

## 직선베벨기어의 동특성해석에 관한 연구

류 성 기,\* 신 귀 수\*\*

### A Study on Dynamic Characteristic Analysis of Straight Bevel Gear

Sung-Ki Lyu,\* Gue-Su Shin\*\*

#### ABSTRACT

Straight bevel gear is used mainly for steering system, final reduction and differential gear in the automobile. The more high load, high velocity driving bevel gear, the more unsafe and unpleasant.

In this study, we get a kinematic equation by modelling straight bevel gear pair with simple elastic system, the dynamic characteristic analysis about this system, we got the dynamic load factor of tooth surface.

Comparing the value of dynamic load factor by calculation with the measured value of Ter-auchi's experimental results is similar. We think it useful to analysis the vibration and the noise of straight bevel gear in operation with the analytic method of dynamic load of straight bevel gear using in this study.

**Key Words :** Straight Bevel Gear(직선베벨기어), Kinematic Equation(운동방정식), Dynamic Characteristic Analysis(동특성해석), Dynamic Load Factor(동하중계수)

#### 1. 서 론

축직각 방향으로 동력과 차동을 전달하는데 쓰이는 직선베벨기어는 자동차의 조향장치, 종감속장치, 차동장치 및 헬리콥터의 회전장치 등에 많이 사용되고 있다.

따라서, 직선베벨기어는 성능향상과 함께 고부하, 고속회전에 많이 응용되고 있으며, 동력을 전달할 때 정숙한 운동장치의 정강성이 요구되므로, 기어의 성능향상<sup>1-3)</sup>과 기어의 진동, 소음에 관한 연구가 근래 많이 연구되고 있다. Honda<sup>4-7)</sup>는 수정기어와 굽힘을 받는 기어를 순간 기초원의 동적 변동이라고 하는 새로운 개념

\* 전북대학교 공과대학

\*\* 전북대학교 대학원

을 도입하여 기어의 동하중 증분을 구하였다. 그러나, 직선베벨기어의 진동, 소음에 관한 연구는 많지 않으며, 특히 이들에 대한 해석은 아직 불충분하다.

따라서, 본 연구에서는 자동차의 조향장치, 종감속장치, 차동장치 등에 많이 사용되는 직선베벨기어 한 쌍을 간단한 스프링과 축의 시스템으로 모델링 하여, 양 기어의 상대변위를 작용선상의 이동량으로 나타내고, 기어의 관성 모우멘트와 이의 탄성강성을 이용하여 직선베벨기어의 동적 해석을 하여 기어잇면에 걸리는 동하중을 구한다. 또한, 본 연구에서 얻어진 계산결과를 Terauchi<sup>8)</sup>의 실험결과와 비교 고찰하고자 한다.

## 2. 직선베벨기어의 상당 스퍼어기어

### 2. 1 직선베벨기어의 맞물림 조건

Fig. 1은 오차가 없는 잇면을 갖는 직선베벨기어1과 수정잇면을 갖는 직선베벨기어2가 맞물려 있는 상태를 나타내고 있다. 여기에서 마찰에 의한 잇면의 접촉력은 무시하고 있다. 단, 맞물리는 직선베벨기어는 축방향, 반경방향의 변위가 구속되어 있고, 축의 굽힘 강성이 크며, 직선베벨기어의 운동은 원주방향의 힘에 의하여 회전운동만 하고 있는 것으로 가정하였다.

### 2. 2 본 연구에서 고려한 상당 스퍼어기어

본 연구에서는 직선베벨기어의 물림을 직선베벨기어 배원추(背圓錐)에 가상되는 가상 스퍼어기어의 물림으

로 치환하고, 직선베벨기어의 수정잇면을 모두 같은 회전운동을 전달하는 가상 스퍼어기어의 등가치형으로 치환하는 방법을 도입하였다. 따라서, Fig. 2에 나타낸 바와 같이 직선베벨기어의 물림을 직선베벨기어의 배원추면에 접하는 가상 스퍼어기어로 가정하였다. 직선베벨기어의 움직임을 이 가상 스퍼어기어의 움직임으로 치환하여 생각하였고, 본 연구에서는 이 가상 스퍼어기어를 상당 스퍼어기어라 칭한다.

상당 스퍼어기어의 중심축  $O_1, O_{II}$ 는 직선베벨기어1, 2의 축을 연장하여, 배원추에 접하는 직선파의 교점을 구하면,  $O_1, O_{II}$ 가 결정된다. 상당 스퍼어기어의 피치원 반경은 기어1의 상당 스퍼어기어I의 피치원 반경을  $R_{V1}$ , 기어2의 상당 스퍼어기어II의 피치원 반경을  $R_{V2}$ 로 정의한다.

$$R_v = \frac{d_o}{2 \cos \delta_o} \quad (i=1,2) \quad (1)$$

단,  $d_o$  : 피치원의 직경  
 $\delta_o$  : 피치원주각

## 3. 기초원 변동에 착안한 직선베벨기어의 동하중 해석

### 3. 1 기초원 변동에 의한 치형 수정량의 표현

Fig. 3은 직선베벨기어의 접촉상황으로서 기어1, 2는  $W_n (n=1, \dots, i, j, \dots)$ 에서 접하고 있다.  $W_n$ 은 접촉선(이끌선)을 나타내며, 기어 축이 회전하면  $W_i$ 에서  $W_j$

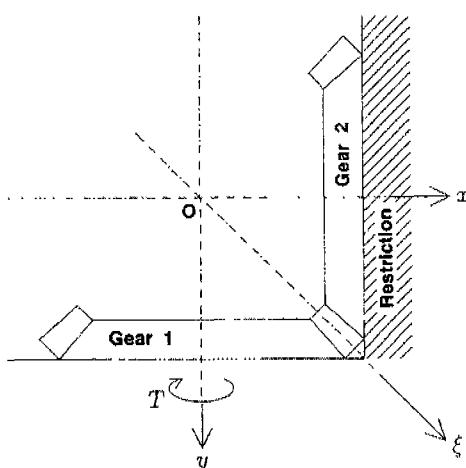


Fig. 1 Shape of straight bevel gear model

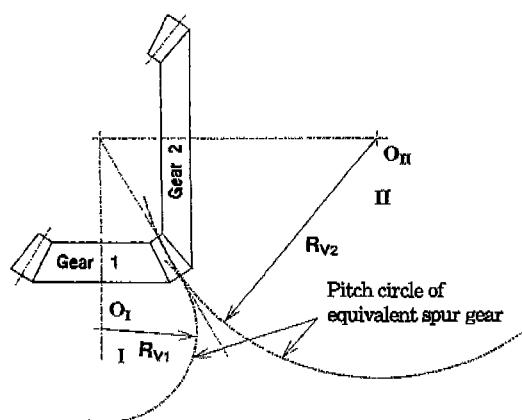


Fig. 2 Shape of straight bevel gear & equivalent spur gear

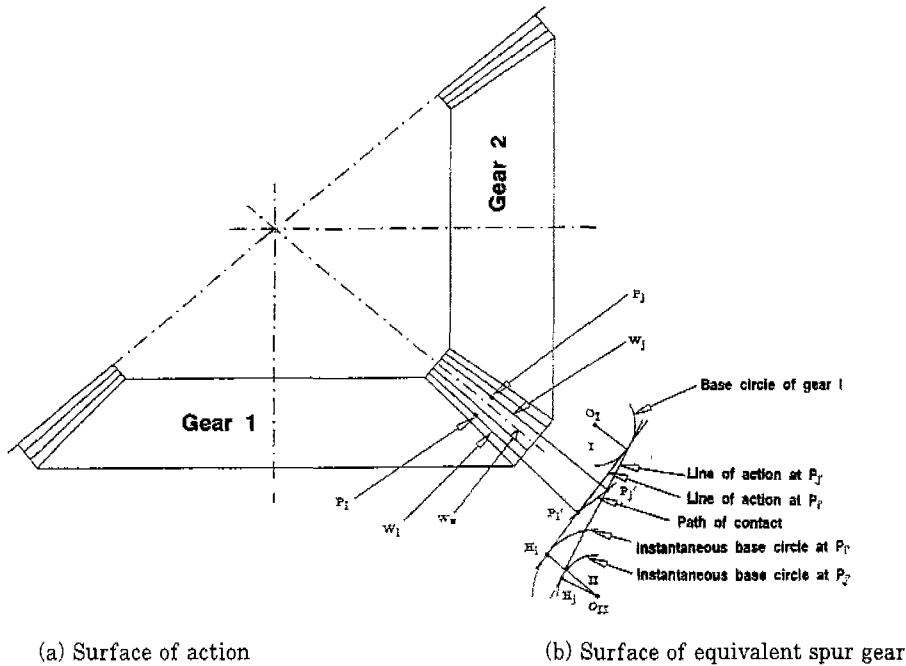


Fig. 3 Surface of action and path of contact

로 이동한다. 또한, 직선배벨기어의 치형수정이의 작용면 위의 접촉선  $W_n$ 과 상당 스퍼어기어 위에서의 접촉점  $P_n'$ 의 관계를 나타낸다. 기어를 회전시키면 접촉점  $P_i$ 는  $P_j$ 로 이동하고, 상당 스퍼어기어에서는  $P_i'$ ,  $P_j'$ 의 접촉점의 궤적을 그린다.

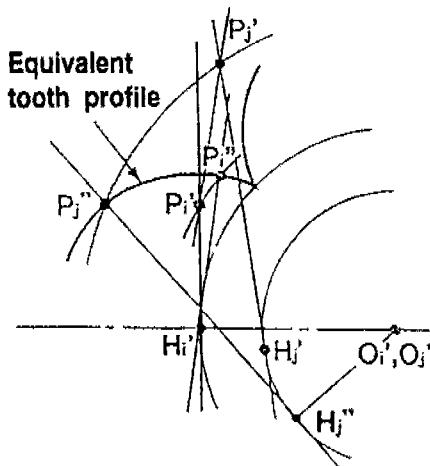


Fig. 4 Equivalent tooth profile

이  $P_i'$ ,  $P_j'$ 를 기어2에 고정한 좌표 위에 그린 궤적을 등가치형이라 정의하고, 이 관계를 Fig. 4에 나타냈다. 잇면위를 접촉선이  $W_i$ 에서  $W_j$ 로 이동할 때, 대응하는 점  $P_i''$ ,  $P_j''$ 는 기초원이 변화하는 인볼류트 곡선  $P_i''P_j''$ 를 그리게 된다. 즉, 등가치형은 임의의 접촉선  $W_iW_j$ 에서 접촉하고 있을 때의 접촉선의 위치를 기어2에 고정한 상당 스퍼어기어 잇면 위에 나타낼 수 있으므로, 수정잇면의 물림에 의하여 회전운동은 등가치형의 물림으로 치환할 수 있다.

### 3.2 접선 극좌표에 의한 표현

Fig. 5는 등가치형을 접선 극좌표  $(q, \theta)$ 로 나타낸 그림이다.  $O_{II}$ 는 기어축,  $P_0$ 는 기준점( $\theta=0$ 인 접촉점)을 나타내며,  $L_0$ 를 접선 극좌표의 기선으로 선택하고 있다. 또한, 기준점  $P_0$ 에서의 치형접선을  $L_0$ , 순간 기초원 반경을  $R_b(\theta)$ 로 한다. 등가치형의 임의의 점을  $P''$ 로 하여, 그 접선  $L$ 의 경사각을  $\theta$ 라 한다.  $P''$ 에서의 순간 기초원 반경을  $R_b(\theta)$ 라 하면 접선  $L$ 의 원점  $O_{II}$ 에서의 거리  $\overline{P'H''}$  즉,  $q(\theta)$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

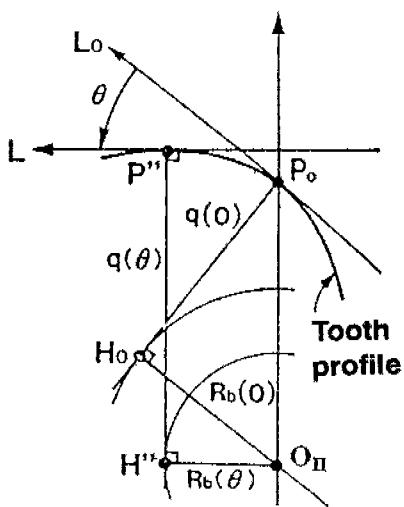


Fig. 5 polar tangential coordinates

$$q(\theta) = \int_0^\theta R_b(\theta)d\theta + q(0) \quad (2)$$

여기에서  $\theta=0$  이면  $q(0)=P_0H_0$ 가 된다. 식(2)는 등가치형의 접선 극좌표를 의미하며,  $R_b(\theta)$ 는 다음과 같이  $\theta$ 의 무차원 급수로 표현된다.

$$R_b(\theta) = R_{b0} - \Delta R_b(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots \quad (3)$$

치형수정에 의한 순간 기초원의 변화량  $\Delta R_b(\theta)$ 는 상당 스파어기어의 기초원반경  $R_b(\theta)$ 에 비하면 아주 작다. 그러나,  $\Delta R_b(\theta)$ 는  $\theta$ 의 다항식에서 근사값으로 얻을 수 있다. 식(3)을 식(2)에 대입하여 정리하면 등가치형  $q(\theta)$  및 순간기초원 반경  $R_b(\theta)$ 에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{등가치형} : q(\theta) = q(0) + R_{b0}\theta + \Delta p(\theta) \quad (4)$$

$$\text{수정량} : \Delta p(\theta) = -a_0\theta - \frac{a_1\theta^2}{2} - \frac{a_2\theta^3}{3} \dots \quad (5)$$

$$\text{순간 기초원 반경} : R_b(\theta) = \frac{d_q(\theta)}{d\theta} \quad (6)$$

### 3.3 부하 상태의 등가 치형

3.2절에서 구한 치형의 수정량에 부하에 의한 급힘의 힘을 더하여 전체의 수정량을 구한다. 급힘  $X(\theta_2)$ 는 잇면의 정하중 증분에 의해 생긴 급힘을  $\chi_s(\theta_2)$ , 동하중

에 의해 생긴 급힘을  $\chi_d(\theta_2)$ 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(\theta_2) = \chi_s(\theta_2) + \chi_d(\theta_2) \quad (7)$$

$$\chi_s(\theta_2) = \frac{F_s}{K(\theta_2)} \quad (8)$$

단,  $F_s$  : 잇면의 정하중

$K(\theta_2)$  : 기어의 탄성계수

$\chi_d(\theta_2)$  : 잇면의 동하중증분에 의하여 생긴 급힘  
본 연구에서는 동하중을 포함하지 않은 정적인 등가상태에서의 등가치형을 정등가치형이라 정의하고 첨자  $x$ 로 나타내면,  $\chi_d(\theta_2)=0$ 이 되므로 다음과 같다. 그리고, 정등가치형을 Fig. 6에 나타냈다.

$$q_x(\theta_2) = q_x(\theta_2) - \chi(\theta_2) \\ = q_x(0) + R_{bx0}\theta_2 + \Delta p_x(\theta_2) \quad (9)$$

$$\Delta p_x(\theta_2) = \Delta p(\theta_2) - \chi_s(\theta_2) \quad (10)$$

$$R_{bx} = R_{bx0} + \frac{d\Delta p_x(\theta_2)}{d\theta_2} \quad (11)$$

단,  $q_x(\theta_2)$  : 정등가치형 곡선

$R_{bx}(\theta_2)$  : 순간 기초원 반경

$\Delta p_x(\theta_2)$  : 수정량

$R_{b20}$  : 기어2의 기초원 반경

또한 몇개의 이가 맞물릴 경우의 복수맞물림 영역의 정등가치형의 모델을 Fig. 7에 나타냈다. 정하중  $F_s$ 에 있어서,  $p_y$ ,  $p_z$ 은 복수물림상태의 접촉점을 나타내며, 이들의 치형의 수정량은 다음과 같다.

(1) 2枚의 물림영역의 치형의 수정량을  $\Delta p_y(\theta_2)$ 라고 하면, C가 받는 하중과 B에서 해방된 하중은 같으므로

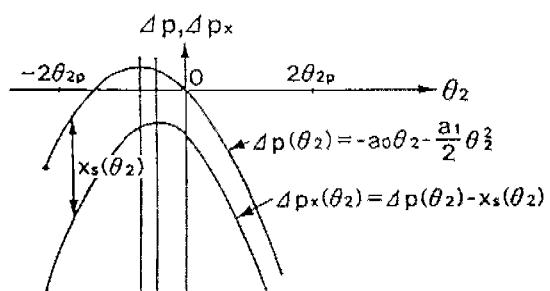


Fig. 6 Equivalent tooth profile of inactivity

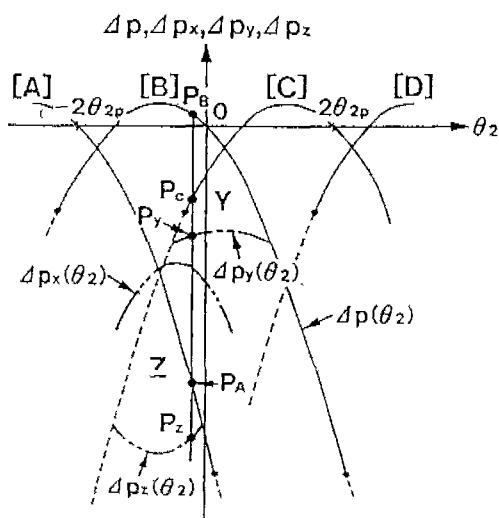


Fig. 7 Equivalent tooth profile of inactivity in tooth meshing

$$K(\theta_2) \{ -\Delta p_x(\theta_2) + \Delta p_y(\theta_2) \} = \quad (12)$$

$$\Delta p_y(\theta_2) = \frac{K(\theta_2 - 2\theta_{2p}) \Delta p(\theta_2 - 2\theta_{2p}) + K(\theta_2) \Delta p_x(\theta_2)}{K(\theta_2 - 2\theta_{2p}) + K(\theta_2)}$$

(2) 3枚의 물림영역의 치형의 수정량  $\Delta p_z(\theta_2)$ 는 같은 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta p_z(\theta_2) = \frac{\left\{ K(\theta_2 - 2\theta_{2p}) + K(\theta_{2p}) \Delta p_y(\theta_2) + K(\theta_2 + 2\theta_{2p}) \Delta p(\theta_2 + 2\theta_{2p}) \right\}}{K(\theta_2 - 2\theta_{2p}) + K(\theta_2) + K(\theta_2 + 2\theta_{2p})} \quad (13)$$

### 3.4 운동방정식

접촉은 1枚의 물림에서 동적 굽힘에 의한 기초원의 변화가 작은 순간 기초원반경은  $R_{bx}(\theta_2)$ 로 근사시킬 수 있다. 입출력의 변동은 없으며, 잇면의 윤활은 충분하다고 가정하고, 마찰력의 영향을 무시하면, 기어장치의 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -T_1 + FR_{bx} \quad (14)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -FR_{bx} + T_2 \quad (15)$$

$J_1, J_2$  : 상당 스퍼어기어 I, II의 관성모멘트

$\theta_1, \theta_2$  : 상당 스퍼어기어 I, II의 회전각

$T_1, T_2$  : 기어 I, II의 전달 토오크

F : 잇면의 하중

등가치형이 접촉하고 있다고 하면 법선 속도는 같으므로

$$R_{b10} \dot{\theta}_1 = R_{b20} \dot{\theta}_2 + \Delta \dot{P}_x(\theta_2) - \ddot{X}(\theta_2) \quad (16)$$

가 된다. 잇면의 하중 F를 정하중  $F_s$ 와 동하중  $F_{dx}$ 의 합으로 나타내면

$$F = F_s + F_{dx} \quad (F_{dx} \ll F_s)$$

$$F_{dx} = k_x(\theta_2) X \quad (17)$$

단,  $k_x(\theta_2)$ 는 정등가치형  $q_x$ 의 등가탄성계수이며,  $F_{dx}$ 는  $F_s$ 에 비하면 아주 작다. 식(14)로부터 식(17)에서  $\theta_1, \theta_2, F_1, X$ 를 미지수로하여 연립방정식을 1쌍의 물림구간에서 풀면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d\{\Delta p_z(\theta_2)\} = -\Delta R_{bx}(\theta_2) d\theta_2 \quad (18)$$

식(18)을 미분하면

$$\Delta \ddot{p}_z(\theta_2) = -\Delta \dot{R}_{bx}(\theta_2) \omega_{20}^2 \quad (19)$$

그리고, 식(16)을 미분하여 식(14), (15), (19)를 이용하면

$$\begin{aligned} & \frac{R_{b10}(-T_1 + FR_{bx})}{J_1} - \\ & \frac{R_{b10}(-FR_{bx}(\theta_2) + T_2)}{J_2} - \Delta \dot{R}_{bx}(\theta_2) \omega_{20}^2 - \ddot{X}(\theta_2) \end{aligned} \quad (20)$$

가 된다. 입출력은 서로 대응하므로

$$T_1 = R_{b10} F_s, \quad T_2 = R_{b20} F_s \quad (21)$$

식(17), (21)을 식(20)에 대입하면, 운동방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{R_{b10}^2}{J_1} + \frac{R_{b20}^2}{J_2} \right] k_x(\theta_2) = \\ & \frac{R_{b20}^2 F_s \Delta R_{bx}(\theta_2)}{J_2} - \Delta \dot{R}_{bx}(\theta_2) \omega_{20}^2 - \ddot{X}(\theta_2) \end{aligned} \quad (22)$$

### 3.5 동하중 증분의 Fourier 급수전개

운동방정식의 해를 구하기 위하여 식(22)의 좌변을

$$M = J_1 J_2 / \{R_{b10}^2 (i^2 J_1 + J_2)\}, \quad i = R_{b20} / R_{b10} \text{ 과 식(17)}$$

을 대입시켜 정리하면

$$M \ddot{X}(\theta_2) + F_{dx} - M \left\{ T_2 \Delta R_{bx}(\theta_2) / J_2 - \Delta \dot{R}_{bx}(\theta_2) \omega_{20}^2 \right\} = 0 \quad (23)$$

이 된다. 따라서, 동하중  $F_{dx}$ 는 다음과 같다.

$$F_{dx} = M \left\{ T_2 \Delta R_{bx}(\theta_2) / J_2 - \Delta \dot{R}_{bx}(\theta_2) \omega_{20}^2 - \ddot{X}(\theta_2) \right\} \quad (24)$$

여기에서,  $J_1, J_2$  : 기어 I, II의 관성모멘트

$R_{b10}$  : 기어 I의 기초원 반경

$T_2$  : 기어 II의 전달 토오크

$\omega_{20}$  : 기어 II의 평균 각속도

그리고, Fourier 급수 전개에 의하여, 동하중진  $F_d$ 는

$$F_d = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi/t_p) t + B_n \sin(n\pi/t_p) t \quad (25)$$

여기에서,  $t_p$  : 폐치각을  $\omega_{20}$ 으로 나눈값

$$A_n = \int_{-t_p}^{t_p} F_d \cos(n\pi/t_p) \xi d\xi / t_p \quad (26)$$

$$B_n = \int_{-t_p}^{t_p} F_d \sin(n\pi/t_p) \xi d\xi / t_p \quad (27)$$

로부터  $F_d = A_1 \cos(\pi/t_p) t + B_1 \sin(\pi/t_p) t$  (28)  
가 얻어진다.

#### 4. 직선베벨기어의 탄성강성

직선베벨기어의 이는 이폭 방향에 대하여 이두께와 모듈이 변화하고, 이의 법선력이 물림의 위치에 따라, 하중분포 등이 복잡하기 때문에 직선베벨기어의 이를 모델링하여 탄성강성을 고찰하고자 한다. 직선베벨기어의 치형을 스퍼어기어의 집합체로 취급하여, 이의

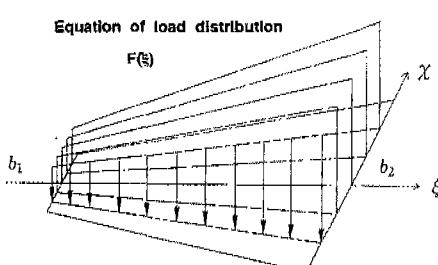


Fig. 8 Distribution of dynamic load

이끌선을 따라 등하중을 걸었을 때 미소 이두께의 이를 외팔보로 생각하면 이끌선에 따른 굽힘은 같게 된다.

직선베벨기어의 하중분포를 Fig. 8에 나타냈다. 직선베벨기어2를 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 구속하고, 기어1에 토오크를 걸었을 때, 기어1이  $\Delta\theta$ 만큼 회전한다면 이의 변위량  $\Delta d$ 는

$$\Delta d = \xi \sin \delta_{01} \Delta \theta \quad (29)$$

가 되어 이폭 방향  $\xi$ 에 비례하여 크게 된다.

이끌 방향의 탄성강성  $k$ 는 동일 이끌 위에서 일정하기 때문에 동일 이끌 위에서의 힘  $F$ 는

$$F(\xi) = k \Delta d = k \xi \sin \delta_{01} \Delta \theta \quad (30)$$

가 되어  $F$ 는 이폭방향에 비례하여 크게 되지만, 회전에 의하여 변화하는 이끌선  $\chi$ 에 관하여는 독립의 관계가 된다.

또한, 기어1이  $\Delta\theta$ 회전하는데 필요한 힘  $N$ 은 다음과 같다.

$$N = \int_{b_1}^{b_2} F(\xi) d\xi \quad (31)$$

로부터

$$N = k \cdot \sin \delta_{01} \cdot \Delta \theta \cdot \frac{1}{2} (b_2^2 - b_1^2) \quad (32)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기에서

$$b_2 = \frac{d_{01}}{2 \sin \delta_{01}} \quad (33)$$

$$b_1 = \left( \frac{d_{01}}{2 \sin \delta_{01}} - b \right) \quad (34)$$

단,  $b$ 는 이폭

대입하여 계산하면

$$N = \frac{k \cdot \sin \delta_{01} \Delta \theta \cdot \left( \frac{b \cdot d_{01}}{\sin \delta_{01}} - b^2 \right)}{2} \quad (35)$$

Table. 1 Dimensions of test gears

Straight bevel gear	
Number of teeth	$z = 32$
Module	$m = 6$
Pressure angle	20 [deg]
Face width	$b = 30$ [mm]
Pitch diameter	192 [mm]
Material	SCM22
Pitch cone angle	45 [deg]

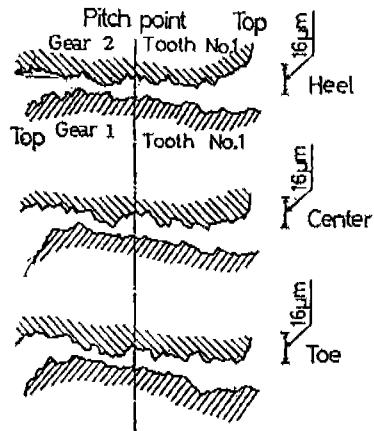


Fig. 9 Tooth profile error of straight-bevel gear pair

Table. 2 Errors of tooth profile

Gear 2	Pitch point	Gear 1	
20 μm	12 μm	24 μm	Heel
24 μm	12 μm	20 μm	Center
20 μm	12 μm	16 μm	Toe

따라서, 기어1이  $\Delta\theta$ 회전하는데 필요한 힘  $N$ 이 구해지고,  $\Delta\theta$ 로 나누면, 직선베벨기어의 탄성강성  $K$ 는 다음 식에 의하여 구해진다.

$$K = \frac{k}{2} (bd_{01} - b^2 \sin \delta_{01}) \quad (36)$$

### 5. 직선베벨기어의 동하중

2장에서 4장까지 도입한 식에 의하여 계산한 동하중  $F_{dl}$ 이 실제의 직선베벨기어의 동하중과 어느 정도 근사하는가 검증하기 위하여 Terauchi<sup>8)</sup>의 실험에 의한 동하중의 측정 데이터와 비교해 보았다. Terauchi<sup>8)</sup>가 실험에 사용한 직선베벨기어의 제원은 Table 1에 나타낸 바와 같으며, 본 연구에 이용한 치형의 수정량은 Fig. 9에 나타낸 치형오차 곡선으로부터 구하여 Table 2에 나타냈다.

동하중 해석에서 구한 운동방정식을 이용하여, Terauchi<sup>8)</sup>의 제원과 같은 직선베벨기어의 동하중 계산값

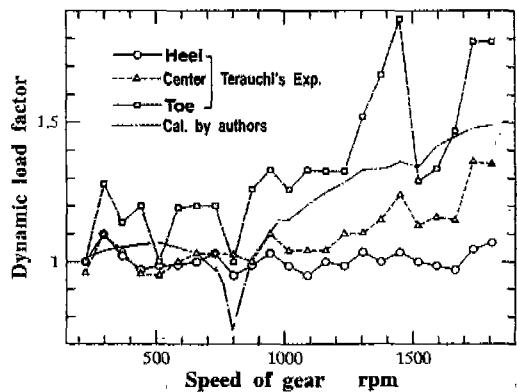


Fig. 10 Comparision between Terauchi's experimental result and calculations of  $F_{dl}$  in tooth No. 1

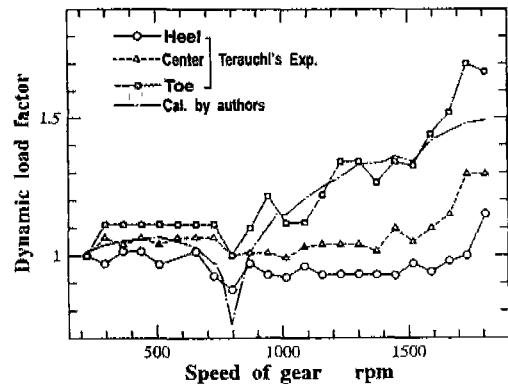


Fig. 11 Comparision between Terauchi's experimental results and calculations of  $F_{dl}$  in tooth No. 9

과 Terauchi의 실험결과를 Fig. 10, 11에 나타냈다. 계산에 의한 결과와 Terauchi의 실험결과를 비교해 본 결과, 특히, 동하중의 급감소가 발생하는 회전수는 일치하였다. 회전수 약 800rpm일 때 진폭의 폭이 가장 작고 낮게 나타났으며, 또한, 회전수 약 1500rpm부근에서도 진폭이 다소 감소하는 현상이 나타났다.

### 6. 결 론

본 연구에서는 자동차의 조향장치, 종감속장치, 차동장치 등에 많이 사용되는 직선베벨기어를 상당 스퍼어

기어로 치환하여 치형 수정량, 탄성변형량 등을 상당 스퍼어기어의 기초원 변동으로 표현하였다. 또한, 상당 스퍼어기어 시스템을 간단한 스프링과 추의 시스템으로 모델링하여 양 기어의 상대변위를 작용선상의 이동량으로 나타내어, 기어의 관성 모우멘트와 이의 탄성 강성을 이용하여 직선베벨기어의 동적 해석을 하여 운동방정식을 구하였다. 본 연구의 해석방법에 의하여 계산한 기어잇면 동하중을 Terauchi<sup>8)</sup>의 직선베벨기어의 동하중 실험 결과와 비교해 본 결과, 동하중의 급감소가 발생하는 회전수가 일치하고 있는 것을 알았다. 본 연구의 직선베벨기어 동하중 해석법이 앞으로 직선베벨기어의 진동, 소음 해석에 유효할 것으로 사료된다.

### 참고문헌

1. 柳晟基外4人, 浸炭歯車の曲げ疲労強度に及ぼす表面處理の影響, 日本機械學會論文集, 60卷572號C偏, 1391-1396, 1994
2. 柳晟基外3人, Shot Peened 浸炭歯車の殘留應力推定および應力擴大係數に對する影響, 日本機械學會論文集, 60卷578號C偏, 3504-3509, 1994.
3. 柳晟基外1人, 소결치차의 피로강도에 관한연구, 產業安全學會論文集, 9卷3號, 28-33, 1994.
4. 本多, 修正歯面を持つはすばつはすば歯車の振動發生機構(第1版), 日本機械學會論文集, 57卷543號C, 3932-3938, 1991.
5. 本多, 修正歯面を持つはすばつはすば歯車の振動發生機構(第2版), 日本機械學會論文集, 57卷543號C, 3640-3646, 1991.
6. 本多, 修正歯面を持つはすばつはすば歯車の振動發生機構(第3版), 日本機械學會論文集, 57卷544號C, 3947-3951, 1991.
7. 本多, 修正歯面を持つはすばつはすば歯車の振動發生機構(第4版), 日本機械學會論文集, 57卷544號C, 3952-3959, 1991.
8. 寺内, 宮尾, 蘇正, 佐川, すぐばかさ歯車の動特性に関する研究(第1版), 日本機械學會論文集, 45卷393號C, 566-573, 1979.