

# 회전체 베어링계의 불균형 응답을 위한 효율적인 계산 방법

홍성욱\*, 박종혁\*\*

## An efficient method for computation of unbalance responses of rotor-bearing systems

Seong-Wook Hong\* and Jong-Heuck Park\*\*

### ABSTRACT

The unbalance response analysis is one of the essential area in the forced vibration analysis of rotor-bearing systems. Local bearing parameters in rotor-bearing systems are the major sources which give rise to a difficulty in unbalance response computation due to the complicated dynamic properties such as rotational speed dependency and anisotropy. In the present paper, an efficient method for unbalance responses is proposed so as to easily take into account bearing parameters in computation. An exact matrix condensation procedure is proposed which enables the present method to compute unbalance responses by dealing with condensed, small matrices. The proposed method causes no errors even though the computation procedure is based on the small matrices condensed from the full matrices. The present method is illustrated through a numerical example and compared with the conventional method.

**Key words :** rotor-bearing system(회전체 베어링계), unbalance response analysis(불균형 응답 해석), finite element model(유한요소 모델), rotational speed dependency(회전속도 종속성), non-self-adjoint(비자기수반), dynamic stiffness(동강성), matrix condensation(행렬 압축)

### 1. 서론

회전기계에 대한 동특성 해석에는 일찍부터 전달행렬법<sup>(1,2)</sup>을 활용하여 왔으나 근래에는 컴퓨터 기술의 발달과 함께 유한요소법이 보다 널리 사용되고 있다. 회전체

베어링계에 대한 유한요소 해석 방법은 Ruhl<sup>(3)</sup> 과 Gasch<sup>(4)</sup> 등에 의해 시작되어 회전체의 특성을 반영할 수 있도록 자이로 효과나 전단변형, 내부감쇠, 외부토크 등의 효과를 고려한 모델로 발전하여 왔으며 이를 이용한 많은 응용 문제가 다루어져 왔다. 회전체 베어링계와

\* 금오공과대학교 정밀기계공학과(중신회원)

\*\* 삼성전자(주) 산업전자 사업부

정적 구조계의 동특성에 있어서의 가장 큰 차이점 중 하나는 자이로 효과나 베어링 효과 등에 의하여 비자기수반(non-self-adjoint) 특성을 나타낸다는 점이다. 비자기수반 특성을 고려하여 모우드해석을 수행하게 되면 좌측 고유벡터(left eigenvector)와 우측 고유벡터(right eigenvector)가 다르게 나타나며, 좌측 고유벡터는 보조 고유치 문제(adjoint eigenvalue problem)에서 얻어지게 되므로 비대칭 행렬에 대한 고유치 문제를 두번 계산해야 하는 어려움이 있다<sup>(6,8)</sup>. 계산과정 뿐만 아니라 회전체 베어링계에 대한 실험적 모우드해석에서도 일반 구조계에 비해 비자기수반 특성 때문에 복잡한 과정을 필요로 한다<sup>(7)</sup>. 또한 자이로 효과나 베어링 효과 등은 회전속도에 종속되는 특성을 보이므로 회전속도가 달라지면 모든 동특성을 다시 구해야 한다.

회전체에 있어 불균형에 의한 진동응답(불균형 응답)은 가장 보편적인 진동응답이며 회전체 진동을 측정하거나 분석함에 있어 중요한 비중을 차지하고 있다<sup>(8)</sup>. 특히 회전체의 밸런싱<sup>(9,10)</sup>이나 매개변수 규명<sup>(11-13)</sup>에 있어서는 정확한 불균형 응답을 얻는 것이 매우 중요하다. 회전체 베어링계에 대한 불균형 응답 해석에서도 모우드해석에 의한 확장이론을 이용하여 해석적인 결과를 얻을 수 있으나 이미 언급한 바와 같이 계산과정이 어렵고, 또 자이로 효과나 베어링 특성이 회전속도에 따라 변화하기 때문에 모든 속도에서 반복적으로 고유치 문제와 보조 고유치 문제를 풀어야 하므로 매우 비효율적이다. 따라서 대부분의 경우에 직접 계산법이 사용되고 있다. 직접 계산법이란 주어진 불균형 분포 조건에서 정상상태의 동기 응답을 가정, 운동방정식에 대입하여 만들어진 동강성 행렬의 역행렬을 계산하여 불균형 응답을 구하는 방법이다. 직접 계산법도 역행렬 계산에 따른 과도한 계산 시간 소모로 대상 회전체 베어링계가 낮은 자유도로 모델링되는 경우를 제외하고는 매우 비효율적이라 할 수 있다. 이와 같은 문제점을 개선하기 위해 회전체 베어링계가 갖는 회전속도 종속 특성을 고려한 일반화된 고유치 문제를 통해 불균형 응답을 계산하는 방법이 개발되어 그 효율성이 인정되었으나 이때는 비대칭 복소 행렬에 대한 고유치 문제를 다루어야 하므로 대형 회전체 베어링계에서 적용하기에는 다소의 어려움이 있다<sup>(8)</sup>.

본 연구에서는 회전체 베어링계에서 베어링이 비자기수반 특성과 회전속도 종속성을 야기시키지만 국부적으로만 존재한다는 점에 착안하여 베어링 요소에 대해 행렬 압축 기법을 적용하여 불균형 응답을 효과적으로 계

산할 수 있도록 하는 방법을 제안하였다. 그리고 압축된 행렬에 대한 계산을 통해 전체 불균형 응답을 계산할 수 있도록 관계식을 유도하였다. 식유도 과정에는 일반 구조물의 주파수 응답 함수 계산을 위해 개발된 직접 계산법<sup>(14,15)</sup>을 회전체 베어링계에 적용될 수 있도록 변형시켜 사용하였다. 한편 회전체 베어링계에서 자이로 효과도 회전속도에 종속인 특성을 가지며 반대칭(skew symmetric) 행렬로 나타나게 되는데 본 연구에서는 복소좌표를 이용한 불균형 응답 해석을 통해 전방선회(forward whirl)와 후방선회(backward whirl)를 분리해서 고려하여 기존의 비감쇠계 모우드해석 기법에 의해 손쉽게 처리될 수 있도록 하였다. 제안된 방법의 효용성을 검증하기 위해 유한요소법으로 모델링된 회전체 베어링계의 불균형 응답 계산에 본 방법을 적용하였고 기존의 직접 계산법과 비교하여 그 우수성을 입증하였다.

## 2. 회전체 베어링계의 불균형 응답 직접 계산법

회전체 베어링계에 대한 복소 좌표계에서의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(13)</sup> [부록 참조]

$$M\ddot{p} - j\Omega G\dot{p} + C_f\dot{p} + C_b\dot{\bar{p}} + Kp + K_f p + K_b \bar{p} = F \quad (1)$$

식(1)에서 외력이 불균형에 의해 주어진다고 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F = W\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (2)$$

여기서  $\Omega$ 는 회전속도를,  $W$ 는 복소 불균형 벡터를 의미한다.

일반적으로 불균형 응답은 두개의 동조진동(synchronous vibrations), 즉 전방(forward)과 후방(backward) 성분으로 다음과 같이 나누어 쓸 수 있다.

$$p = p_f e^{j\Omega t} + \bar{p}_b e^{-j\Omega t} \quad (3)$$

여기서  $p_f$ 와  $p_b$ 는 각각 불균형 응답의 전방과 후방 선회응답(whirl response) 벡터를 의미한다. 이때 불균형 응답은 식(2), (3)을 식(1)에 대입하여 얻을 수 있다. 즉

$$\begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fb} \\ D_{bf} & D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_f \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W\Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(4)에서 도입한 부분 강성행렬들은 아래와 같이 나

타난다.

$$\begin{aligned} D_{ff} &= -\Omega^2 M + \Omega^2 G + K + K_f + j\Omega C_f \\ D_{bb} &= -\Omega^2 M - \Omega^2 G + K + \bar{K}_f + j\Omega \bar{C}_f \\ D_{fb} &= K_b + j\Omega C_b, \quad D_{bf} = \bar{K}_b + j\Omega \bar{C}_b \end{aligned} \quad (5)$$

결국 불균형 응답은 식(4)의 복소 선형 방정식을 풀어서 얻을 수 있게 되는데, 이때는 일반적으로  $2N \times 2N$ 의 복소 행렬에 대한 역행렬 계산을 수행하여야 한다. 한편 식(4)로부터, 후방 불균형 응답이 없어지는 경우( $p_b = 0$ )는  $D_{bf} = 0$  또는  $p_f = 0$ 로서 첫번째 조건인  $D_{bf} = 0$ 은 베어링의 등방성(isotropy) 조건을 의미한다. 일반적으로 식(4)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p_f \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ff} & H_{fb} \\ H_{bf} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W\Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ff} \\ H_{bf} \end{bmatrix} W\Omega^2 \quad (6)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} H_{ff} & H_{fb} \\ H_{bf} & H_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fb} \\ D_{bf} & D_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

식(7)에서  $H_{ff}, H_{bf}, H_{fb}, H_{bb}$ 를 편의상 불균형 응답 함수(unbalance response function)라고 정의하도록 하며<sup>(13)</sup>, 부분 행렬에 관한 연산공식을 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$H_{ff} = \{D_{ff} - D_{fb} D_{bb}^{-1} D_{bf}\}^{-1} \quad (8-a)$$

$$H_{bf} = -D_{bb}^{-1} D_{bf} H_{ff} \quad (8-b)$$

$$H_{fb} = -H_{ff} D_{fb} D_{bb}^{-1} \quad (8-c)$$

$$H_{bb} = D_{bb}^{-1} - D_{bb}^{-1} D_{bf} H_{ff} \quad (8-d)$$

불균형 응답 함수를 구하면 식(6)으로부터 불균형 응답을 손쉽게 계산할 수 있으며 벨런싱에 많이 사용되는 영향계수는 회전속도의 제곱을 곱하여 구할 수 있다. 불균형 응답식(6)에서  $H_{fb}$ 와  $H_{bb}$ 는 후방가진(backward excitation)에 의한 응답함수이고 불균형에 의한 가진은 전방가진(forward excitation)이므로 영향을 미치지 못함을 알 수 있다. 식(7)을 이용하게 되면 불균형 응답에 직접 관련되는 두개의 불균형 응답 함수, 즉 식(7-a)와 (7-b)만을 구하면 되므로  $N \times N$ 의

행렬에 대한 2번의 역행렬 계산과 행렬곱 연산을 통해 불균형 응답을 계산할 수 있게 된다. 따라서 식(7)을 직접 푸는 방식 보다는 계산시간을 절약할 수 있게 된다. 한편 등방성 베어링의 경우에는  $H_{bf} = 0$ 이므로  $H_{ff} = \{D_{ff}\}^{-1}$  계산만으로 충분하다.

### 3. 불균형 응답 직접 계산법의 개선

#### 3.1 베어링 요소를 제외한 모델의 불균형 응답 함수

원래의 모델을 상점자  $o$ 로, 베어링 요소에 의한 행렬을 상점자  $b$ 로, 그리고 원래의 모델에서 베어링 요소에 의한 행렬성분을 제외한 상태의 보조모델을 상점자  $s$ 로 표시하면 식(5)로부터 다음과 같은 등방성 행렬 관계를 얻을 수 있다.

$$D_{ff}^s = -\Omega^2 M + \Omega^2 G + K : D_{ff}^o = D_{ff}^s + D_{ff}^b \quad (9-a)$$

$$D_{bb}^s = -\Omega^2 M - \Omega^2 G + K : D_{bb}^o = D_{bb}^s + D_{bb}^b \quad (9-b)$$

$$D_{fb}^s = K_f + j\Omega C_f, \quad D_{fb}^o = \bar{K}_f + j\Omega \bar{C}_f \quad (9-c)$$

$$D_{fb}^s = 0 : D_{fb}^o = D_{fb}^b = K_b + j\Omega C_b, \quad (9-d)$$

$$D_{bf}^s = 0 : D_{bf}^o = D_{bf}^b = \bar{K}_b + j\Omega \bar{C}_b \quad (9-e)$$

베어링 요소를 제외한 보조모델(s)에 대한 불균형 응답 함수는 식(8)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_{ff}^s = \{D_{ff}^s\}^{-1} : H_{bb}^s = \{D_{bb}^s\}^{-1} : H_{bf}^s = H_{fb}^s = 0 \quad (10)$$

$H_{ff}^s, H_{bb}^s$ 는 베어링 요소를 제외한 모델(s)의 불균형 응답 함수로서 행렬  $M, G, K$ 는 모두 대칭이고 양한정치이거나 준 양한정치이므로 일반적인 구조물의 비감쇠계에 대한 문제와 동일하게 되어 모우드해석을 이용하면 손쉽게 해석적인 계산결과를 얻을 수 있다.  $H_{ff}^s$ 에 대해서 고전적인 모우드해석 기법을 이용해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$H_{ff}^s = \{D_{ff}^s\}^{-1} = \sum_{r=1}^N \frac{u_r u_r^t}{\omega_r^2 - \Omega^2} \quad (11)$$

이때 고유치와 고유벡터는 다음의 고유치 문제를 풀어 결정할 수 있다.

$$\{-\omega_r^2(M - G) + K\}u_r = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

여기서 고유벡터는 아래에 주어진 직교성을 만족할 수 있다.

$$\begin{aligned} u'_f(M-G)u_f &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\ u'_f K u_f &= \omega_f^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker 델타이다. 식(12)에서 얻어지는 고유치와 고유벡터는 베어링을 배제한 계에 대한 전방 임계속도(forward critical speed) 및 해당 모우드벡터에 대응된다.

식(11)과 유사하게  $H_{bb}^s$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$H_{bb}^s = \{D_{bb}^s\}^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{u_{bi} u'_{bi}}{\omega_{bi}^2 - \Omega^2} \quad (14)$$

여기서 고유치와 고유벡터는 다음의 고유치 문제를 만족한다.

$$\{-\omega_{bi}^2(M+G)+K\}u_{bi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

그리고 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 직교성을 만족할 수 있다.

$$\begin{aligned} u'_{bi}(M+G)u_{bj} &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\ u'_{bi} K u_{bj} &= \omega_{bi}^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

식(15)의 고유치 문제에서 얻어지는 고유치와 고유벡터는 베어링을 배제한 모델의 후방 임계속도(backward critical speed) 및 해당 모우드벡터에 대응된다.

결국 식(11)과 (14)를 이용하면 베어링이 배제된 모델(s)에 대한 불균형 응답 함수를 간단한 비감쇠계에 대한 고유치 문제의 결과를 이용하여 표현할 수 있음을 알 수가 있다. 일반 좌표계를 사용하는 경우, 베어링을 고려하지 않더라도 자이로 행렬에 의해 비자기수반 특성을 갖는 식이 얻어지지만 기술한 바와 같이 복소 좌표계를 이용하여 전방과 후방 응답으로 분리시키면 자기수반 특성을 갖는 식으로 유도됨을 알 수 있다.

### 3.2 개선된 불균형 응답 함수 계산식

베어링에 관련된 요소가 국부적으로 존재하게 되면 변환행렬을 도입하여 아래와 같이 압축행렬로 다시 쓸 수 있다.

$$D_{ij}^b = T_m^t d_{ij}^b T_m \quad i, j = f, b \quad (17)$$

여기서  $d_{ij}^b$ 는 베어링 행렬을 압축한 행렬로서  $m \times m$ 의 크기를 갖는다. 또, 변환행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{matrix} p_m &= & T_m & p \\ m \times 1 & m \times N & N \times 1 & \end{matrix} \quad (18)$$

여기서  $p_m$ 은 복소 좌표벡터로서 베어링 요소들이 개입된 좌표벡터를 나타내고 변환행렬  $T_m$ 은 전체 좌표벡터  $p$ 에서 부분 좌표벡터  $p_m$ 를 추출하며 모두 1이나 0인 요소를 가진다.

식(7), (9)로부터 아래와 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} H_{ff}^o & H_{fb}^o \\ H_{bf}^o & H_{bb}^o \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} H_{ff}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_{ff}^b & D_{fb}^b \\ D_{bf}^b & D_{bb}^b \end{bmatrix}$$

또는

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{ff}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ff}^o & H_{fb}^o \\ H_{bf}^o & H_{bb}^o \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{ff}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ff}^b & D_{fb}^b \\ D_{bf}^b & D_{bb}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ff}^o & H_{fb}^o \\ H_{bf}^o & H_{bb}^o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

한편 베어링 관련 행렬의 요소가 국부적으로만 존재하므로 식(17)을 식(19)에 대입하여 식(20)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{ff}^s & 0 \\ 0 & H_{bb}^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ff}^o & H_{fb}^o \\ H_{bf}^o & H_{bb}^o \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (H_{ffmN}^s)^t & 0 \\ 0 & (H_{bbmN}^s)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ff}^b & d_{fb}^b \\ d_{bf}^b & d_{bb}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ffmN}^o & H_{fbmN}^o \\ H_{bfmN}^o & H_{bbmN}^o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

따라서 식(20)의 양쪽 좌측에 행렬  $\begin{bmatrix} T_m & 0 \\ 0 & T_m \end{bmatrix}$ 을 곱하고 정리하면 다음의 계산식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} H_{ffmN}^o & H_{fbmN}^o \\ H_{bfmN}^o & H_{bbmN}^o \end{bmatrix} = \quad (21)$$

$$\left\{ I + \begin{bmatrix} H_{ffmm}^s & 0 \\ 0 & H_{bbmm}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ff}^b & d_{fb}^b \\ d_{bf}^b & d_{bb}^b \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} H_{ffmN}^s & 0 \\ 0 & H_{bbmN}^s \end{bmatrix}$$

여기서

$$H_{ffmm}^k = T_m H_{ffmm}^k, \quad H_{bbmm}^k = T_m H_{bbmm}^k, \quad k = o, s$$

이다. 따라서 식 (21)을 식 (20)에 다시 대입하고 정리하면 다음의 최종 계산식을 얻을 수 있다.

$$H_{ff}^o = H_{ff}^s - \{H_{ffmN}^s\}' A_{11} H_{ffmN}^s \quad (22)$$

$$H_{bf}^o = -\{H_{bbmN}^s\}' A_{21} H_{ffmN}^s \quad (23)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{ff}^b & d_{fb}^b \\ d_{bf}^b & d_{bb}^b \end{bmatrix} \{I + \begin{bmatrix} H_{ffmm}^s & 0 \\ 0 & H_{bbmm}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ff}^b & d_{fb}^b \\ d_{bf}^b & d_{bb}^b \end{bmatrix}\}^{-1} \quad (24)$$

이며 이때  $A_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ 는 모두  $m \times m$ 의 크기를 갖는 부분 행렬이다. 식 (22), (23)은 식 (7)의  $2N \times 2N$  행렬 계산식을 근사화 없이  $2m \times 2m$ 으로 압축한 행렬을 계산하도록 개선한 식이므로 원래의 식 보다 그 계산시간을 대폭 단축시킬 수 있다. 즉 베어링 요소를 제외한 비감쇠계(s)에 대해 식 (11), (14)의 고전적인 모우드해석 기법을 이용하여  $H_{ff}^s$ ,  $H_{bb}^s$ 를 구한 후, 식 (24)의  $2m \times 2m$ 의 역행렬 계산과 간단한 행렬곱 연산으로 부터 베어링을 포함한 전체계에 대한 결과를 얻을 수 있다.

### 3.3 불균형 응답의 계산

일반적으로 복소 불균형 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$W = \{w_1 \ 0 \ w_2 \ 0 \ \dots \ w_n \ 0\}' \quad (25)$$

여기서  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 은  $i$ 번째 절점에 인가한 복소 불균형이다. 식 (6)으로부터 불균형 응답은 다음과 같이 얻어진다.

$$p_f = H_{ff}^o W \Omega^2 \quad p_b = H_{bf}^o W \Omega^2 \quad (26)$$

관심있는 회전속도 영역에 대해 식 (26)을 이용해 응답을 구하여 회전속도에 대해 그림을 그리면 일반적인 불균형 응답 선도를 얻을 수 있다. 불균형 응답을 표현하는 또 다른 방법으로서 고정된 회전속도에 대해 2차원 평면상의 선회계적을 구하기도 하는데 이때 얻어지는 그림을 Orbital 선도(Lissajous 선도)라고 하며 식 (3)을 이용하면 된다. 이것을 복소 좌표계가 아닌 일반 좌표계 관련식으로 표현하면 다음과 같다.

$$y(t) = y_c \cos \Omega t + y_s \sin \Omega t \quad (27)$$

$$z(t) = z_c \cos \Omega t + z_s \sin \Omega t$$

여기서

$$y_c - jy_s = p_f + p_b \quad z_c - jz_s = -j(p_f - p_b)$$

식 (3) 또는 식 (27)을 이용하면 해당 회전속도에서 선회계적을 얻을 수 있다.

## 4. 수치 예제 및 토의

수치예제에서는 Fig. 1과 같은 회전체 베어링계를 대상으로 하였다. 고려한 시스템에 대한 자세한 제원은 Table 1에 나타내었다. 일반적으로 유막베어링은 회전속도에 따라 그 특성이 크게 변화하게 되는데, <sup>(16)</sup> 여기서 베어링은 유막베어링을 가정하여 회전속도 증속성을 가진 것으로 두었으며 고려한 회전속도 범위에서 표에 기술한 바와 같이 회전속도에 대한 1차식으로 표현된다고 가정하였다. 회전축에 대한 유한요소 모델은 동일 크기의 12개 보요소로 구성하였다.

본 예제에서 고려하고 있는 모델은 13개의 절점을 가

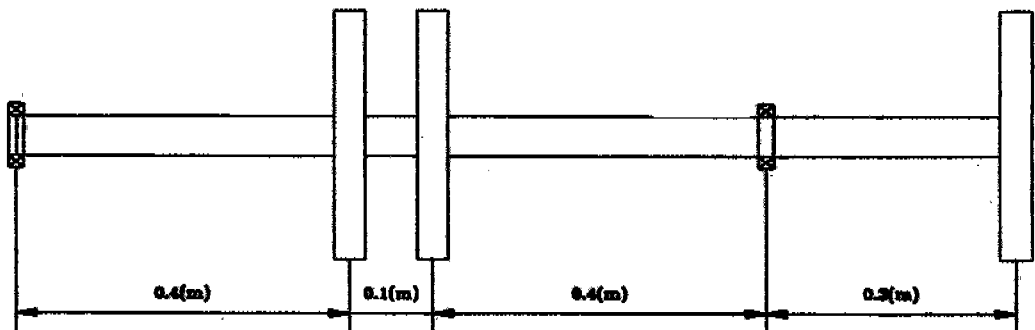


Fig. 1 Numerical model : An overhung type rotor-bearing system.

Table 1 Specifications for the overhung type rotor-bearing system

<b>Shaft</b>	
• length	1.20 m
• diameter	8 cm
• density	8000 kg/m <sup>3</sup>
• Young's modulus	2.0×10 <sup>11</sup> N/m <sup>2</sup>
• number of finite elements	12 (equal length)
<b>Disks (3 identical)</b>	
• mass	20 kg
• polar moment of inertia	0.163 kg·m <sup>2</sup>
• diametral moment of inertia	0.085 kg·m <sup>2</sup>
• locations (from left)	node #5(0.4 m) node #6(0.5 m) node #13(1.2 m)
<b>Bearings</b>	
• bearing #1 node #1 (0 m from left)	• bearing #2 node #10 (0.9 m from left)
stiffness coefficients (N/m)	stiffness coefficients (N/m)
$k_{yy} = 8.0 \times 10^7 - 3.5 \times 10^4 \Omega$	$k_{yy} = 8.6 \times 10^7 - 3.0 \times 10^4 \Omega$
$k_{zz} = 2.5 \times 10^7 + 2.0 \times 10^4 \Omega$	$k_{zz} = 3.0 \times 10^7 + 2.2 \times 10^4 \Omega$
$k_{xz} = 1.0 \times 10^7 - 1.0 \times 10^3 \Omega$	$k_{xz} = 1.5 \times 10^7 - 1.3 \times 10^3 \Omega$
$k_{zy} = -2.0 \times 10^6 - 1.0 \times 10^3 \Omega$	$k_{zy} = -1.0 \times 10^6 - 1.2 \times 10^3 \Omega$
damping coefficients (Ns/m)	damping coefficients (Ns/m)
$c_{yy} = 0.8 \times 10^5 - 2.5 \times 10^2 \Omega$	$c_{yy} = 0.9 \times 10^5 - 3.0 \times 10^2 \Omega$
$c_{zz} = 0.4 \times 10^5 - 3.5 \times 10^2 \Omega$	$c_{zz} = 0.5 \times 10^5 - 4.5 \times 10^2 \Omega$
$c_{zy} = -0.3 \times 10^5 + 7.0 \times 10^2 \Omega$	$c_{zy} = -0.3 \times 10^5 + 9.0 \times 10^2 \Omega$
$c_{yz} = -0.3 \times 10^5 + 7.0 \times 10^2 \Omega$	$c_{yz} = -0.3 \times 10^5 + 9.0 \times 10^2 \Omega$
* 회전속도 $\Omega$ : rad/s	

지므로 식 (6)을 이용한 기존의 직접 계산법에 의해 불균형 응답을 계산하기 위해서는 52×52 크기의 복소 행렬에 대한 역행렬 계산이 필요하다. 그러나 베어링이 2개로서 베어링에 관련된 자유도가 4이므로 제안한 방법을 이용하면 4×4의 행렬에 대한 역행렬 계산식으로 압축된다. 알고리즘의 검증에 위해 기존의 직접 계산법과 제안한 방법을 동시에 적용하여 비교하였다. 동일한 조건에서 계산효율을 비교하기 위해 PC486에서 상용프로그램을 이용하여 계산과정을 구성하였다.

한개의 회전속도에 대한 불균형 응답을 계산하는데 기존의 직접 계산법에서는 약 9.43초, 제안한 방법에서는 약 0.36초 정도가 소요되었다. 제안한 방법에서는 고유치 문제에 대한 해를 요하는데, 다루어야 할 고유치 문제가 양한정치이며 자기수반계에 대한 것이므로 계산

시간이 충분히 적었다. 본 예제에서 고유치 계산에 소요된 시간은 약 1.59초로서 직접 계산법에서 한점의 불균형 응답을 계산하는 시간의 17%에 지나지 않았고 특히 초기에 한번만 계산하면 되므로 계산점이 많아지면 무시할 정도였다. 계산시간을 비교해 보면 제안한 방법이 기존의 직접 계산법에서 소요되는 시간의 3.8 % 정도만이 소요됨을 알 수가 있으며 회전체 부분의 자유도가 증가할수록 기존의 직접 계산법에 비해 더욱 효율적일 것으로 사료된다. 한편 직접 계산법과 제안한 방법을 적용한 경우에 동일한 계산결과를 얻을 수 있었는데 Fig. 2는 계산결과와 한 예로서 디스크 1, 3에 대한 불균형 응답함수를 보여주고 있다. 디스크 1(좌표 #9)에 불균형이 인가되고 디스크 3(좌표 #25)에서 측정하는 경우와 그 반대의 경우가 높은 회전속도 구간에서 다소의 차이를 보이고 있는 것은 고려한 시스템이 비자기수반 특성을 가지고 있음을 의미한다. 첫번째 임계속도인 500 rad/s 근처에서는 두개로 분리된 모우드(전방 및 후방 모우드)가 관측되고 있으나 두번째 임계속도인 680 rad/s에서는 한개의 모우드로 나타나고 있다. Fig. 3은 디스크 1에 10 gr·cm의 불균형을 인가했을 때 축상의 5개 절점에서 구해진 불균형 응답으로서 불균형 응답 함수에 불균형 벡터를 곱하여 얻은 그림이다.

Fig. 4는 Fig. 3과 같이 얻어진 불균형 응답을 이용하여 식 (3)으로 계산한 선회계적으로서 선정된 몇개의 회전속도에서 회전축에 따른 선회계적의 변화를 보여주고 있다. 각각의 선회계적은 회전체의 13개 절점에서 계산한 것이며 그림에서 각 궤적의 중심점이 축상의 해당 절점 위치가 된다. 저속에서는 우측 베어링을 경계점으로 좌측과 우측이 서로 반대의 위상을 갖는 1차 모우드 형상으로 나타나고 있으며 첫번째 임계속도(약 500 rad/s)를 지나면서 선회계적이 급변하고 있음을 알 수 있다. 특히 700 rad/s 이상에서는 우측 베어링을 경계로 좌측은 전방 선회계적이, 우측은 후방 선회계적이 나타나는 독특한 형상을 보여주고 있다. 또 응답의 위상을 나타내는 궤적 중심과 시작점 사이의 각이 축 위치에 따라 차이를 보이고 있는데, 두개의 모우드가 동시에 영향을 미치는 회전속도인 600 rad/s에서는 회전축의 좌측에서 우측으로 위상각의 변화가 두드러지게 나타나고 있으며 이는 복소 모우드 특성을 나타내고 있는 것으로 생각된다. 이상과 같은 선회계적 선도는 제안한 방법을 이용하면 손쉽게 얻을 수 있는데 회전체의 진동을 분석하는데 매우 유용하게 활용될 수 있으리

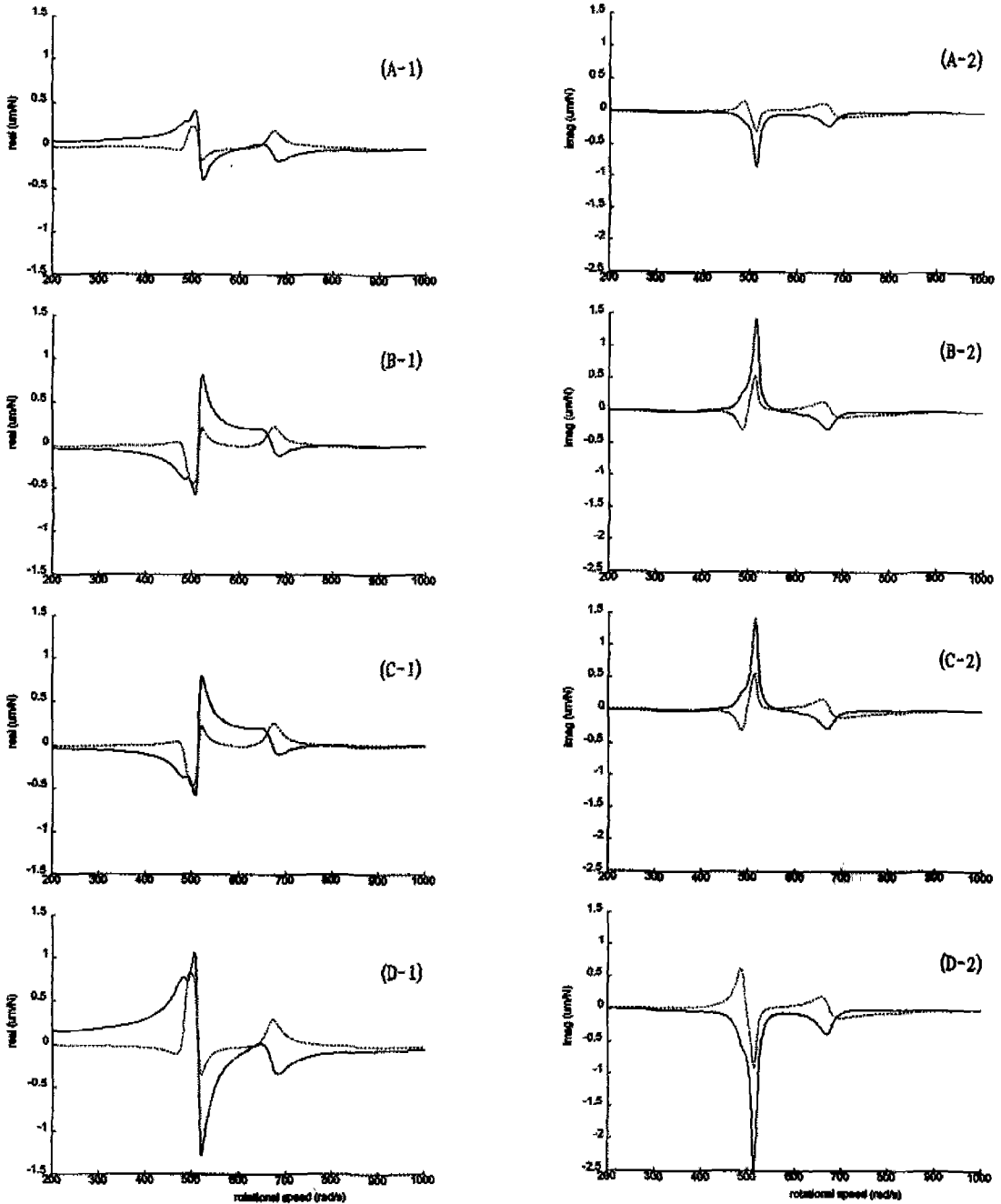


Fig. 2 Unbalance response functions (disk #1=9, disk #3=25)

— ; forward      ... ; backward

(A-1) real of  $h_{9,9}$

(A-2) imaginary of  $h_{9,9}$

(B-1) real of  $h_{25,9}$

(B-2) imaginary of  $h_{25,9}$

(C-1) real of  $h_{9,25}$

(C-2) imaginary of  $h_{9,25}$

(D-1) real of  $h_{25,25}$

(D-2) imaginary of  $h_{25,25}$

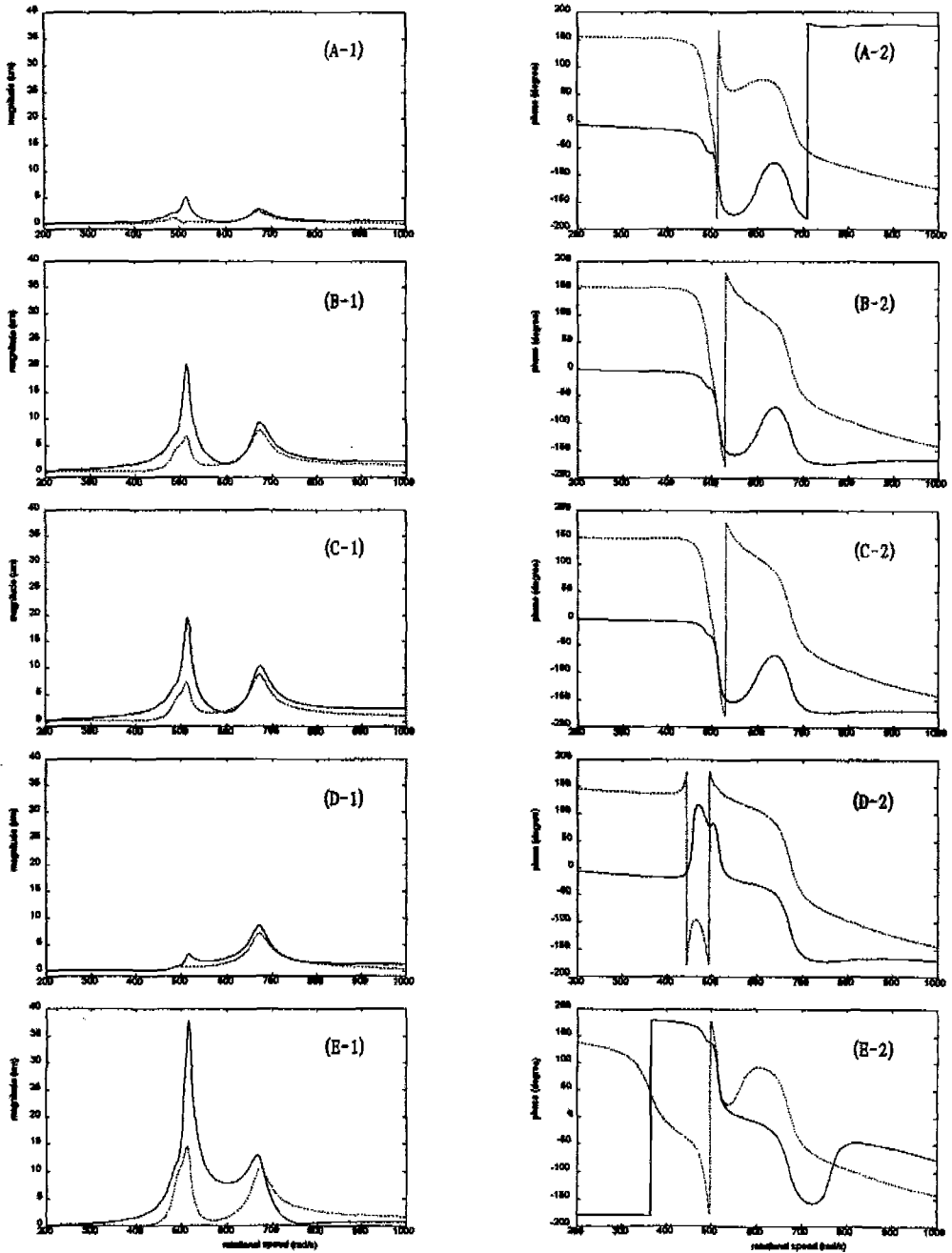


Fig. 3 Unbalance response when an unbalance of 10 gr-cm is attached to disk #1 (node #5)

— ; forward      ··· ; backward  
 (A-1) magnitude at node #1      (A-2) phase at node #1  
 (B-1) magnitude at node #4      (B-2) phase at node #4  
 (C-1) magnitude at node #7      (C-2) phase at node #7  
 (D-1) magnitude at node #10      (D-2) phase at node #10  
 (E-1) magnitude at node #13      (E-2) phase at node #13



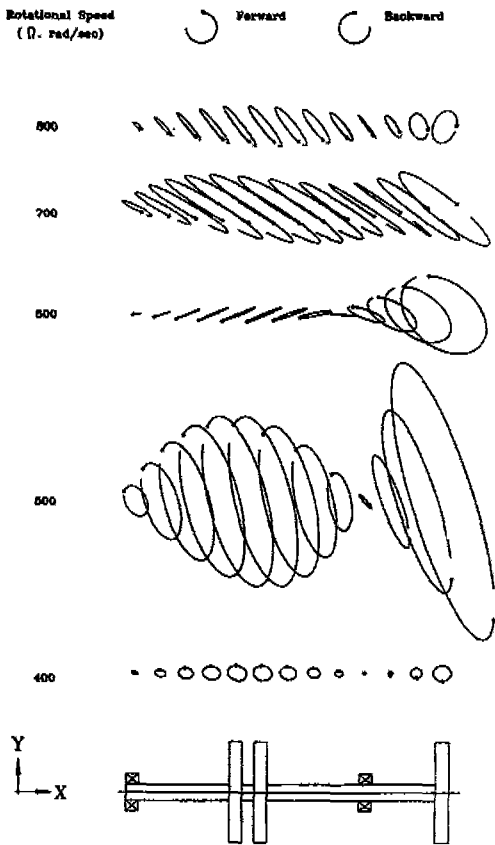


Fig. 4 Orbital plots along the shaft axis subject to change in the rotational speed

라 기대된다.

수치예제를 이용한 검토 결과 일반 회전체 베어링계의 불균형 응답 해석에 제안한 방법을 적용하면 계산상의 오차를 유발하지 않으면서도 기존의 방법에 비해 수치계산 노력이 획기적으로 줄게 됨을 알 수 있었다. 따라서 본 방법은 실제 회전체 베어링계 구성에 있어 베어링의 갯수는 많이 두지 않는다는 점을 고려할 때 매우 효과적인 방법으로 생각된다. 예컨대 5단으로 구성된 증기터빈 발전기의 경우 회전체 부분의 형상을 고려하여 유한요소로 모델링하면 약 500여개 이상의 요소로 구성되어 2000 자유도 이상의 행렬이 필요하지만 베어링 요소는 각단에 2개씩, 10개로 충분하다. 따라서 5단 증기터빈 발전기에 대한 불균형 응답계산에 있어 일반적으로는 2000×2000 이상의 복소 행렬에 대한 역행렬 계산이 필요하나 제안한 방법에 의하면 10×10의 압

축행렬에 대한 역행렬 계산으로 가능하다. 만일 베어링에서의 회전(tilting)자유도를 고려한다고 해도 20×20의 압축된 행렬에 대한 계산으로 가능하며 밀봉이나 기타의 부분적인 요소들을 베어링과 마찬가지로 처리한다고 해도 수십 자유도 정도에 대한 계산으로 충분하므로 계산속도를 현저히 개선할 것으로 기대된다. 특히 회전체 베어링계의 특성설계에 있어 베어링의 위치나 특성을 변화시키면서 반복적인 계산을 하는 경우가 많은데 이때 베어링의 위치나 특성 데이터만을 변화시키면서 압축된 행렬계산을 하면 분석이 가능하므로 효과적인 활용이 가능하다.

여기서는 베어링 요소만을 국부적인 요소로 취급하여 압축된 행렬을 구성하였으나 회전기계에서 종종 중요시되는 밀봉(seal)이나 다단 회전체 베어링계(multi-stage rotor-bearing system)에서 회전체를 연결하는 커플링 등도 베어링과 마찬가지로 취급하여 일반화할 수 있다. 다단 회전체 베어링계의 경우에는 각단의 회전체에 대해 비감쇠계 문제를 별도로 구성하여 전체를 합하는 방식의 부분 구조 합성법을 사용하면 더욱 효과적으로 계산을 할 수 있을 것으로 생각된다.

### 5. 결 론

회전체 베어링계에 있어 불균형 응답해석은 설계나 특성치 규명 등에 다양하게 활용되고 있으나 베어링 특성이 회전속도에 종속적이고 비등방성이므로 수행에 어려움이 있다. 본 연구에서는 회전체 베어링계에서 베어링 특성이 비자기수반 특성과 회전속도 종속성을 야기시키지만 국부적으로만 존재한다는 점에 착안하여 베어링 요소에 대해 행렬 압축 기법을 적용하여 불균형 응답 계산을 효과적으로 할 수 있도록 하는 방법을 제안하였다. 즉 국부적인 베어링 요소가 동특성 행렬에 비대칭적으로 고려되고 있을 때 계산을 간편하게 할 수 있도록 행렬 압축기법을 도입하였다. 그리고 압축된 행렬에 대한 계산을 통해 전체 불균형 응답을 계산할 수 있도록 관계식을 유도하였다. 제안된 방법의 효용성을 검증하기 위해 유한요소법으로 모델링된 회전체 베어링계의 불균형 응답 계산에 본 방법을 적용하였고 기존의 직접 계산법과 비교하여 그 우수성을 입증하였다.

본 방법은 실제 회전체 베어링계 구성에 있어 베어링의 갯수가 많이 않는다는 점을 고려할 때 매우 효과적인 방법이다. 특히 회전체 베어링계의 특성설계에 있어

베어링의 위치나 특성을 변화시키면서 반복적인 계산을 필요로 하는 경우에 매우 효과적이다. 그러나 불균형 응답 해석은 정상상태의 응답특성 해석이므로 회전체 베어링에 대한 안정성이나 고유치 특성 해석은 수반되지 않으므로 이를 위해서는 별도의 계산이 필요하다. 본 연구에서는 베어링 요소만을 국부적인 요소로 취급하여 추측된 행렬을 구성하였으나 회전기계에서 종종 중요 되는 밀봉(seal)이나 다단 회전체 베어링계에서 회전체를 연결하는 커플링 등도 베어링과 마찬가지로 취급하여 일반화할 수 있다.

### 참고문헌

1. Myklestadt, N.O., "A new method for calculating natural modes of uncoupled bending vibrations of airplane wings and other types of beams", *Journal of Aeronautical Science*, Vol.11, pp.153-162, 1944.
2. Lund, J.W., "Stability and damped critical speeds of a flexible rotor in fluid film bearings", *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp.509-517, 1974.
3. Ruhl, R.L. and Booker, J.F., "A finite element model for distributed parameter turbo-rotor systems", *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp.128-132, 1972.
4. Gasch, R., "Vibration of large turbo rotors in fluid film bearings on an elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.89, No.1, pp.53-73, 1972.
5. Nelson, H.D. and McVaugh, J.M., "The dynamics of rotor bearing systems using finite elements", *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol.98, No.2, pp.593-600, 1976.
6. Glasgow, D.A. and Nelson, H.D., "Stability analysis of rotor bearing systems using component mode synthesis", *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol.102, pp.353-359, 1980.
7. Muszynska, A., "Modal testing of rotor/bearing systems", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol.1, pp15-34, 1986.
8. Lee, C.W. and Hong, S.W., "Asynchronous harmonic response analysis of rotor bearing systems", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol.5, No.2, pp.51-65, 1990.
9. Saito, S. and Azuma, T., "Balancing of flexible rotors by the complex modal method", *Trans. ASME, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol.105, pp.94-100, 1983.
10. Darlow, M.S., "Balancing of high speed machinery: theory, method, and experimental results", *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.1, No.1, pp.105-134, 1987.
11. Lee, C.W. and Hong, S.W., "Identification of bearing dynamic coefficients by unbalance response measurements", *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, Vol.203C, pp.93-101, 1988.
12. Stanway, R., "Identification of linearized squeezed film dynamics using synchronous excitation", *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, Vol.197C, pp.199-204, 1983.
13. Hong, S.W. and Lee, C.W., "Identification of bearing dynamic coefficients by using measured and computed unbalance responses in flexible rotor-bearing systems", *Proceeding of the 5th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, Bath, U.K., 1992.
14. Ozguven, H.N., "A new method for harmonic response of non-proportionally damped structures using undamped modal data", *Journal of Sound and Vibration*,

Vol.117, pp.313-328, 1987.

15. Yang, B., "Exact receptances of nonproportionally damped dynamic systems", Trans. ASME, Journal of Vibration and

Acoustics, Vol.115, pp.47-52, 1993.

16. Someya, T., Journal Bearing Databook, Spring-Verlag, 1988.

부록: 회전체 베어링계의 운동방정식

축의 전단변형과 내부감쇠를 무시할 경우 회전체 베어링계의 유한요소 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^{s+d} \ddot{q}(t) + \{C^s(\Omega) + \Omega G^{s+d}\} \dot{q}(t) + \{K^s + K^b(\Omega)\} q(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서 상첨자 s, d, b는 각각 축과 디스크, 그리고 베어링을 의미하며 유한요소 좌표벡터  $q(t)$ 와 힘벡터  $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$q = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

그리고,  $y$ 와  $z$ 는 각각 절점에서의  $y$  방향과  $z$  방향 변위 좌표를, 그리고  $f_y$ 와  $f_z$ 는  $y$ 와  $z$ 에 대응되는 힘 벡터이다. 회전속도( $\Omega$ ) 종속특성을 갖는 베어링 강성 및 감쇠행렬  $K^b(\Omega)$ 와  $C^b(\Omega)$ 는 모두 일반적으로 비대칭(asymmetric)이며 부정치(indefinite)로서 국부적인 요소를 갖는 성긴(sparse) 행렬이다. 대칭(symmetric)인 관성행렬  $M^{s+d}$ 은 양정치(positive definite)이며 대칭인 축의 강성행렬  $K^s$ 는 반양정치(positive semi-definite), 그리고 자이로 행렬(gyroscopic matrix)  $G^{s+d}$ 는 반대칭(skew-symmetric)이다. 시스템 전체 행렬은 모두  $2N \times 2N$ 이며  $N$ 은  $y$  또는  $z$  좌표벡터의 차원이다 ( $N = 2 \times n$ (유한요소모델 절점수)). 관성과 자이로 행렬을 부분 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$M^{s+d} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad G^{s+d} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \quad (3-a)$$

그리고 감쇠와 강성행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C^b = \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad K^b = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \\ K^s = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (3-b)$$

여기서 부분 행렬  $M, G$  및  $K$ 는 대칭이다.

회전체의 동특성 해석을 위해서는 복소 좌표계를 이용하는 것이 편리하므로 아래와 같은 복소 변위, 복소 힘벡터를 정의하기로 하자.

$$p = y + iz, \quad F = f_y + jf_z \quad (4)$$

이때 운동 방정식 (1)은 다음과 같이 복소 운동 방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$M\ddot{p} - j\Omega G\dot{p} + C_f\dot{p} + C_b\dot{\bar{p}} + Kp + K_f\bar{p} + k_b\bar{p} = F \quad (5)$$

여기서 하첨자  $f$ 와  $b$ 는 각각 전방(forward) 및 후방(backward)을, 그리고  $\bar{\cdot}$ 는 공액 복소수를 의미한다. 대각인 복소 베어링 감쇠 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$2C_f = C_{yy} + C_{zz} - j(C_{yz} - C_{zy}) \\ 2C_b = C_{yy} - C_{zz} + j(C_{yz} + C_{zy}) \\ 2K_f = K_{yy} + K_{zz} - j(K_{yz} - K_{zy}) \\ 2K_b = K_{yy} - K_{zz} + j(K_{yz} + K_{zy}) \quad (6)$$