis of linearly tapered members, the stiffness matrices are derived. Significant improvements of accuracy and efficiency of the analysis are achieved by using the stiffness matrices developed in this study. Results of these analysis are compared with those based upon stepped representation of beam elements in the ANSYS. The stiffness matrices presented in this study can be used for the analysis of tapered and prismatic members.

## 1. 서 론

현대의 각종 구조물들은 공학 이론의 발달과 설계방법 및 시공기술의 발전으로 구조의 최적화가 실현되고 있다. 자중의 경량화, 효율적인 구조체계, 재료의 효율적이고 경제적인 이용 및 미적인 요인을 고려하여 변단면 부재가 자주 이용되고 있다.

변단면 부재는 단면의 성질이 부재의 축방향에 따라 변화되므로 균일단면의 부재보다 해석이 복잡하게 되어 단순한 기하학적 형태, 특수한 몇개의 단면 및 구조형상에 대하여만 해석이 가능하였다.<sup>1)</sup>

일반적인 단부조건, 복잡한 하중과 일반적인 구조물, 고차원의 영향에 대한 해석은 전산기의 발달과 더불어 유한차분법, 유한요소법 등의 수치해

\* 단국대학교 토목공학과 교수  
\*\* 세명대학교 토목공학과 전임강사  
\*\*\* (주)유신설계공단 건설기술연구소 부장

이 논문에 대한 토론을 1995년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

석방법에 의해 비로소 가능하게 되었다. 변단면 부재를 ANSYS나 SAP과 같은 범용구조해석 프로그램에서는 계단형태의 연속한 균일단면 부재로 취급하여 해석하거나 특정 단면에 대한 변단면 부재의 강도행렬을 유도하여 구조해석을 수행하여 왔다. 그러나 이 방법은 계산의 정확도를 높이기 위하여는 부재를 많은 수로 분할하여야 하므로 일관성 있는 해석 결과를 얻기가 어려웠다.

Lee는 다양한 단면의 선형 변단면 부재에 대하여 모멘트 면적법을 이용하여 삼차원 강도행렬과 정확한 형상함수를 구하였고 선형 강도행렬과 기하학적 강도행렬을 유도하여 좌굴해석을 수행하였다.<sup>2)</sup> Kayum은 변단면 부재의 단면이차모멘트를 간단한 형태로 가정하여 형상함수들을 비교하고 이를 근거로 선형 강도행렬을 유도하였다.<sup>3)</sup> Gupta는 정확한 형상함수들을 이용하여 다양한 단면형상에 대하여 보요소의 질량행렬을 유도하여 횡방향 자유진동해석을 하였다.<sup>4)</sup>

이러한 방법들은 개개의 단면 형상에 대해서는 만족할 만한 결과를 주고 있으나 단면의 형상에 따라 서로 상이한 강도행렬을 요구하게 되므로 계산이 복잡하고 새로운 형상의 부재를 해석하고자 할 때마다 각각의 해당 단면에 대한 강도행렬을 사용하여야 한다는 어려움이 있다. 이러한 문제점들은 변단면부재의 통일된 강도행렬을 사용함으로써 해결할 수 있을 것이다. 선형 변단면 부재로 이루어진 구조물의 해석을 보다 정확하고 효율적으로 하기 위하여 필요한 강도행렬을 유도하는 데 본 논문의 목적을 두고 있다. 강도행렬은 조직적이고 체계적인 방법을 통하여 유도하였으며 해석상의 보편성을 위하여 유도과정을 무차원화 하였다. 변단면부재를 연속한 계단형태의 균일단면요소로 보아 단면상수를 보간하여 해석하는 ANSYS에 의하여 계산된 결과와 본 연구에서 유도된 강도행렬을 사용하여 구한 결과를 비교 검토하였다.

## 2. 변단면의 성질

### 2.1 변단면의 단면적

선형 변단면 부재의 초단과 말단의 높이의 비를

상대경사라 하고 이를  $\alpha$ 라 한다. 또한, 폭에 대한 상대경사를  $\alpha'$ 라 하면  $\alpha$ 와  $\alpha'$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha = \frac{d_f - d_i}{d_i} \quad (2.1a)$$

$$\alpha' = \frac{b_f - b_i}{b_i} \quad (2.1b)$$

여기서,  $d_i, d_f$ =초단과 말단의 높이

$b_i, b_f$ =초단과 말단의 폭

선형 변단면 부재의 단면적은 다음과 같이 일반식으로 표현할 수 있다.

$$A_x = A_i(1 + \alpha\xi)^n(1 + \beta\xi) \quad (2.2)$$

여기서,  $A_i$ =초단의 단면적

$\xi = x/L$

$$k = \frac{\ln(A_f/A_i)}{\ln(d_f/d_i)}$$

$n=k$ 의 정수부

$$\beta = (1 + \alpha)^{(k-n)} - 1$$

직사각형, 원형관, I형 단면, 상자형 단면 등 변단면으로 자주 사용되는 단면에 대한  $n$  및  $\beta$ 값은 단면들의 특성을 고려하여 식(2.2)로부터 얻은 결과가 표 1에 있으며 이들  $n$  및  $\beta$ 의 값으로 표현되는 변단면 부재에 대한 단면적은 정확한 값이다.

표 1. 변단면 면적에 대한 계수들

No.	단면	단면적		단면2차모멘트		비틀상수	
		n	$\beta$	n	$\beta$	n	$\beta$
1	직4각형 <sup>1)</sup>	0	$\alpha'$	0	$\alpha'$	1	$\beta^*$
2	직4각형 <sup>2)</sup>	1	0	3	0	1	$\beta^*$
3	직4각형 <sup>3)</sup>	1	$\alpha'$	3	$\alpha'$	1	$\beta^*$
4	원형관	1	0	3	0	3	0
5	중실원	2	0	4	0	4	0
6	I - 형	0	$\alpha'$	2	$\beta^*$	0	$\beta$
7	Box - 형	0	$\alpha'$	2	$\beta^*$	1	$\beta^*$

주 1) 폭만 변하는 단면

2) 높이만 변하는 단면

3) 폭과 높이가 모두 변하는 직4각형단면

\* ) 근사값

2.2 변단면의 단면이차모멘트

선형 변단면 부재의 단면이차모멘트를 표현하는 데에는 앞의 단면적의 표현 방법과 유사하게 일반식으로 표현할 수 있다. 즉 선형 변단면 부재의 단면이차모멘트  $I_x$ 는,

$$I_x = I_i(1 + \alpha\xi)^n(1 + \beta\xi) \quad (2.3)$$

여기서,  $I_i$ =초단의 단면이차모멘트

$$k = \frac{\ln(I_f/I_i)}{\ln(d_f/d_i)}$$

$n=k$ 의 정수부

$$\beta = (1 + \alpha)^{(k-n)} - 1$$

직사각형, 원형관 등의 단면이차모멘트식은 정확한 식이고, I형 단면, 상자형 단면 등의 단면이차모멘트에 사용되는  $\beta$  값은 근사값으로 이들은 근사식이 된다. 이들 식에 대한 오차율의 고찰하기 위하여 문헌들<sup>(2,5,6)</sup>과 비교한 결과가 표 2에 나타나 있다. 단면은  $b_f=15in$ ,  $t_f=0.625in$ ,  $t_w=0$ .

표 2. I형 단면의 단면이차모멘트

$\alpha$	$\xi$	정확값	분방법 <sup>1)</sup>	Error	Lee <sup>2)</sup>	Error	Gere <sup>3)</sup>	Error	Lee <sup>4)</sup>	Error
-0.5	0.00	852.5	852.5	0.000	852.5	0.000	852.5	0.000	854.1	0.184
	0.25	628.9	629.0	0.020	633.3	0.697	628.8	-0.020	630.0	0.176
	0.50	444.6	444.7	0.033	449.3	1.064	444.4	-0.050	445.3	0.163
	0.75	296.7	296.8	0.032	299.4	0.928	296.4	-0.098	297.1	0.141
	1.00	182.2	182.2	0.000	182.2	0.000	181.9	-0.181	182.4	0.099
2.0	0.00	852.5	852.5	0.000	852.5	0.000	852.5	0.000	854.1	0.184
	0.25	1429.3	1429.5	0.010	1446.8	1.220	1429.7	0.024	1432.1	0.193
	0.50	2198.6	2198.8	0.010	2228.9	1.379	2199.4	0.036	2202.9	0.198
	0.75	3183.6	3183.8	0.006	3212.0	0.891	3185.0	0.043	3190.0	0.201
	1.00	4407.9	4407.9	0.000	4407.9	0.000	4410.0	0.047	4416.8	0.202

주. Error = (근사값-정확값) / 정확값 × 100(%)

- 1)  $I_x = I_o(1 + \alpha\xi)^2(1 + \beta\xi)$
- 2)  $I_x = I_o(1 + \alpha\xi)^n$ , 문헌 [6]
- 3)  $I_x = I_o(1 + \alpha\xi)^2(1 + \mu'\alpha\xi)$ , 문헌 [5]
- 4)  $I_x = I_o(1 + \alpha\xi)^2 [(1 + \alpha\xi)^2 + A(1 + \alpha\xi) + B]$ , 문헌 [2]

여기서,  $\mu' = d_o^3 t_w / (12I_o)$      $A = 3(t_f / d_o) / (2b_f / t_w - 1)$   
 $B = 3(t_f / d_o)^3$

$$I_w = d_o^3 t_w (1 + \mu)$$

$\alpha > 0$  일때

$$\mu = AB / [9(1 + \alpha)\{(1 + \alpha)^2 + A(1 + \alpha) + B\}]$$

$-1 < \alpha \leq 0$  일때

$$\mu = AB / [9(1 + A + B)]$$

375in,  $d_i=20in$ 이고,  $d_f=10in(\alpha=0.5)$  및  $d_f=40in(\alpha=2.0)$ 이다. 상대경사가 '0'이고 면적이나 단면이차모멘트가 변하는 경우에는 상대 경사를 단면의 높이 대신 단면적의 비를 사용한다. 즉, 이 경우에는 단면의 높이가 변하는 선형 변단면 부재가 아니고 폭이 변하는 선형 변단면으로 간주한다.

이들의 결과를 비교하여 보면 대체로 큰 오차를 나타내지 않으며 본 연구에서 유도한 근사식이 가장 오차가 적음을 알 수 있다. 표 2의 주3)의 근사식도 오차가 적으며 본 근사식과 유사한 형태임을 알 수 있다. 그러나, 상대경사가 높을 때에는 많은 오차가 발생함을 알 수 있었으며, 특히 본 연구에서 유도한 근사식 외의 다른 식들은 높이가 불변이고 폭이 변하는 경우의 표현은 불가능하다. 주 2)의 근사식은 다른 단면에도 유용하게 사용할 수 있으나 오차가 많음을 알 수 있다. 상자형 단면도 위의 I형 단면의 고찰과 유사하였다.

2.3 변단면의 비틀상수

선형 변단면 부재의 비틀상수  $J_x$  또한 단면적의 표현 방법과 유사하게 일반식으로 표현할 수 있다. 즉, 선형 변단면 부재의 비틀상수  $J_x$ 는 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$J_x = J_i(1 + \alpha\xi)^n(1 + \beta\xi) \quad (2.4)$$

여기서,  $J_i$ =초단의 비틀상수

$$k = \frac{\ln(J_f/J_i)}{\ln(d_f/d_i)}$$

$n=k$ 의 정수부

$$\beta = (1 + \alpha)^{(k-n)} - 1$$

원형관, 중실원 및 I형 단면의 비틀상수식은 정확한 식이고, 직사각형 단면, 상자형 단면 등의 비틀상수에 사용되는  $\beta$  값은 근사값으로 이들은 근사식이 되며 이들의 결과는 단면이차모멘트에서 고찰한 바와 유사하였다. 그러나 직사각형 단면의 경우 상대경사에 따라 다른 단면에 비하여 상대적으로 많은 오차를 보이며, 이는 그만큼 해석에도 영향을 미칠 것이다. 다음 표 3은 직사각형 보에

대한 비틀상수의 오차에 관한 결과를 수록한 것이다.

표 3. 직4각형 단면의 비틀상수

x/L	α = -0.5			α = 1.0		
	Jx	Lee	본연구	Jx	Lee	본연구
0.0	370464.7	0.1332	0.0000	370464.7	0.1332	0.0000
0.2	317015.0	-0.1179	-2.3237	478013.1	1.1970	-1.8371
0.4	264041.7	-0.1276	-4.0299	584884.4	2.7568	-2.1961
0.6	211949.5	0.0942	-4.7478	693847.8	4.6137	-1.8078
0.8	161467.9	0.3138	-3.8212	801837.4	6.6560	-1.0166
1.0	113867.7	-0.6031	0.0000	909834.4	8.8197	0.0000

주) Jx : 문헌 [1]

Lee : 문헌 [2]의 근사식의 오차율(%)

본연구 : 근사식(2.4)의 오차율(%)

### 3. 강도행렬의 유도

앞에서 유도된 변단면의 단면 특성을 나타내는 식들을 이용하여 선형 변단면 부재의 강도행렬을 유도하면, 지금까지 각각의 변단면들에 대하여 유도되거나 복잡하게 표현되었던 선형강도행렬을 통일되게 균일단면 부재의 선형강도행렬과 같은 형태로 나타낼 수 있다. 선형강도행렬의 유도는 단면 특성들 즉 단면적, 단면이차모멘트 및 비틀상수 등이 앞장에서와 같이 각각 한개의 식으로 통합되면 문헌[2]와 같은 방법으로 유도될 수 있다. 여기서 그 유도과정을 간략히 소개하고자 한다.

삼차원 공간에서 선형 변단면 부재는 그림 1에서 보여주는 바와 같이 12개의 자유도를 갖는 것으로 가정한다. 축력과 비틀에 대한 강도행렬요소는 변위에 대한 미분방정식으로 부터 같은 방법으

로 유도되며, 휨강도 행렬요소는 모멘트면적법 제 1정리와 제2정리로 부터 얻어지는 2개의 연립방정식의 해에 의하여 유도된다.

#### 3.1 축하중에 대한 선형강도행렬

변단면 부재에 축하중이 작용할 때 축하중  $P_x$ 는 Hooke의 법칙과 변형도-변위 관계로부터 다음과 같이 된다.

$$P_x = \sigma_x A_x = E \epsilon_x A_x = EA_x \frac{du}{dx} \quad (a)$$

여기서,  $P_x$  = 축하중

$E$  = 탄성계수

식(a)에 식(2.3)을 대입하면,

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{EA_x} = \frac{P}{EA_1(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} \quad (3.1)$$

이 되며, 식(3.1)에서 축하중에 관한 강도행렬 요소를 구하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$k_{1,1} = \frac{EA_0}{L} \frac{1}{S}$$

$$\text{여기서, } S = \int_0^1 \frac{1}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (3.2)$$

식(3.2)의 적분은  $n=0.1$ , 또는 2의 정수이므로 쉽게 적분된다.

부재에 발생하는 뒹(warping)의 영향을 무시하면 변단면에 대한 비틀상수  $J_x$ 를 사용하여 축방향에 대한 강도행렬과 유사한 방법으로 유도할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$k_{4,4} = \frac{GJ_0}{L} \frac{1}{S_j}$$

$$\text{여기서, } S_j = \int_0^1 \frac{1}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (3.3)$$

$G$  : 전단탄성계수

식(3.3)의 적분은  $n$ 의 범위가 0~2의 정수이므로 쉽게 적분된다.

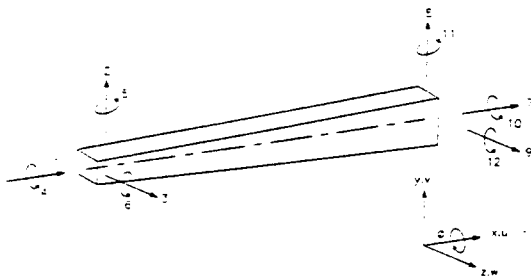


그림 1.

3.2 휨하중에 대한 선형강도행렬

변단면 부재의 절점변위를 그림 1과 같이 가정하고 이에 대응하는 하중을 각각  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{12}$  라하면 주방향 모멘트를  $M_x$ 라 할 때  $M_x$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$M_x = LS_5\xi - S_6 \quad (3.4)$$

모멘트 면적법을 적용하면 임의점에서의 처짐 각( $\theta_{IF}$ ) 및 처짐량( $\Delta_{IF}$ )은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$\theta_{IF} = \int_0^1 \frac{M_x}{EI_x} dx \quad (3.5)$$

$$\Delta_{IF} = \int_0^1 \frac{M_x x}{EI_x} dx \quad (3.6)$$

윗식에  $M_x$ 와  $I_x$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\theta_{IF} = \frac{1}{EI_i} [S_2 L^2 U - S_6 L T] \quad (3.7)$$

$$\Delta_{IF} = \frac{1}{EI_i} [S_2 L^3 V - S_6 L^2 U] \quad (3.8)$$

여기서,  $T = \int_0^1 \frac{1}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (3.9)$

$$U = \int_0^1 \frac{\xi}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (3.10)$$

$$V = \int_0^1 \frac{\xi^2}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (3.11)$$

표 4. 선형 변단면 부재의 강도행렬

$k_{1,1} = -k_{1,7} = k_{7,7} = \frac{EA_0}{LS}$	$k_{3,11} = -k_{9,11} = \frac{EI_{z0}(T' \cdot U')}{L^2 D'}$
$k_{2,2} = k_{2,8} = -k_{2,2} = \frac{EI_{z0} T}{L^3 D}$	$k_{4,4} = k_{4,10} = -k_{10,10} = \frac{GK_0}{LS'}$
$k_{2,6} = -k_{6,8} = \frac{EI_{z0} U}{L^2 D}$	$k_{5,5} = \frac{EI_{y0} V'}{LD'}$
$k_{2,12} = -k_{8,12} = \frac{EI_{z0}(T \cdot U)}{L^2 D}$	$k_{5,11} = \frac{EI_{y0}(U' \cdot V')}{LD'}$
$k_{3,3} = -k_{3,9} = -k_{9,9} = \frac{EI_{y0} T'}{L^3 D'}$	$k_{6,6} = \frac{EI_{z0} V}{LD}$
$k_{3,5} = -k_{5,9} = -\frac{EI_{y0} U'}{L^2 D'}$	$k_{6,12} = \frac{EI_{z0}(U \cdot V)}{LD}$
$k_{11,11} = -k_{3,11} - k_{5,11}$	$k_{12,12} = -k_{2,12} - k_{6,12}$

대칭행렬,  $D = TV \cdot U^2, D' = T'V' \cdot U'^2$

식(3.7)과 식(3.8)에서  $S_2$ 와  $S_6$ 에 관하여 정리하고 경계조건을 대입하여 정리하면 휨강성에 관한 강도행렬 요소를 얻을 수 있다. 부방향서도 같은 방법으로 유도된다. 이들 결과를 표 4에 수록하였다.

4. 등가절점하중

변단면 부재에 분포하중이 재하되면 균일단면 부재에서 구하는 방법으로 절점하중을 계산할 수 있을 것이다. 이 경우 변단면 부재에 재하된 분포하중에 의하여 발생하는 고정단력을 산정하여야 하는 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 그렇지 않은 경우에는 균일단면과 같은 방법으로 고정단력을 적용시킬 수 있지만 다소의 오차가 발생된다. 여기서는 좀 복잡하나 변단면 부재에 분포하중 및 집중하중이 작용될 때의 고정단력을 구하는 방법을 제시하고자 한다. 여기서도 문헌[2]에서 변단면 부재의 단면 형상에 따라 구한 방법과 유사하게 변단면 부재에 대한 고정단력을 유도하는 과정을 보이고자 한다.

4.1 축하중에 대한 등가절점하중

x축에 따라 작용하는 분포 축하중을  $F_x$ 라 하면  $F_x$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_x = F_i - q_{ix} - \frac{q_f - q_i}{2L} x^2 \quad (4.1)$$

여기서,  $F_i$  : 초단의 축방향력

$q_i$  : 초단의 분포하중 강도

$q_f$  : 말단의 분포하중 강도

식(4.1)을 식(3.1)에 대입하여 정리하면 축하중에 대한 등가 절점력  $L_1$ 과  $L_7$ 은 다음과 같이 유도된다.

$$L_1 = Lq_i \frac{R_1}{S} + \frac{L^2(q_f - q_i)R_2}{2S}$$

$$L_7 = \frac{L(q_f + q_i)}{2} - L_1$$

여기서,

$$S = \int_0^1 \frac{1}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (3.2)$$

$$R_1 = \int_0^1 \frac{\xi}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (4.2)$$

$$R_2 = \int_0^1 \frac{\xi^2}{(1+\alpha\xi)^n(1+\beta\xi)} d\xi \quad (4.3)$$

4.2 휨하중에 대한 등가절점하중

x축에 따라 작용하는 휨모멘트를  $M_x$ 라 하면  $M_x$ 는,

$$M_x = -F_i x + M_i + \frac{q_i}{2} x^2 - \frac{q_f - q_i}{6L} x^3 \quad (4.4)$$

표 5. 변단면 부재에 작용하는 분포 및 집중하중에 대한 등가절점하중

절점력	분포하중	집중하중
$S_1$	$q_{bl} \cdot \frac{R}{S} + \eta L^2 \cdot \frac{R'}{S}$	$P_i \cdot \frac{S_b}{S}$
$S_2$	$\frac{q_{bl} L}{2} \cdot \frac{UV \cdot TW}{D} + \frac{\eta L^3}{6} \cdot \frac{UW \cdot TX}{D}$	$P_y \cdot \frac{1}{D} (U_b U - V_b T)$
$S_3$	$\frac{q_{bl}}{2} \cdot \frac{UV' - T'W'}{D'} + \frac{\eta L^2}{6} \cdot \frac{U'W' \cdot T'}{D'}$	$P_z \cdot \frac{1}{D'} (U_b U' - V_b T')$
$S_4$	$q_{bl} L^2 \cdot \frac{R}{S} + \eta L^2 \cdot \frac{R'}{S}$	$P_i \cdot \frac{S_b}{S}$
$S_5$	$\frac{q_{bl} L^2}{2} \cdot \frac{V^2 U'W'}{D'} + \frac{\eta L^3}{6} \cdot \frac{V'W' \cdot U'X'}{D'}$	$P_2 L \cdot \frac{1}{D'} (U_b V' - V_b U')$
$S_6$	$\frac{q_{bl} L^2}{2} \cdot \frac{V^2 UW}{D} + \frac{\eta L^3}{6} \cdot \frac{VW \cdot UX}{D}$	$P_2 L \cdot \frac{1}{D} (U_b V - V_b U)$
$S_7$	$q_{bl} L - S_1 + \frac{\eta L^2}{2}$	$P_x \cdot (\frac{S_b}{S} - 1)$
$S_8$	$q_{bl} L - S_2 + \frac{\eta L^2}{2}$	$P_x - S_2$
$S_9$	$q_{bl} L - S_3 + \frac{\eta L^2}{2}$	$P_y - S_3$
$S_{10}$	$q_{bl} L \cdot \frac{R}{S} + \eta L^2 \cdot \frac{R'}{S}$	$P_i \cdot \frac{S_b}{S}$
$S_{11}$	$\frac{q_{bl} L^2}{2} - S_2 L + S_5 + \frac{\eta L^2}{6}$	$S_2 L + S_5 - P_2 L$
$S_{12}$	$\frac{q_{bl} L^2}{2} - S_3 L + S_6 + \frac{\eta L^2}{6}$	$S_3 L + S_6 - P_2 L$

주)  $\eta_x = (q_{xf} - q_{xi}) / L$ ,  $\eta_y = (q_{yf} - q_{yi}) / L$ ,  
 $Z = (q_{zf} - q_{zi}) / L$ ,  $\eta_z = (q_{zf} - q_{zi}) / L$

$$U_b = \int_b^1 \frac{\xi}{(1+\alpha\xi)(1+\beta\xi)} d\xi$$

$$V_b = \int_b^1 \frac{\xi^2}{(1+\alpha\xi)(1+\beta\xi)} d\xi$$

로 표현되며, 여기서  $M_i$ 는 초단의 모멘트이다.

식(4.4)를 식(3.5) 및 식(3.6)에 대입하여 모멘트 면적법을 이용하면 전단력과 모멘트에 대한 등가절점하중을 유도할 수 있으며 그 결과를 표 5에 수록하였다.

5. 해석 및 고찰

5.1 집중하중을 받는 캔틸레버

그림 2와 같은 길이  $L=5.0m$ 의 변단면 직사각형보를 해석한다. 변단면 직사각형보의 단면은 폭  $b=30cm$ , 초단의 높이  $d_i=60cm$ , 말단의 높이  $d_f=30cm$ 이고 자유단에 10t의 연직하중이 작용한다.

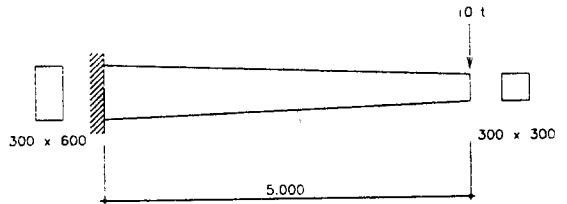
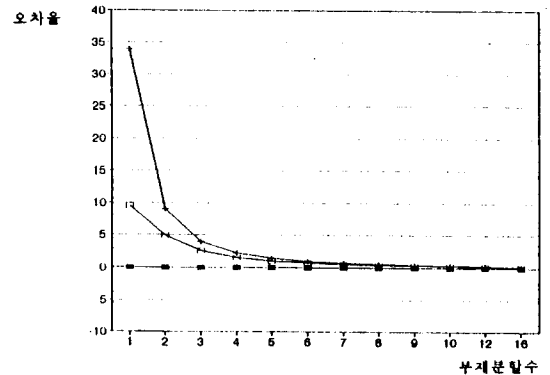


그림 2.



○ : 연직하중, □ : 회전각, ■ : 본방법(연직하중)

그림 3.

표 6. 요소수에 따른 해석 오차

요소수	본연구	오차율	ANSYS	오차율
1	0.6186	0.0000	0.8282	33.8851
2	0.6186	0.0000	0.6746	9.0540
4	0.6186	0.0000	0.6324	2.2195
8	0.6186	0.0000	0.6220	0.5480
16	0.6186	0.0000	0.6195	0.1358
32	0.6186	0.0000	0.6188	0.0340

오차율 = (처짐값 - 0.6186) / 0.6186 × 100(%)

5.2 분포하중을 받는 캔틸레버

그림 4와 같은 길이  $L=5.0m$ 의 변단면 I형 보를 해석한다. 변단면 I형 단면은  $b_f=8in$ ,  $t_f=0.7in$ , 초단의 높이  $d_i=22.5in$ , 말단의 높이  $d_f=9in$ 이다. 보의 전길이에 걸쳐  $1.0t/m$ 의 분포하중이 작용한다.

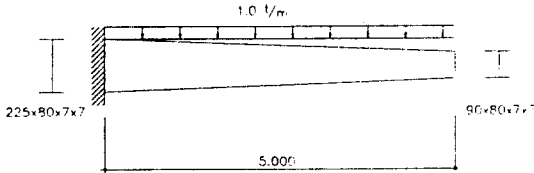


그림 4.

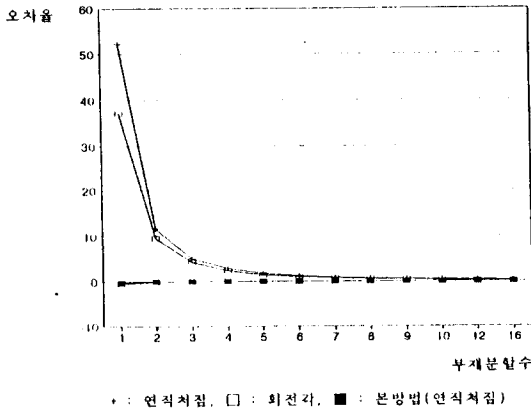


그림 5.

표 7. 요소수에 따른 해석오차

요소수	본연구 <sup>1)</sup> 오차율	본연구 <sup>2)</sup> 오차율	ANSYS 오차율
1	0.7116	-0.3501	0.7386
2	0.7139	-0.0238	0.7163
4	0.7141	-0.0014	0.7142
8	0.7141	0.0000	0.7141
16	0.7141	0.0000	0.7141
32	0.7141	0.0000	0.7141

주) 1) 변단면 분포하중의 고정단력사용  
 2) 균일단면 분포하중의 고정단력사용  
 오차율 = (처짐값 - 0.7141) / 0.7141 × 100(%)

5.3 집중하중을 받는 부등단면보

그림 6과 같은 길이  $L=15.0m$ 의 변단면 I형 보를 해석한다. 변단면 I형 단면은  $b_f=8in$ ,  $t_f=0.7in$ , 초단의 높이  $d_i=22.5in$ , 말단의 높이  $d_f=9in$ 이다.  $1.0t$ 의 집중하중이 작용한다.

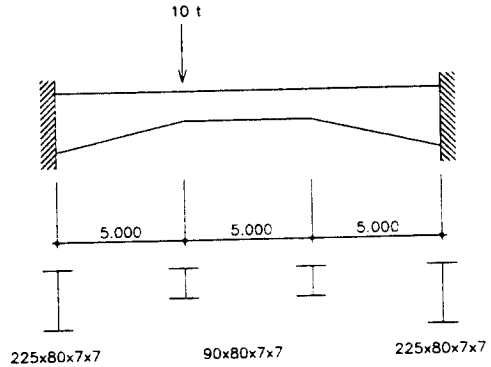


그림 6.

표 8. 요소수에 따른 해석오차

요소수	Ra(ton)		Ma(ton·m)					
	본연구	오차율	본연구	오차율	ANSYS	오차율		
1	7.983	0.0000	7.619	-4.5487	30.29	0.0033	26.36	-12.9671
2	7.983	0.0000	7.870	-1.4093	30.29	-0.0033	29.05	-4.0935
4	7.983	0.0000	7.952	-0.3771	30.29	-0.0033	29.96	-1.1092
8	7.983	0.0000	7.975	-0.0965	30.29	-0.0033	30.21	-0.2839
16	7.983	0.0000	7.981	-0.0251	30.29	0.0000	30.27	-0.0726
32	7.983	0.0000	7.982	-0.0063	30.29	0.0000	30.29	-0.0198

5.4 상대경사에 따른 해석상의 오차

이상의 고찰에서 보여준 바와 같이 단면형상 또는 부재의 상대경사에 따라 ANSYS는 해석결과의 오차가 크며 또한 일관성이 결여되어 있다. 이를 고찰하기 위하여 그림 2의 캔틸레버와 같은 변단면 직사각형 부재의 상대경사  $\alpha$ 를  $-0.8$ 에서 3까지 변화시키면서 해석하여 그 결과를 나타낸 것이 그림 6이다. 그림 6에서 보는 바와 같이 말단의 처

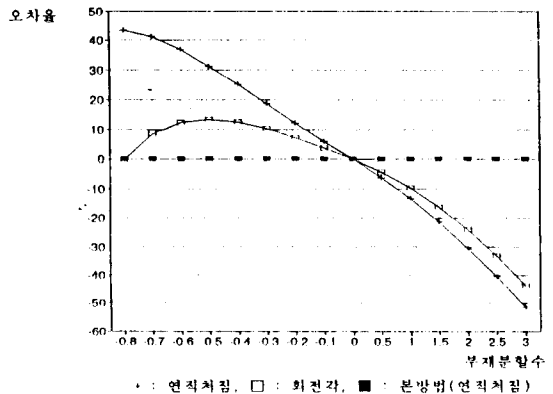


그림 7.

집량은  $\alpha=-0.8$ 에서 43%,  $\alpha=3$ 에서 -51%의 오차를 보이며 처짐각은  $\alpha=-0.8$ 에서 '0'에 가까우나  $\alpha$ 가 -0.5가 될 때까지는 오차가 증가하다가 감소하는 경향을 보인다. 이 경우도 본 연구에서 유도된 강도 행렬을 사용하면 요소를 분할하지 않은 경우도 모든  $\alpha$ 값에 대하여 일관된 정확도를 유지함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

변단면 부재의 단면특성을 비교적 잘 대표할 수 있는 식을 제안하여 선형 변단면 부재의 강도행렬을 유도하였다. 유도된 이 강도행렬을 이용하여 변단면 부재로 이루어진 구조물을 해석하고 계산된 결과치를 범용프로그램의 결과치와 비교하여 본 연구에서 유도된 강도행렬의 정확성과 효율성을 검증하였다.

본 연구의 결과로서 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 종래에 부재의 형상에 따라 개별적으로 강도행렬이 유도되었으나 본 연구의 결과 일반적인 형상에 대한 선형 변단면 부재의 통합된 강도행렬의 유도가 가능하였다.

2) 범용프로그램 사용시 부재의 경사가 증가함에 따라 오차도 증가하였으나 본 방법 적용시 단면의 형상이나 부재의 경사에 관계없이 변단면 부재를 분할하지 않은 경우에도 최대 오차는 0.5% 이내였다.

3) 본 방법의 적용시 부재의 형상이나 경사도 등에 관계 없이 일관된 정확도를 갖는 구조해석을 수행할 수 있었다.

## 参 考 文 献

1. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., 1970.
2. Lee, Yong-Woo, *New Element for Analysis of Space Frames with Tapered Members*, Ph.D. Dissertation, University of Nebraska, Lincoln, 1983.
3. Kayum M.N., *Instability Analysis of Tapered Members using Finite Element Method*, Ph.D. Dissertation, Case Western Reserve University, 1981.
4. Gupta, A.K., *Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrices*, Ph.D. Dissertation, Utah State University, 1975.
5. Gere, J.M. and Carter, W.O., "Critical Buckling Loads for Tapered Columns," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 88, No. ST1, 1962.
6. Morrell, M.L. and Lee, G.C., "Allowable Stresses for Web-Tapered Beams with lateral Restraints," *Welding Research Council Bulletin*, 192, New York, 1974.

(접수일자 : 1994. 9. 9)