論文 한국정밀공학회지 제12권 제10호 1995. 10
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol.12. No.10. October. 1995.

이산관측기에 근거한 감지시스템을 위한 정량적 성능지표

허 건 수,* 김 상 진**

A Quantitative Performance Index for Discrete-time Observer-based Monitoring Systems

Kun-Soo Huh,* Sang-Jin Kim**

ABSTRACT

While Model-based Monitoring systems based on state observer theory have shown much promise in the laboratory, they have not been widely accepted by industry because, in practice, these systems often have poor performance with respect to accuracy, band-width, reliability(false alarms), and robustness. In this paper, the limitations of the deterministic discrete-time state observer are investigated quantitatively from the machine monitoring viewpoint. The limitations in the transient and steady-state observer performance are quantified as estimation error bounds from which performance indices are selected. Each index represents the conditioning of the corresponding performance. By utilizing matrix norm theory, an unified main index is determined, that dominates all the indices. This index could form the basis for an observer design methodology that should improve the performance of model-based monitoring systems.

Key Words : monitoring system(감시 시스템), observer(관측기), condition number, ill-condition, well-condition, upper bound(상한값), performance index (성능지표), main index(주지표)

1. 서 론

Luenberger[1]가 관측기를 소개한 이후 기계감시를 위한 관측기를 기초로 한 많은 기계감시 시스템들이 제안되었다.[2~5] 비록 이러한 기계감시 시스템이 학문적으로는 많은 발전이 있었지만 실제 산업현장에서는 널리 받아들여지지 않고 있다. 특히 관측기를 기초로 한 기계감시 시스템은 거의 사용되지 않는데 그 이유는 관측기가 종종 큰 과도상태 또는 정상상태 오차를 발생하여 그 오차로 인한 잘못된 경보를 발생시키거나 모니터링 시스템을 꺼지게 하기 때문이다.[6] 이것은 추정 속도 조건을 만족하는 대표극점을 미리 결정하고 나머지 극점들을 임의의 방법으로 대표극점에 가까운 위치에 있도록 하는 전통적인 관측기 설계방법에서 기인한다. 그러

* 한양대학교 정밀기계공학과
** LG 그룹 생기연구센타

한 방법으로 설계된 관측기는 매우 ill-condition이 될 수 있고, 그런 경우에 관측기의 성능이 미지의 초기 추정상태값, 감시하는 기계의 파라미터들의 변화 그리고 실제 적용할 때의 라운드 오프 오차나 센싱오차와 같은 ill-conditioning 요소들에 매우 민감해 진다.

이러한 좋지 않은 관측기의 성능은 과도상태의 추정오차 형상과 정상상태의 추정오차에 관련된 기계감시 시스템의 성능에 악영향을 주는 요소들을 고려하지 않은 부적절한 관측기 설계방법 때문이다. 이러한 요소들을 고려하지 않은 관측기는 관측기의 행렬이 ill-condition이 되어, 모든 조건들(센싱 데이타에 오차가 없고 시스템의 모델도 정확하다는 조건)이 충족하는 경우는 잘 작동하지만 그렇지 않은 경우는 매우 나쁜 성능을 보일 수 있다. 따라서 이러한 점을 개선하는 새로운 well-conditioned 관측기를 설계하는 새로운 설계방법이 필요하다. 그러나 새로운 관측기 설계방법을 개발하기 전에 무엇이 관측기의 conditioning을 결정하는지 보여주고 또 well-conditioned 관측기를 설계하는데 사용될 수 있는 정량적인 지표들이 무엇인지를 알아야 한다.

연속시간 영역에서의 관측기에 대해서는 Huh and Stein[7]에서 발표되었고, 본 논문에서는 이산시간 관측기에 대한 연구를 수행한다. 본 논문의 목적은 관측기를 ill-conditioned되게 하는 요소들의 영향을 나타내기 위한 성능지표들을 찾아내고 그 지표들을 종합함으로써 새로운 관측기를 설계하는데 사용될 수 있는 주지표(main index)를 찾아내는 것이다.

따라서 본 연구는 다음의 두 단계로 나누어진다. 첫번째는 관측기 성능에 대한 ill-conditioning 요소들의 영향을 나타내는 성능지표들을 찾는 것이고, 두번째 단계는 성능지표들을 종합함으로써 기계감시 시스템의 전체 성능을 나타내는 하나의 주지표를 결정하는 것이다. 이것은 민감도해석 또는 최대 오차 해석을 사용해서 이러한 요소들이 과도상태와 정상상태 성능에 어떻게 영향을 미치는 지를 나타냄으로써 이루어질 수 있다. 특히 그러한 해석은 행렬노옴 이론을 이용해서 구해지는 상한값들을 포함하는데, 이 상한값들은 주지표를 결정하는 데 사용된다.

2. 연구배경

제어문제에 있어서 관측기 설계기술은 과도상태와 정상상태에서의 오차거동에 관련되어 왔다. 즉 관측기 설계의 주된 목표는 요구되는 수렴속도에서 초기 추정오차를 감소시키는 것이다. 이것은 정해진 시간 내에 추정상태값들이 적절한 값으로 수렴하도록 관측기의 극점들을 특정한 위치에 배치함으로써 이룰 수 있다. 제어분야에서 이러한 폐루프 제어 시스템의 극점배치/안정화 문제에 대해 많은 연구가 있었다. 그러한 연구에는 고유값 민감도해석[8~10]등, 고유값/고유벡터에 의한 강인한 극점배치[11~13]등, 그리고 고유값 민감도를 포함하는 최적 제어기 설계[14~23]등이 있고 관련 문헌에 대한 보다 자세한 요약은 Huh and Stein[7]을 참고하기 바란다. 또한 기계에 섭동이 일어났을 때, 정상상태에서의 추정상태값의 정확도를 유지하기 위해 다양한 방법들이 개발되었다. 예를 들어 Battacharyya[24]는 섭동구조에 대한 조건들 하에 관측기에 피드백 구조를 부가하였고, Stefani[25]는 최소 적분 추정오차를 소개하였다. Galimidi and Barmish[26]는 Lyapunov 함수를 사용하여 덜 민감한 관측기에 대한 노옴 경계를 구하였고, Shafai and Carrol[27]은 카노니컬 형태의 모델로부터 적분게인을 관측기에 부가함으로써 기계섭동을 포함하는 파라미터 변화에 덜 민감한 관측기를 설계하였다. Djaferis[28]는 관측기를 전달함수로 표현하여 강인한 관측기를 설계하였고 Haddad and Bernstein[29]는 추정오차의 제곱에 대한 경계를 최소화 함으로써 강인한 관측기를 설계하였다. 이러한 모든 연구에도 불구하고 응용 면에서 잘 적용되지 않는 것은 위의 접근 방법들이 기계섭동이 어떤 분리된 형태에서 일어나거나 어떤 특정한 구조를 갖는 다고 하는 가정 하에 이루어 졌기 때문이다.

따라서 이러한 특별한 가정없이 관측기의 성능을 향상시키기 위하여 Huh and Stein은 연속시간에서의 일반적인 관측기의 성능을 정량적으로 나타내는 성능지표들을 구하고 그 성능지표들을 종합하는 하나의 주지표를 구하여[7] 그 주지표를 최소화함으로써 well-conditioned 관측기를 설계하였다.[30] 본 논문은 이산영역 관측기 시스템에 대한 이러한 성능지표들을 구하고 주지표를 정하는 것을 목적으로 한다.

3. 이산관측기의 성능지표

이 장에서는 이산관측기의 성능을 정량적으로 나타내기 위하여 과도상태와 정상상태로 나누어 각각의 경우

에 대한 ill-conditioning 요소들의 정량적인 영향을 고찰하고 그 영향을 정량적으로 나타내는 성능지표를 결정한다. 그리고 모든 성능지표들을 종합하는 주지표를 결정한다.

3.1. 이산관측기의 과도상태 성능

이 절에서는 두개의 ill-conditioning 요소인 미지의 초기 추정상태값과 라운드 오프 오차가 과도상태의 추정성능에 미치는 영향을 나타내는 성능지표(performance index)를 각각 결정함으로써 과도상태의 성능에 미치는 영향을 나타내도록 한다. 먼저 과도상태에서의 추정오차형상(estimation error shape)의 민감도와 과도상태의 최대 추정오차(maximum transient estimation error)에 대한 미지의 초기 상태추정값의 영향에 대하여 고찰하고, 그 다음에 이산관측기의 고유값 민감도에 대한 이산관측기의 설계와 실제 적용할 때의 라운드 오프 오차의 영향을 고찰한다.

3.1.1. 과도상태의 추정오차형상의 민감도

과도상태의 추정오차형상에 대한 미지의 초기 상태추정값의 영향을 정량화 하는 지표를 결정하도록 한다. 여기서, 과도상태의 추정오차형상은 추정오차의 초기 기울기에 의해 주로 결정되며, 특히 추정오차형상의 민감도는 이산관측기의 초기 상태추정값, 특히 초기 상태추정값의 방향성에 의해 크게 의존함을 보이고 있다.

다음의 선형 이산 상태공간 방정식이 플랜트에 대한 정확한 모델이라고 가정하자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Hx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$, $y \in R^q$, $u \in R^m$ 이다. 그리고 모델식(1)에 대한 Luenberger[1]의 이산관측기는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{x}(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + L(y(k) - H\hat{x}(k)) \tag{2}$$

여기서 $\hat{x} \in R^n$은 상태추정변수이다. 식(1)과 (2)로부터 추정오차 방정식은 다음식으로 표현되며:

$$\begin{aligned} e(k+1) &= (\Phi - LH)e(k) \\ &= \Phi_1 e(k) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$이고 $\Phi_1 = \Phi - LH$은 이산관측기행렬이다.

미지의 초기 추정오차 $e(0)$에 의한 이산관측기의 과도상태의 추정오차형상을 나타내기 위해, 다음식에서와 같이 추정오차의 초기 기울기를 고려한다.

$$\begin{aligned} \left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} &\fallingdotseq \frac{1}{T}\{e(1) - e(0)\} \\ &= \frac{1}{T}\{\Phi - LH - I\}e(0) \\ &= \frac{1}{T}\Phi_2 e(0) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\Phi_2 = \Phi - LH - I$ 이고 T는 샘플링 주기이다. 이산관측기의 추정오차형상에 대한 초기 추정오차 $e(0)$의 영향은 식(4)의 행렬 Φ_2에 다음의 특이값분리(Singular Value Decomposition)를 적용함으로써 알아볼 수 있다.

$$\Phi_2 = U\Sigma V^H \tag{5}$$

여기서 U와 V는 각각 좌측특이행렬과 우측특이행렬이고 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} U &= [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; \cdots \;\; u_n] \\ V &= [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; \cdots \;\; v_n] \\ \Sigma &= diag[\sigma_1 \;\; \sigma_2 \;\; \sigma_3 \;\; \cdots \sigma_n] \end{aligned} \tag{6}$$

식(4)와 (5)로부터 추정오차의 초기 기울기는 다음식과 같이된다.

$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k u_k v_k^H e(0) \tag{7}$$

여기서 u_k와 v_k는 각각 좌측특이행렬과 우측특이행렬의 k번째 열벡터이다. 초기 상태추정오차의 방향에 의한 영향을 고찰하기 위해 초기 상태추정오차 $e(0)$를 다음과 같이 표현하면:

$$e(0) = e_0 \varepsilon(0) \tag{8}$$

여기서 $e_0 = \| e(0) \|_2$이고 $\varepsilon(0) = e(0)/e_0$이다.

만약에 $\varepsilon(0)$가 우측특이행렬 V의 열벡터 중 하나와 같다 ($\varepsilon(0) = v_i$)고 하면 $v_k^H e(0)$는 $k \neq i$일 때 0이 되어 식(7)은 다음과 같이된다.

$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}\sigma_i u_i e_0 \tag{9}$$

위 식에서 추정오차의 초기 기울기는 크기가 $\sigma_i e_0 /$

T 이고 u_i의 방향으로 놓인다는 것을 알 수 있다. 따라서 특이값들 사이의 크기 차가 크다면 식(9)에서의 추정오차의 초기기울기는 초기값의 방향에 따라 매우 민감하게 된다. 과도상태의 초기 기울기의 크기는 $\| u_i \|_2 = 1$이므로 다음식과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{T}\sigma_n(\Phi_2) \le \frac{\left\| \left| \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=0} \right\|_2}{e_0} \le \frac{1}{T}\sigma_1(\Phi_2) = \frac{1}{T}k_2(\Phi_2)\sigma_n(\Phi_2) \quad (10)$$

여기서 $k_2(\Phi_2) = \dfrac{\sigma_1(\Phi_2)}{\sigma_n(\Phi_2)}$ 이고 (11)

$k_2(\Phi_2)$는 L_2 노움으로 정의되는 행렬 $(\Phi - LH - I)$의 condition number이다.

식(10)는 초기 상태추정값의 방향에 대한 추정오차의 초기기울기 민감도를 나타내고 이 민감도의 크기를 결정하는 지표가 condition number $(k_2(\Phi_2))$임을 보여준다. 예로써 이산관측기의 condition number가 크다면 이산관측기의 과도상태의 추정오차형상은 초기 상태추정값의 선택, 특히 방향에 매우 민감해 진다. 따라서 초기 상태추정값을 u_n의 방향으로 선택할 수 있다면 과도상태의 추정오차를 매우 줄일 수 있다. 또한 condition number를 1에 가깝게 만들 수 있다면 이산관측기의 과도상태 추정오차형상은 초기 상태추정값의 방향에 무관하게(크기는 일정하다는 가정 하에) 일정하게 된다. 그러나 대부분의 경우 상태변수의 초기 상태추정값을 모르기 때문에, 초기 상태추정값의 선정에 관계없이 신뢰성 있는 상태추정성능을 얻기 위해서는 $k_2(\Phi_2)$가 최소화되어야 한다.

3.1.2. 과도상태의 추정오차크기

이 절에서는 과도상태의 추정오차크기에 대한 미지의 이산관측기 초기 상태추정값의 영향을 고찰하고 그 영향을 나타낼 수 있는 정량적인 지표를 결정한다. 과도상태에서 추정오차의 크기는 기계감시를 위한 이산관측기의 응용문제에 있어서 매우 중요하고 그 크기는 과도상태의 최대 추정오차 또는 적분 추정오차로 나타낼 수 있다. 이러한 최대 추정오차와 적분 추정오차의 크기는 행렬노움(즉 $\|\cdot\|_1$)으로 정량화 될 수 있고, 각각에 대한 상한값은 행렬노움 성질을 이용하여 구해진다.

이산관측기가 서로 다른 고유값을 갖는다고 가정하면 이산관측기의 고유시스템은 다음식과 같이 쓸 수 있다.

$$(\Phi - LH)P = PM_O \quad (12)$$

여기서 $M_O = diag[\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \cdots \mu_n]$: 고유값행렬

$P = [p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_n]$: 정규화 된 고유벡터행렬, $\| p_i \|_2 = 1$ $for\ i = 1, 2, \cdots, n$. 식(3)과 (12)로부터 스텝 k에서의 추정오차의 응답은 다음과 같이 표현된다.

$$e(k) = (\Phi - LH)^k e(0) = PM_O^k P^{-1} e(0) \quad (13)$$

여기서 $e(0)$는 초기 추정오차이다. 위 식에 L_1 노움을 적용하고 행렬노움의 성질을 이용하면 추정오차의 노움에 대한 상한값이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \| e(k) \|_1 &= \| PM_O^k P^{-1} e(0) \|_1 \\ &\le \| P \|_1 \| M_O^k \|_1 \| P^{-1} \|_1 \| e(0) \|_1 \\ &= k_1(P) \max_j | \mu_j^k | \, \| e(0) \|_1 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $k_1(P) = \| P \|_1 \| P^{-1} \|_1$ 이고 (15)

$k_1(P)$는 L_1 노움에 의한 고유벡터행렬 P의 condition number이다. 위 식에서 이산관측기의 극점은 단위원 내에 있어야 하고 초기 추정오차는 모르기 때문에 과도상태의 추정오차의 절대값의 합은 condition number $k_1(P)$에 의해서만 조절할 수 있다.

추정오차의 노움의 적분값을 얻기 위해 식(14)를 적분하면

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \| e(t) \|_1 \, dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \| e(k) \|_1 \\ &\le k_1(p) \sum_{k=0}^{\infty} \max_j \left| \mu_j^k \right| \| e(0) \|_1 \\ &= k_1(p) \frac{1}{1 - \max_j \left| \mu_j \right|} \| e(0) \|_1 \end{aligned} \quad (16)$$

이 된다. 위 식에서 보면 과도상태의 적분 추정오차의 상한값을 조절할 수 있는 유일한 지표는 condition number $k_1(P)$임을 알 수 있다. 왜냐하면 식(16)의 우측에서 초기 추정오차의 노움은 초기 상태추정값을 모르기 때문에 조절할 수 없고 최대 크기를 갖는 이산관측기의 극점은 요구되는 수렴속도에 의해 결정되기 때문이다. 반면에 condition number $k_1(P)$는 이산

관측기 행렬 $\Phi - LH$의 구조와 고유값에 의존하기 때문에 이산관측기 설계과정에서 감소시킬 수 있다. 따라서 작은 condition number를 갖는 이산관측기는 과도상태의 추정오차가 작은 상한값을 갖는 것을 보장한다고 할 수 있다.

3.1.3. 이산관측기의 고유값에 대한 라운드 오프 오차의 영향

이산관측기 설계에서 라운드 오프 오차의 영향은 이산관측기의 게인을 변화시키고 이산관측기의 대표극점을 변화시키게 되어 요구되는 상태추정 속도를 만족시키지 못하는 경우가 발생할 수도 있다. 따라서 라운드 오프 오차의 영향을 나타내는 성능지표는 이산관측기행렬의 고유값의 민감도를 나타내도록 선택되어야 한다.

이산관측기 설계에서 라운드 오프 오차가 일어나는 경우는 다음의 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

Case I : 이산관측기 설계 단계에서 라운드 오프 오차가 발생할 경우

$$L \rightarrow L + \varepsilon E \tag{17}$$

여기서 E는 오차배열행렬로서 절대값이 1보다 작은 요소 e_{ij}를 갖고 $\varepsilon \ll 1$이다.

Case II : 이산관측기의 실제 적용 단계에서 라운드 오프 오차가 발생할 경우

$$(\Phi - LH) \rightarrow (\Phi - LH + \varepsilon \Delta o) \tag{18}$$

여기서 $\varepsilon \ll 1$이고 $\| \Delta o \|_2 < n$이다

위의 Case II에서 Δo를 EH로 대치시키면 Case I과 같게 되기 때문에 Case I만을 고려한다. 식(17)의 라운드 오프 오차는 대표극점에 대하여 다음과 같은 영향을 줌을 알 수 있다(Wilkinson[8]).

$$|\mu_1 - \mu_1'| = \varepsilon \frac{|q_1^T EHp_1|}{|q_1^T p_1|} \le \frac{\|EH\|_2}{|q_1^T p_1|} \tag{19}$$

여기서 E는 각 요소들의 크기가 1보다 작은 추정오차 배열 행렬이고 ε는 추정오차의 노옴 크기이다. 그리고 μ_1은 대표극점이고 p_1과 q_1는 각각 μ_1에 대응하는 크기가 1인 우측 고유벡터와 좌측 고유벡터이다. 식(19)에서 보면 이산관측기의 대표극점에 대한 라운드 오프 오차의 영향을 나타내는 가장 중요한 지표는 $1/|q_1^T p_1|$이 됨을 알 수 있다. 따라서 $|q_1^T p_1| = 1$이 되도록 고유벡터 P를 선택할 수 있다면 이산관측기 게인을 실제 적용할 때 이산관측기의 극점에 대해 작은 추정오차를 갖도록 할 수 있다.

3.2. 이산관측기의 정상상태에서의 정확도

임의의 플랜트 섭동과 센서편차에 대한 이산관측기의 정상상태의 추정오차에 대하여 고찰한다. 플랜트 섭동과 센서편차의 두 가지 ill-conditioning 요소들이 이산관측기의 정상상태 정확도 추정오차에 미치는 영향들을 나타내는 지표를 결정하도록 한다.

다음식이 플랜트에 섭동이 발생하여 앞에서 사용된 모델식(1)과 차이가 있는 실제 플랜트를 나타낸다고 가정하자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \underline{\Phi} x(k) + \underline{\Gamma} u(k) \\ y(k) &= Hx(k) \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 $x \in R^n$, $y \in R^q$, $u \in R^m$이다. 식(1)은 위 식과는 차이가 있는 불확실성(uncertainty)을 갖는 플랜트의 모델이다. 그리고 플랜트의 입력과 출력에 대한 센서출력이 편차를 갖는다면 다음식으로 표현할 수 있다. 단, 여기서는 잡음(noise)의 영향은 고려하지 않는다.

$$\begin{aligned} u'(k) &= u(k) + \delta u \\ y'(k) &= y(k) + \delta y \end{aligned} \tag{21}$$

여기서 δu와 δy는 입력과 출력을 센싱 하는데 있어서의 센서편차(sensor bias)를 나타낸다. 시스템 모델(식(1))과 측정치(식(21))로부터 플랜트(20)에 대한 이산관측기를 설계하면:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u'(k) + L(y'(k) - H\hat{x}(k)) \\ &= (\Phi - LH)\hat{x}(k) + \Gamma u'(k) + Ly'(k) \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 $\hat{x} \in R^n$는 상태추정벡터이다. 추정오차방정식은 식(20)과 (22)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} e(k+1) &= (\Phi - LH)e(k) - \{(\Phi - \underline{\Phi})x(k) \\ &\quad + (\Gamma - \underline{\Gamma})u(k) + \Gamma \delta u + L\delta y\} \\ &= (\Phi - LH)e(k) - \gamma \end{aligned} \tag{23}$$

여기서 γ는 $\{(\Phi - \underline{\Phi})x(k) + (\Gamma - \underline{\Gamma})u(k) + \Gamma \delta u + L\delta y\}$로 정의되며 모델링 오차와 센싱편차에 의한 섭동벡터이다. 만약 이산관측기의 정상상태 정확도만을 고려한다면 식(23)의 정상상태의 해는 다음식으로 된다. 여기서 $\Phi - LH$는 서로 다른 고유값을 갖는다고 가정한다.

$$e_{ss} = \Phi_2^{-1}\{(\Phi - \underline{\Phi})x_{ss} + (\Gamma - \underline{\Gamma})u_{ss} + \Gamma\delta u + \Gamma\delta y\} \tag{24}$$

여기서 $\Phi_2 = \Phi - LH - I$이다. 위 식에 L_2 노옴을 적용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\| e_{ss} \| &= \| \Phi_2^{-1}\{(\Phi - \underline{\Phi})x_{ss} + (\Gamma - \underline{\Gamma})u_{ss} \\ &\qquad + \Gamma\delta u + L\delta y\} \|_2 \\ &\le \| \Phi_2^{-1} \|_2 \{\| \Phi - \underline{\Phi} \|_2 \| x_{ss} \|_2 \\ &\qquad + \| \Gamma\delta u + L\delta y \|_2\} \\ &\le \frac{k_2(\Phi_2)}{\| \Phi_2 \|_2}\{\| \Phi - \underline{\Phi} \|_2 \| x_{ss} \|_2 \\ &\qquad + \| \Gamma - \underline{\Gamma} \|_2 \| u_{ss} \|_2 \\ &\qquad + \| \Gamma\delta u + L\delta y \|_2\}\end{aligned} \tag{25}$$

여기서 $k_2(\Phi_2) = \| \Phi_2 \|_2 \| \Phi_2^{-1} \|_2$이고 실제 상태벡터에 대한 상대추정오차(relative estimation error)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\| e_{ss} \|_2}{\| x_{ss} \|_2} \le k_2(\Phi_2)\left\{\begin{matrix}\dfrac{\| \Phi - \underline{\Phi} \|_2}{\| \Phi_2 \|_2} + \dfrac{\| \Gamma - \underline{\Gamma} \|_2}{\| \Phi_2 \|_2} \cdot \\ \dfrac{\| u_{ss} \|_2}{\| x_{ss} \|_2} + \dfrac{\| \Gamma\delta u + L\delta y \|_2}{\| \Phi_2 \|_2 \| x_{ss} \|_2}\end{matrix}\right\} \tag{26}$$

식(23)에 있는 섭동벡터 γ가 임의의 방향으로 놓인다면 식(26)의 상한값의 식에서 행렬 Φ_2의 condition number는 유일하게 조절할 수 있는 부분이 된다. 따라서 위 식은 condition number $k_2(\Phi_2)$가 너무 크지 않고 괄호 안의 크기가 작다면 상대 추정오차는 작게 될 것이라는 것을 보여준다.

이상 앞의 2.1절과 2.2절에서 구해진 이산관측기의 성능지표들을 종합하면 Table 1과 같다. Table 1의 결과를 연속시간에서의 연구결과[7]와 비교해보면 행렬식의 형태는 다르지만 기본적인 Index의 종류는 동일하다.

Table 1 Performance indices for the discrete-time state observer.

성 능 평 가 요 소	상 한 값	성 능 지 표
초기 추정상태값에 대한 과도상태 추정오차형상의 감도	식(10)	$\kappa_2(\Phi - LH - I)$
과도상태의 최대오차크기와 과도상태의 적분오차	식(14) & (16)	$\kappa_1(P)$
라운도 오프 오차에 대한 고유값 감도	식(19)	$\frac{1}{\lvert q_i^T p_i \rvert}$
플랜트 섭동과 입출력 센싱편차에 대한 정상상태의 정확도 강인성	식(26)	$\kappa_2(\Phi - LH - I)$

4. Example

앞장에서 고찰한 ill-conditioning 요소들의 영향을 서어보 드라이브 예제를 통해 보일 것이다. 여기서 서어보 드라이브 예제는 연속시간의 경우[7]에서도 사용되었던 실험장치에 대한 재검토이다. 이 서어보 드라이브 시스템의 파라미터들은 시불변이라고 가정하고 0.001초로 샘플링하여 다음과 같이 구해진다. 목적은 모터 전압과 속도로부터 부하모우멘텀 $(x_3(k))$을 추정하는 관측기를 설계하는 것이다.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Hx(k)\end{aligned} \tag{27}$$

여기서,

$$x(k) = \begin{bmatrix}x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k)\end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix}0.7865 & 0.1782 & 0.4079 & -0.8753 \\ -0.1336 & 0.5905 & -0.0262 & 0.1082 \\ 0.5099 & 0.0437 & -0.2697 & 2.5822 \\ 0.1094 & 0.0180 & -0.2582 & -0.4138\end{bmatrix}$$

$$\Gamma = 10^{-3} \times \begin{bmatrix}0.1012 \\ 0.7810 \\ 0.0121 \\ 0.0074\end{bmatrix}$$

$$u(k) = V, \quad H[1\ 0\ 0\ 0]$$

0.025초의 시간상수를 갖는 Luenberger 관측기는 우선 원하는 관측기 극점의 위치를 정하고 극점배치 방법으로 설계되었다.

Desired poles : $\Lambda_0 = Diag\{0.96\ 0.95\ 0.94\ 0.93\}$

Designed gain: $L = [-3.0865\ 0.254742871\ 9.02095417\ -1.95082028]^T$

Designed eigenvalues: $eig\ (\Phi - LH) = \{0.9599\ 0.9502\ 0.9398\ 0.9301\}$ (28)

본 논문에서 제안되는 ill-conditioning 요소들의 영향에 대하여 설계된 관측기의 추정성능을 고찰한다. 특히, 실제 오차들과 상한값들을 비교함으로서 본 논문에서 연구된 성능지표들의 유용성을 보일 것이다. Table 1의 성능지표들은 설계된 관측기에 대하여 다음과 같은 값들을 갖는다.

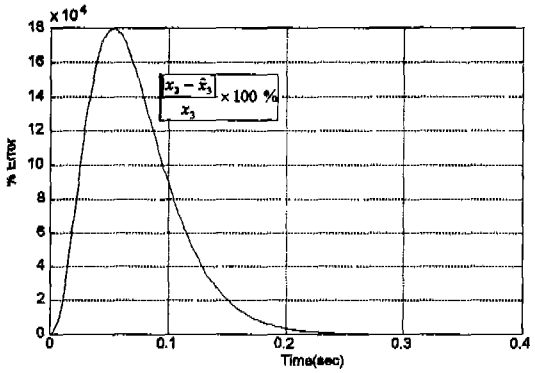

Fig. 1 Estimation error of $\hat{x}_3(t)$ from the conventional observer
(Case I: With zero initial condition)

$$k_2(\Phi - LH - I) = 4.7448e+6$$
$$k_1(P) = 6.6510e+6 \qquad (29)$$
$$\frac{1}{|q_1^T p_1|} = 6.1626e+5$$

4.1. 초기값에 대한 과도상태의 오차형상의 민감도

Case I : $e_1(0)$만 0일 경우($x_1(0)$은 측정되기 때문에)

Fig. 1은 상태변수의 추정 결과중 하나인 부하 모우멘트, $\hat{x}_3(t)$를 나타낸 것이다. 초기 오차값의 유클리디안 노옴이 작고 ($\|e(0)\|_2 = 0.1744$) 정상상태에서는 오차가 0으로 됨에도 불구하고 과도상태에서 매우 큰 오차를 발생함을 보여주고 있다. 이러한 과도상태의 오차는 이 관측기를 기초로 한 기계진단 시스템에서 잘못된 경보(alarm)를 발생시켜서 큰 문제를 야기시킬 수 있다.

Case II : 방향 해석에 의해 초기 상태추정값이 선정될 경우

앞에서 관측기가 매우 ill-condition이라는 것을 알 수 있다. 따라서 이 관측기의 과도상태에서의 특성은 식(9)에서 나타난 것처럼 초기 상태추정값의 방향에 매우 민감하다. 만약에 초기조건을 $[0.686\ -0.0235\ -0.6109\ 0.557]^T$로 놓았을 때 $\hat{x}_3(t)$에 대한 추정결과가 Fig. 2에 도시되어 있다. 그림으로부터 초기 오차의 유클리디안 노옴 ($\|e(0)\|_2 = 1.00$)이 Case I보다 더 크지만 과도상태의 추정오차 모양이 Case I보다 훨씬 더 좋다는 것을 알 수 있다. 여기서는 관측기의 초기

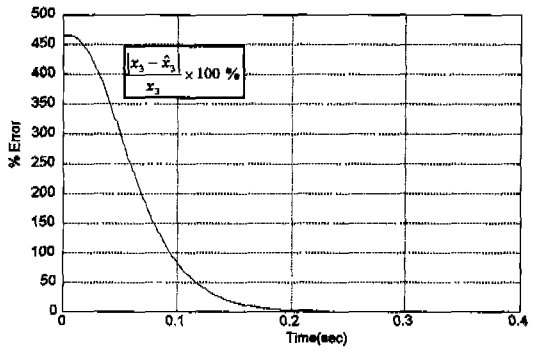

Fig. 2 Estimation error of $\hat{x}_3(t)$ from the conventional observer
(Case II: With the directionality analysis)

상태추정값의 선택에 대한 가이드라인을 제안하는 것이 목적이 아니라 ill-conditioned 관측기가 초기상태의 선택에 대하여 매우 민감하다는 것을 보여주는 것이 목적이다. 이러한 해석은 선택된 초기상태에 있어서 과도상태 모양의 높은 민감도는 성능 지표의 큰 값으로부터 예상될 수 있다는 것을 보여준다. 즉 성능지표에 있어서의 작은 값은 과도상태 오차가 일정한 형상을 갖는다는 것을 보장한다.

4.2 과도상태의 적분 추정오차의 크기

이 예제의 시뮬레이션 결과로부터 L_1노옴에 의한 과도상태의 최대 추정오차 $\max_k \|e(k)\|_1$과 과도상태의 적분 추정오차를 계산할 수 있다. 이러한 값들에 대한 상한값은 식(29)의 지표값을 토대로 식(14)과 (16)를 이용하여 계산할 수 있다. 각각의 상한값들은 Table 2에 있고 예상대로 실제값들보다 더 크다는 것을 알 수 있다.

4.3 고유값 민감도

식(28)에 있는 관측기 게인값은 9-digit임에도 불구하고 정확한 극점을 주지는 못하고 있다. 관측기 게인을 선택할 때의 라운드 오프 오차는 다음과 같고

$$\varepsilon E = 1e-8 \times \begin{bmatrix} -0.0142 \\ -0.0139 \\ 0.1992 \\ 0.4261 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Table 2 Comparison of the upper bounds and the actual simulated results

성능 평가 인자	상 계	실 계 값
과도상태 최대 추정오차 $\|e(k)\|_1$ (식(14))	≤1.4331e+6	=6.5331e+2
과도상태의 적분 추정오차 $\sum_{k=0}^{\infty}\|e(k)\|_1$ (식(16))	≤3.3769e+7	=5.4076e+4
라운드 오프 오차에 의한 극점배치에서의 오차 : $\|\mu_1-\mu_1'\|$ (식(19))	≤0.0029	=0.0001
정상상태 오차 (식(26))		
모델링 오차 $\|\Delta\Phi\|_2=0.0439$	≤2.1334e+6%	=1.4980e+4%
2% 입력 센싱편차 $\|\Gamma\delta u\|_2=0.0016$	≤1.9124e+5%	=9.0944e+4%
2% 출력 센싱편차 $\|L\delta y\|_2=0.0782$	≤9.4882e+6%	=9.0944e+4%

오차에 대한 상한값은 식(26)의 지표값을 이용하여 구할 수 있으며 Table 2에 비교되어 있다.

4.4. 정확도 강인성

플랜트 섭동 그리고 입력 및 출력 측정 bias오차의 세가지 경우에 대하여 정상 상태의 정확도 강인성을 검토한다. 추정 정확도에 대한 성능지표들의 영향을 보이기 위해 각 경우에 대하여 설계된 관측기를 시뮬레이션 한다.

1) 모델링 오차

위의 시스템이 작동하고 있을 때 load bearing의 감쇠상수가 초기상태의 반으로 감소한다고 가정한다.(이러한 현상은 매우 자주 일어나는 현상이다.) 이때 $\hat{x}_3(t)$에 대한 추정결과가 Fig. 3에 도시되어 있으며 엄청난 오차를 보이고 있다. 그리고 이러한 섭동은 L_2노음에 의해 그 크기를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|\Phi-\Phi\|_2=0.0439 \tag{31}$$

식(29)에 있는 성능지표값과 관측기의 L_2노음 크기

$$\|\Phi-LH-I\|_2=9.9730 \tag{32}$$

를 토대로 식(26)으로부터 정확도 오차에 대한 상한값을 계산할 수 있으며 Table 2에서 실제값과 비교되어 있다.

2) 입·출력에 센싱 bias오차가 있을 때

먼저 시스템 행렬 Φ는 정확하고 입력 측정치에 2%의 bias 오차가 존재한다고 가정한다. 이때의 센싱오차는 L_2노음에 의하여 다음과 같이 표현된다.

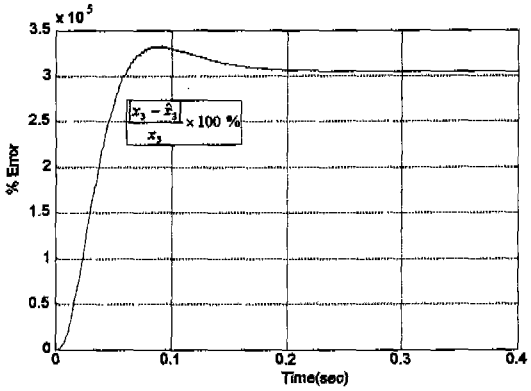

Fig. 3 Estimation error of $\hat{x}_3(t)$ from the conventional observer
(with the plant perturbation)

$$\|\Gamma\delta u\|_2=0.0016 \tag{33}$$

그리고 출력에 2%의 bias오차가 존재한다고 가정했을 경우 센싱오차는 L_2노음에의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\|\Gamma\delta y\|_2=0.0782 \tag{34}$$

각각의 경우에 대하여 식(29)에 있는 성능지표값과 관측기의 L_2노음 크기를 가지고 식(26)으로부터 정확도 오차에 대한 상한값을 계산할 수 있으며 Table 2에서 실제값과 비교되어 있다. Condition number가 큰 값을 갖는다는 것은 입출력의 센싱 bias오차에 의해 큰 정상상태 오차가 발생할 수 있다는 것을 의미한다.

5. 관측기 설계를 위한 주지표 결정

관측기를 기초로 한 감시시스템의 성능을 위해서는 모든 상한값 또는 지표들을 최소화해야 한다. 관측기의 성능에 대한 ill-conditioning 요소들의 영향이 작다는 의미에서 성능지표들이 최소화된 관측기가 well-conditioned 관측기이다.

단순한 방법으로 관측기의 conditioning을 정량화하고 well-conditioned 관측기를 위한 설계방법을 만들기 위해서는 모든 성능지표들을 대표하는 하나의 지표를 결정해야 한다. 모든 성능지표를 동시에 최소화하는 관측기 게인 L을 선택하는 것은 쉽지가 않기 때문에 위의 과정은 반드시 필요하다. 그러나 다행히도 Table 1에 있

는 모든 성능 지표들을 지배할 수 있는 또 다른 지표가 존재하며 그것은 다음식으로 주어지는 L_2노옴 정의에 의한 고유벡터 행렬 P의 condition number이다.

$$k_2(P) = \| P \|_2 \| P^{-1} \|_2 \tag{35}$$

즉 Table 1에 있는 성능지표들과 위의 지표사이에는 다음의 상관관계가 성립하며

$$k_1(P) \le n k_2(P)$$
$$\frac{1}{|q_1^T p_1|} \le k_2(P) \tag{36}$$
$$k_2(\Phi - LH - I) \le k_2(P)^2 \frac{\max_i |\mu_i - 1|}{\min_j |\mu_j - 1|}$$

위에서 처음 두 개의 식은 Golob and Van Loan[31]과 Stewart[32]에 각각 나와 있고 세 번째 식의 유도는 부록에 있다.

식(28)로부터 이산관측기의 고유벡터행렬의 condition number $k_2(P)$가 이산관측기 설계단계에서 최소화되어야 하는 첫 번째 지표가 됨을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서는 well-conditioned 이산관측기에 대한 주지표(main index)로서 $k_2(P)$를 제안한다. 이 지표가 일단 최소화된 후 그 다음으로 성능지표 $k_2(\Phi_2)$가 작은 값을 갖게 하기 위하여

$$\max_j |\mu_i - 1| / \min_j |\mu_j - 1|$$

의 값이 작게 해야 한다. 예로서 5절의 예제에 대한 주지표는

$$k_2(P) = .5.0662e + 6$$

이 되어 매우 큰 주지표 값으로부터 5절의 이산관측기가 ill-conditioning 요소들에 대하여 매우 민감하다는 것을 예측할 수 있다. 따라서 주지표를 작게 함으로써 민감하지 않은 well-conditioned 이산관측기를 설계하는 것이 가능하게 된다. 연속시간 영역에서의 well-conditioned 관측기를 설계하는 방법은 Huh and Stein[30]에서 발표되었다.

6. 결 론

관측기의 성능에 있어서 과도상태의 오차형상, 라운드 오프 오차에 의한 고유값 민감도, 그리고 플랜트 섭동과 센싱편차에 의한 정확도 강인성에 미치는 영향 등을 정량적으로 표현하고 이로부터 성능지표들을 구하였다. 즉 관측기 성능은 다음의 세 가지 지표로 나타내어진다: 1) 행렬 $(\Phi - LH - I)$의 L_2노옴에 근거한 condition number, 2) L_1노옴에 근거한 고유벡터 행렬 P의 condition number, 그리고 3) 대표극점에 대응하는 우측 고유벡터와 좌측 고유벡터의 내적의 역수. 또한, 이 지표들의 상관관계로부터 관측기의 전체 성능을 나타내는 주지표(main index)는 관측기행렬 $(\Phi - LH - I)$의 고유벡터행렬 P의 L_2노옴에 근거한 condition number가 됨을 보였다. 그리고 작은 주지표 값을 갖는 이산관측기는 추정오차에 작은 상한값을 갖게 되어 이산관측기의 상태추정 성능이 좋다는 것을 보장하게 된다.

이 주지표의 중요성은 크게 두 가지로 볼 수 있다. 첫째 임의의 방법으로 설계된 이산관측기가 적용되기 전에 그 관측기의 주지표 값으로부터 추정성능을 예상할 수 있으며, 둘째 이 주지표를 최소화하면서 추정성능이 뛰어난 관측기를 설계 가능하게 해준다. 이 두 가지가 본 논문에서 보여주는 주된 기여도가 된다.

후 기

이 논문은 한국학술진흥재단의 공모과제에 의하여 연구된 결과이며 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

1. D. G. Luenberger, "Observers for Multivariable systems," IEEE Transcations on Automatic control, Vol.AC-11, pp.190-197, 1966.
2. K. Janssen and P. M. Frank, "Component Failure Detection via State Estimation," IFAC 9th World Congress, Budapest, Hungary, Vol.1, pp.2213-2218, 1984.
3. W. B. Ribbens and R. N. Riggins Jr.,

"Detection and Isolation of Plant Failures in Dynamic Systems," American Control Conference, pp.1514-1521, 1991.
4. W. C. Merrill, J. C. DeLaat and W. M. Bruton, "Advanced Detection, Isolation, and Accommodation of Sensor Failures-Real-Time Evaluation," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.11, No.6, pp.517-526, 1988.
5. H. Waller and R. Schmidt, "The Application of State Observers in Structural Dynamics," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.4, No.3, pp.195-213, 1990.
6. J. Handscombe, "Diagnostics Through the 80s And into the 90s," Control Engineering, Nov., pp.124-132, 1990.
7. K. Huh and J. L. Stein, "A Quantitative Performance Index for Observer-Based Monitoring Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.116, pp.487-497, 1994.
8. J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
9. E. G. Gilbert, "Conditions for Minimizing the Norm Sensitivity of Characteristic Roots," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.29, No.7, pp.658-661, 1984.
10. W. A. Berger, R. J. Perry, and H. H. Sun, 1989, "Eigenvalue Sensitivity in Multivariable Systems," IEEE Proceedings, CH2767-2, pp.433-436.
11. S. K. Spurgeon, "Pole placement Extensions for Multivariable Systems-A Survey," American Control Conference, Vol.2, pp.1660-1665, 1990.
12. B. C. Moore, and G. Klein, "Eigenvector Selection in the Linear Regulator Problem: Combining Modal and Optimal Control," Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, pp.214-245 1976.
13. A. N. Jr. Andry, J. C. Chung and E. Y. Shapiro, "Modalized Observers," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-29, No.7, pp.669-672, 1984.
14. R. E. Skelton, and D. A. Wagie, "Minimal Root Sensitivity in Linear Systems," Journal of Guidance, Vol.7, No.5, pp.570-574, 1984.
15. J. Kautsky, N. K. Nichols, and P. Van Dooren, "Robust Pole Assignments in Linear State Feedback," International Journal of Control, Vol.41, No.5, pp.1129-1155, 1985.
16. H. R. Petkov, P. N. D. Christov, and M. M. Konstantinov, "A Computational Algorithm for Pole Assignment of Linear Multiinput Systems," IEEE Transactions on Automatic Cotrol, Vol.AC-31, No.11, pp.1044-1047, 1986.
17. A. Dickman, "On the Robustness of Multivariable Linear Feedback System in State-Space Representation," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-32, No.5, pp.407-410, 1987.
18. K. M. Sobel, S. S. Banda, and E. Y. Shapiro, "Robust Modalized Observer with Flight Control Application," Proceedings for the 27th Conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp.1018-1019, 1988.
19. A. Haraldsdottir, P. T. Kabamba, and A. G. Ulsoy, "Sensitivity Reduction by State Dreivative Feedback," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.110, Mar., pp.84-93, 1988.
20. R. Byers, and S. Nash, "Approaches to Robust Pole Assignment," International Journal of Control, Vol.49, No.1, pp.97-117, 1989.
21. L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "State-Space Design of Low-Order Stabilizers," IEEE Transactions on Automatic

Control, Vol.AC-35, No.1, pp.182-186, 1990.
22. S. P. Burrows, and R. J. Patton, "Optimal Eigenstructure Assignment for Multiple Design Objectives," American Control Conference, Vol.2, pp.1678-1683, 1990.
23. J. Changsheng, "New Method of Robust Pole Assignment by Output Feedback," IEE Proceedings-D, Vol.138, No.2, Mar., pp.172-176, 1991.
24. S. P. Battacharyya, "The Structure of Robust Observers," IEEE Transcations on Automatic Control, Vol.21, Aug., pp.581-588, 1976.
25. R. T. Stefani, "Reducing the Sensitivity to Parameter Variations of a Minimum-order Reduced-order Observer," Interational Journal of Control, Vol.35, No.6, pp.983-995, 1982.
26. A. R. Galimidi, and B. R. Barmish, "Robustness of Luenberger Observers: Linear Systems Stabilized Via Nonlinear Control" American Control Conference, Vol.2, pp.968-974, 1984.
27. B. Shafai, and R. L. Carroll, "Design of Proportional-Integral Observer for Linear Time-Varying Multivariable Systems," Proceedings of 24th Conference of Decision and Control, Ft. Lauderdale, FL., Dec., pp.597-599, 1985.
28. T. E. Djaferis, "Robust Observers for Systems with Parameters," Systems and Control Letters, Vol.7, pp.385-394, 1986.
29. W. M. Haddad, and D. S. Bernstein, "Robust, Reduced-Order, Nonstrictly Proper State Estimation Via the Optimal Projection Equations with Guaranteed Cost Bounds," IEEE Transactions on Automatic Cotrol, Vol 33, June, pp.591-595, 1988.
30. K. Huh, and J. L. Stein, 1995, "Well-conditioned Observer Design for Observer-Based Monitoring Systems", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control(Accepted for Publication).
31. G. H. Golob and C. F. Van Loan, Matrix Computations, 2nd Edn., The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1989.
32. G. W. Stewart, Introduction to Matrix Computations, Academic Press, New York and London, 1973.

부 록

단위행렬을 뺀 행렬과 원래의 행렬은 다음과 같이 고유값은 1씩 작아지고 고유벡터는 같다.

$$\Phi - LH = PMP^{-1}$$
$$\Phi - LH - I = P(M-1)P^{-1}$$

이때 식(36)의 세번째식은 다음과 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} k_2(\Phi - LH - I) &= \| \Phi_2 \|_2 \cdot \| \Phi_2^{-1} \|_2 \\ &= \| P(M-I)P^{-1} \|_2 \\ &\quad \cdot \| P(M-I)^{-1}P^{-1} \|_2 \\ &\le \| P \|_2 \cdot \| M - I \|_2 \cdot \| P^{-1} \|_2 \\ &\quad \cdot \| P \|_2 \cdot \| (M-I)^{-1} \|_2 \cdot \| P^{-1} \|_2 \\ &= k_2(P) \frac{\max_i |\mu_i - 1|}{\min_j |\mu_j - 1|} \end{aligned}$$