

# 수직다관절 매니퓰레이터에 대한 비선형 되먹임제어의 응용

백 운 수,\* 양 장 일,\*\* 엄 호 성\*\*\*

## Application of Nonlinear Feedback Control to an Articulated Manipulator

Y. S. Baek, \* C. I. Yang, \*\* H. S. Aum\*\*\*

### ABSTRACT

Mathematical models of industrial robots or manipulators are composed of highly non-linear equations with nonlinear couplings between the variables of motions. These nonlinearities were not considered important in the first stage that the working speed of the manipulator was not so fast, but the effect of nonlinear forces has become serious, as the working speed has been increased. So more improvement of performance cannot be expected by the control of manipulator using approximate linearization. As an approach for solving these problems, there is a method that eliminates nonlinear terms by feedback law. On the basis of this method, the nonlinear control theory, which makes possible decoupling of coupling terms and arbitrary arranging of poles is briefly introduced in this study. When the theory is applied to design the control law, its feasibility is examined whether the reasonable control results are obtained by simulating position, velocity, torque and tracing trajectory. The relations between the coefficients of the linearized differential equations and the maximum error and torque for the prescribed trajectory are also examined. Finally, the method for selecting the values for getting the most rapid and precise response within maximum torque of each drive is suggested in the choice of coefficients of characteristic equations which are obtained as a result of the control.

**Key Words** : nonlinear control(비선형제어), decoupling(디커플링), linearization(선형화), feedback law(되먹임법칙), robot(로봇), manipulator(매니퓰레이터)

\* 연세대학교 기계설계학과

\*\* 연세대학교 기계공학과 대학원

\*\*\* 선문대학교 기계공학과

## 1. 서 론

공학에서 다루는 물리체계는 대부분이 비선형계이다. 이러한 비선형계는 해석 및 설계를 위해서 선형화 시킬 필요가 있다. 일반적으로 계의 평형점에 대한 Taylor 급수로 전개시켜 고차항을 무시함으로써 비선형계를 선형계로 근사화시킬 수 있다. 그러나 이러한 선형계는 제한된 범위 내에서만 비선형계와 등가이다. 즉 선형화된 모델을 기본으로 한 제어는 실제의 작업과정이 선형화를 위해 가정된 조건에서 벗어날수록 효율성을 잃게 된다.

이러한 문제점들의 해결을 위해, 비선형계를 선형화 하기 위한 또다른 방법이 바로 되먹임을 이용한 비선형 항의 소거 방법이다. 이에 관한 연구로서 Falb와 Wolovich는 상태 변수의 되먹임을 이용한 다중 입출력 선형계의 디커플링을 위한 필요 충분 조건들을 결정하여 이 조건들을 만족시키는 계에 대하여 디커플링 후의 전달 함수 행렬의 결과식을 구하고 수치적인 예를 통하여 실질적인 관계식을 고찰하였다.<sup>(1)</sup> Markiewicz와 Bejczy는 매니플레이터의 제어문제를 해결하기 위한 하나의 접근으로 링크들 간의 상호작용에 의한 비선형성을 보상(compensation)하는 방법, 즉 계산된 토크 방법(Computed torque technique)을 사용하였다.<sup>(2)(3)</sup> Hemami와 Camana는 sine, cosine, 다항식 등의 비선형성을 갖는 단순 운동계(Simple locomotion system)의 자세 안정성과 주기적 운동을 해석하고 비선형 되먹임을 사용하여 계를 선형화 시키고 디커플링된 하부계(subsystem)를 유도하였다.<sup>(4)</sup> Freund는 디커플링이 가능한 기존의 비선형 시변계의 영역을 넓히고, 디커플링된 계의 극배치 방법을 제안하였다.<sup>(5)</sup> 또한 디커플링된 계의 구조 해석을 위한 도구로서 비선형 시변계의 가관측을 위한 충분 조건을 제시하였고,<sup>(6)</sup> 다각적인 비선형 제어 방법을 도입하여 이들을 산업용 로봇트에 적용시켰다.<sup>(7)</sup> 이러한 비선형 제어기술을 바탕으로, 각 운동변수에 대한 제어법칙이 유도되어 전체 계의 거동이 모든 운동변수에 대해 디커플링 되고 임의의 극배치가 가능하게 된다. 양창일 등은 수평암 매니플레이터에 대하여 비선형 제어이론을 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 그 타당성을 보였다.<sup>(8)(9)(10)</sup>

본 연구에서는 3 자유도 수직 다관절 매니플레이터에 대하여 비선형 디커플링을 이용한 제어법칙을 유도하고 비선형 제어법칙 적용시 결과로서 얻어지는 특성방정식들의 계수값들을 선택하는 방법을 제시한다. 또한 비선

형 제어법칙 적용의 타당성 검토를 위해 3차원 공간에서 임의의 경로를 추적하는 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하고 주어진 경로에 대하여 계수값과 최대 오차, 최대 토크와의 관계를 고찰한다.

## 2. 비선형 제어 이론

### 2.1. 일반적인 비선형 제어의 개념

일반적으로 많은 비선형계는 다음과 같은 상태공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}(t)$ 는  $n$ 개의 성분으로 된 상태벡터,  $\mathbf{u}(t)$ 와  $\mathbf{y}(t)$ 는 각각,  $m$ 개 성분의 입력과 출력 벡터이다.  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 는 각각  $n \times 1$ ,  $n \times m$ ,  $m \times 1$ ,  $m \times m$  크기의 행렬이다. (1)식과 관련하여 비선형 오퍼레이터  $N_A^k$ 가 다음과 같이 정의된다.<sup>(11)</sup>

$$\begin{aligned} N_A^k C_i(\mathbf{x}, t) & \quad (2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} N_A^{k-1} C_i(\mathbf{x}, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} N_A^{k-1} C_i(\mathbf{x}, t) \right] \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

식(2)에서  $k = 1, 2, \dots$ 이며  $N_A^0 C_i(\mathbf{x}, t) = C_i(\mathbf{x}, t)$ 이고  $C_i(\mathbf{x}, t)$ 는  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )의  $i$ 번째 행벡터이다.

비선형계의 미분계수  $d_i$ 는 다음과 같이 정의된다.<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{x}, t) \neq 0 \text{에 대해, } d_i &= 0 \quad (3) \\ D_i(\mathbf{x}, t) = 0 \text{에 대해,} \end{aligned}$$

$$d_i = \min \left\{ j : \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} N_A^{j-1} C_i(\mathbf{x}, t) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \neq 0 \right. \\ \left. j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

여기서  $D_i(\mathbf{x}, t)$ 는  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 의  $i$ 번째 행벡터이다. 위에서 언급된 정의들을 이용하여 다음 형태의 되먹임법칙을 고려할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(t) \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{w}(t)$ 는  $m$ 개 성분으로 된 지령 입력 벡터(reference input vector or desired value)이고  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$

와  $G(x, t)$ 는  $m \times 1$ ,  $m \times m$  행렬이며 전체계는 식(4)를 식(1)에 대입함으로써 디커플드 되고 임의로 극값을 조절할 수가 있는데,  $F(x, t)$ 와  $G(x, t)$ 가 다음과 같다.

$$F(x, t) = F^*(x, t) = F_1^*(x, t) + F_2^*(x, t) \quad (5)$$

여기서

$$F_1^* = -D^{-1}(x, t) \cdot C^*(x, t) \quad (6)$$

$$F_2^* = -D^{-1}(x, t) \cdot M^*(x, t)$$

그리고

$$G(x, t) = G^*(x, t) = D^{-1}(x, t) \cdot \Lambda \quad (7)$$

위의 각 행렬들은 다음과 같이 정의된다.

$F_1^*(x, t)$ 는 디커플링을 유도하는 되먹임 부분을 나타내고  $F_2^*(x, t)$ 는 임의의 극배치를 가능하게 하는 부분이다. 입력에 대한 이득은  $G(x, t)$ 에 의해 선택될 수 있다. 행렬  $D^*(x, t)$ 는  $m \times m$  행렬로서  $i$ 번째 행 ( $i = 1, 2, \dots, m$ )이 다음과 같다.

$$D_i^*(x, t) = \begin{cases} D_i(x, t) & \text{for } d_i = 0 \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x} N_{\lambda}^{d_i-1} C_i(x, t) \right] B(x, t) & \text{for } d_i \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

$C^*(x, t)$ 는  $m$  차원의 벡터이며  $i$ 번째 성분이 다음과 같다.

$$C_i^*(x, t) = N_{\lambda}^{d_i} C_i(x, t) \quad (9)$$

$M^*(x, t)$ 도  $m$  차원의 벡터이며  $i$ 번째 성분이 다음과 같다.

$$M_i^*(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_i = 0 \\ \sum_{k=0}^{d_i-1} \alpha_{k,i} N_{\lambda}^k C_i(x, t) & \text{for } d_i \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

행렬  $\Lambda$ 는  $m \times m$ 의 대각행렬이며 요소들은  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 이다.

$F^*(x, t)$ ,  $G^*(x, t)$ 와 되먹임법칙(feedback law) 식(4)를 식(1)에 적용하면 모든 입/출력 쌍  $w_i(t)$ ,  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )의 전체 거동(behavior)을 얻을 수 있다.

$$y_i^{(d_i)}(t) + \alpha_{d_i-1,i} y_i^{(d_i-1)}(t) + \dots + \alpha_{0,i} y_i(t) = \lambda_i w_i(t) \quad (11)$$

여기서  $\alpha_{k,i} (k = 0, 1, \dots, d_i-1)$ ; 이하  $\alpha_{k,i}$ 를  $\alpha_{ki}$ 로 나타냄)와  $\lambda_i$ 는 임의로 선택할 수 있고,  $w_i$ 는  $y_i$ 와 동일한 물리적 차원을 갖는다.

## 2.2. 비선형 제어의 로봇체계 적용

일반적으로 산업용 로봇의 동적 모델은 2계 미분 방정식으로 구성되어질 수 있다. 즉 식(3)에서 정의된 것처럼  $d_i$ 는 계의 출력의 모든 운동 변수에 대해 항상 2이다. 산업용 로봇 또는 매니퓰레이터에 대해  $q_i(t)$ 로 표시된 각 운동 변수에 대한 미분 방정식은 다음의 형태를 갖는다.

$$\ddot{q}_i = f_{q_i}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) + B_{q_i}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$y_i(t) = C_{q_i}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \quad (13)$$

여기서 조인트 혹은 운동변수의 수는  $m$ 이며  $i = 1, 2, \dots, m$ 이다.

만약 상태변수들이 직접 출력변수 즉 제어변수들로 사용된다면 식(12)와 식(13)은 다음과 같이 더욱 간단해 질 수 있다.

$$\ddot{y}_i = f_{q_i}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) + B_{q_i}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (14)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

식(14)에 관한 제어법칙은 다음의 형태를 갖게 된다.<sup>(7)</sup>

$$Q_i(t) = -B_{q_i}^{-1}(q_1, \dots, \dot{q}_m) \cdot \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} f_{q_1}(q_1, \dots, \dot{q}_m) + \alpha_{11} \dot{q}_1 + \alpha_{01} q_1 - \lambda_1 w_1 \\ \vdots \\ f_{q_m}(q_1, \dots, \dot{q}_m) + \alpha_{1m} \dot{q}_m + \alpha_{0m} q_m - \lambda_m w_m \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, \dots, m$

여기서  $B_{qi}^*$ 는  $B_{qi}$ 를 행벡터로 갖는 행렬에 대한 역행렬의  $i$ 번째 행벡터이다. 제어법칙(식(15))의 적용으로 다음과 같이 각 운동변수에 대해서 완전히 디커플된 전체 거동을 얻을 수 있다.

$$\ddot{y}_i(t) + \alpha_{1i}\dot{y}_i(t) + \alpha_{0i}y_i(t) = \lambda_i w_i(t) \quad (16)$$

### 2.3. 선형화된 미분 방정식의 계수 결정

비선형 제어 방법의 실질적인 수행을 위해서 식(16)의 계수  $\alpha_{0i}$ 와  $\alpha_{1i}$ 를 어떻게 선택해야 원하는 계의 거동을 얻을 수 있는가 하는 문제를 해결해야 한다. 로봇트 운동에 대해 어떤 작업 조건 하에서도 한축이라도 오버슈팅이 절대로 일어나지 않는 것이 매우 중요하다. 이러한 요구조건을 위해 운동변수들의 해당 미분 방정식의 감쇠(damping) 계수가 1 또는 1보다 크게 선택되어야 한다. 한 축에 대해 식(16)의 감쇠 계수는 계수  $\alpha_{0i}$ 와  $\alpha_{1i}$ 의 비에 의해 표현된다.

$$\xi_i = \frac{\alpha_{1i}}{2\sqrt{\alpha_{0i}}}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (17)$$

임계감쇠(critical damping)의 경우는  $\xi_i=1$ 로 주어진다. 즉 계수 중 하나를 선택하면 나머지 계수도 그에 따라 정해진다.

실제로 존재하지는 않지만 모터의 토크 용량이 무한인 경우, 운동 변수의 응답은 단지 계수의 선택에 의해 결정된다. 그러나 실제로 로봇트계에서 이용할 수 있는 모터토크는 제한되어 있다. 그러므로 이용가능한 모터 토크 범위 내에서 오버슈팅이 없고 동시에 제어 변수의 응답이 빠르도록 계수들이 결정되어야 한다. 축의 오버슈팅을 피하고 가능한 빠른 응답을 위한 비선형 제어 알고리즘이 필요로 하는 토크는, 물론 실제 이용가능한 토크 범위 내에 있어야 한다. 식(15)로부터 이것은 조건식의 형태로 수식화 될 수 있다. <sup>(12)</sup>

$$|Q_i(\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \lambda_i, w_i, q_i, \dot{q}_i)|_{\max} \leq M_{i,\max}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

여기서  $M_{i,\max}$ 는 최대 토크 또는 최대힘을 나타낸다. 식(18)에서 제어 법칙에 의해 필요로 하는  $M_{i,\max}$ 는 계수  $\alpha_{0i}$ ,  $\alpha_{1i}$ ,  $\lambda_i$ ,  $w_i$ 와 실제 상태 변수들의 항으로 수식화됨을 의미한다. 계수  $\alpha_{0i}$ ,  $\alpha_{1i}$ ,  $\lambda_i$ ,  $w_i$ 를 제외한 모든 변수(즉 속도, 위치, 축의 관성모멘트)들은 측정이나 계

산에 의해 알 수 있다. 식(16)에서 알 수 있듯이 가속도(혹은 각가속도)와 속도(혹은 각속도)가 0인 경우, 즉 정지된 경우 혹은 정상 상태인 경우 목표값  $w_i$ 와 실제값  $y_i$ 를 같게 하면  $\alpha_{0i}=\lambda_i$ 의 관계를 얻을 수 있고, 각 조인트가 오버슈팅이 없고 가능한 빠른 응답속도를 갖게 하기위해 임계 감쇠비를 택할 경우, 즉  $\xi_i=1$ 의 경우, 계수  $\alpha_{0i}$ ,  $\alpha_{1i}$  중 하나의 값만 정하게 되면(임계 감쇠일 경우,  $\alpha_{0i}=\alpha_i$ 이면  $\alpha_{1i}=f(\lambda_i)$ 로 표현 가능. 여기서는  $\alpha_{1i}$  값을 택함.)  $M_{i,\max}$ 는 그 하나의 값에 좌우됨을 알 수 있다. 이와같이 하면 식(18)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$|Q_i(\alpha_{1i})|_{\max} \leq M_{i,\max}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (19)$$

이때 각 조인트의 응답특성을 동일하게 하기위해,  $i = 1, 2, \dots, m$ 에 대해  $\alpha_{0i}$  혹은  $\alpha_{1i}$ 의 값을 동일하게 취한다.

일단 매니퓰레이터의 경로가 계획되고 계수  $\alpha_{1i}$ (혹은  $\alpha_{0i}$ )의 값을 정해 주게 되면 그 과정 동안의 필요한  $M_{i,\max}$ (즉 과정동안 각 조인트에서 필요한 토크 혹은 힘 중 최대값) 및 최대 오차, 즉 과정동안 매니퓰레이터 끝단의 목표값(desired value)과 실제값(actual value)과의 오차의 절대값 중 최대값을 동적 시뮬레이션에 의해 계산해 낼 수 있다. 최대 오차는 필요에 따라 직교좌표계나 조인트 좌표계에서 정의될 수 있다.

그러나 주어진 경로에 대해  $\alpha$ 값과 최대 오차,  $M_{i,\max}$ 값의 상관 관계를 구하고 원하는 조건에 적합한  $\alpha$  값을 찾기 위해서는 많은 계산을 하여야 한다. 그러므로 최대 허용 오차에 따른 최적  $\alpha$  값을 구하는 알고리즘을 생각해 볼 수 있다. 최적화 알고리즘을 위해서 목적함수와 제한식을 다음과 같이 정한다.

목적함수 : 최소화  $T_{\max} = f(\alpha)$

제한식 : Max Error <  $\delta$ (최대 허용 오차)

목적함수를 위와 같이 정한 것은 일단 정해진 경로에 대해서 최대 토크  $T_{\max}$ (혹은 최대 힘) 값은  $\alpha$  값에 의해 결정되기 때문이다. 즉  $\alpha$  값을 찾기 위해 앞서 사용한 방법은 최대 오차가 최대 허용 오차 이내로 되는 값의 범위 중에서 가장 작은 최대토크 값을 찾는 문제로 귀착시킬 수 있다. 이 문제는 직접탐색법(direct search method)의 가장 간단한 경우인 단일 변수의

경우이므로 다음과 같은 간단한 알고리즘을 적용하여 최적  $\alpha$  값을 찾을 수 있다.

- 단계 1. 초기값으로서 임의의  $\alpha$  값과  $\alpha$ 의 증분  $\Delta\alpha$  ( $\Delta\alpha = \alpha/\beta$ ,  $\beta$ 는 1보다 큰 임의의 상수) 를 결정한다.
- 단계 2.  $\alpha$  값을 대입하여 정해진 경로에 대해 최대 토크 혹은 최대 힘 (MAXT)과 최대오차 (MAXERR) 를 구한다.
- 단계 3.  $\Delta\alpha$ 가 음수이면 단계 8로 간다.
- 단계 4. 최대 오차의 절대값의 크기가 최대 허용 오차 ( $\delta$ )의 크기보다 크면  $\alpha$ 의 값을  $\Delta\alpha$ 만큼 증가시키고 iter1의 값을 1 증가시켜 단계 2로 간다.
- 단계 5. iter1이 1이면  $\Delta\alpha = -\Delta\alpha$ 로 하여 단계 4로 간다.

단계 6. 최대 오차와 최대 허용 오차의 차가 일정값 (TINY, 미소값) 이내에 들어오면 루프를 빠져나간다.

단계 7.  $\alpha$ 의 값을  $\Delta\alpha$ 만큼 감소시키고  $\Delta\alpha$ 의 크기를 줄여 단계 2로 간다.

단계 8. 최대 오차의 절대값의 크기가 최대 허용 오차의 크기보다 작으면  $\alpha$ 의 값을  $\Delta\alpha$ 만큼 증가시키고 iter2의 값을 1 증가시켜 단계 2로 간다.

이상과 같은 알고리즘을 흐름도(flow chart)로 나타내면 Fig. 1과 같다.

### 3. 시스템의 수학적 모델링과 제어기 설계

Fig. 2는 3 자유도 수직다관절 매니플레이터와 각 조인트 좌표계를 나타낸 것이고 이 계의 운동방정식은

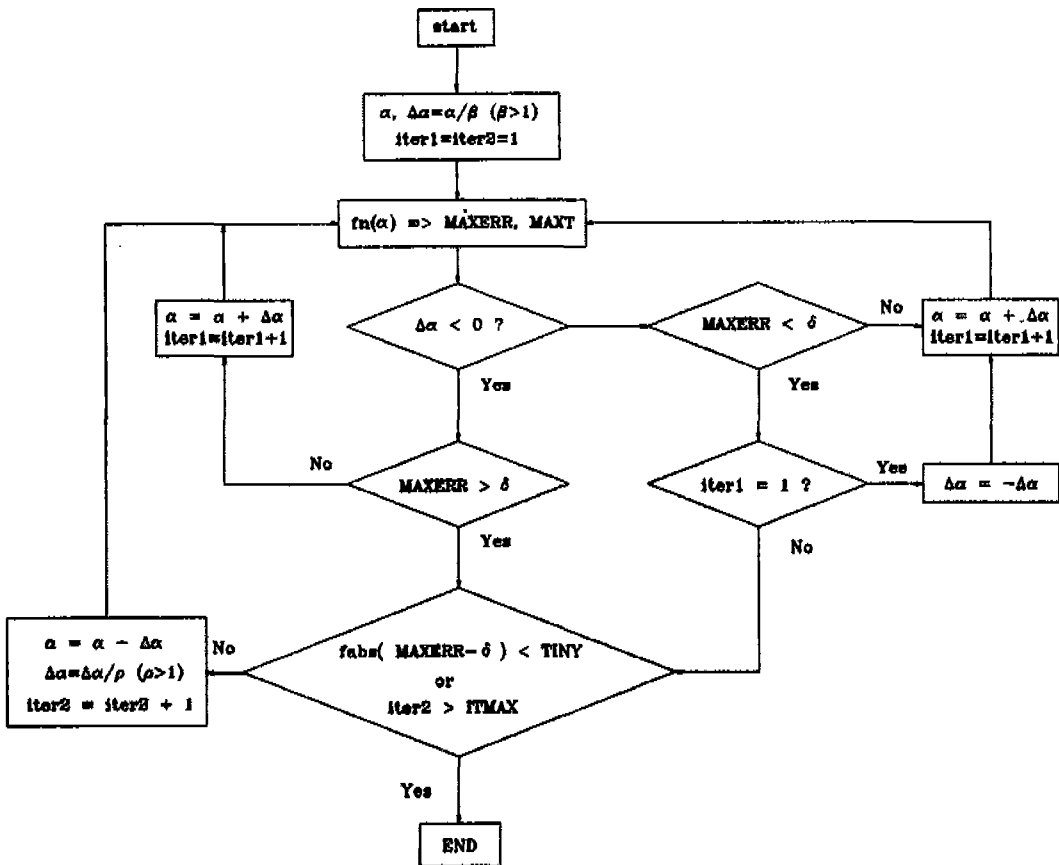


Fig. 1 Algorithm for finding optimal alpha

다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_1 &= -c_1 \times f_1 + c_1 \times \ddot{\theta}_1 \\ M_2 &= -c_2 \times f_2 + c_2 \times \ddot{\theta}_2 \\ M_3 &= -c_3 \times f_3 + c_3 \times \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (20)$$

(여기서  $c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3$ 는 (8)참조)

식 (20)을 상태공간 방정식의 형태로 표현하기 위해 상태 변수를 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta_1(t), & x_3(t) &= \theta_2(t), & x_5(t) &= \theta_3(t) \\ x_2(t) &= \dot{\theta}_1(t), & x_4(t) &= \dot{\theta}_2(t), & x_6(t) &= \dot{\theta}_3(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Fig. 2의 계를 상태 공간 방정식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_1 \\ x_4 \\ f_2 \\ x_6 \\ f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

식 (22)도 상태 변수들이 직접 출력변수로 사용되었으므로 식 (15)를 이용하여 제어법칙을 직접 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= M_1(t) \\ &= -c_1 \times f_1 + c_1 \times (\alpha_{11} \dot{\theta}_1 + \alpha_{01} \theta_1 - \lambda_1 w_1) \\ u_2(t) &= M_2(t) \\ &= -c_2 \times f_2 + c_2 \times (\alpha_{12} \dot{\theta}_2 + \alpha_{02} \theta_2 - \lambda_2 w_2) \\ u_3(t) &= M_3(t) \\ &= -c_3 \times f_3 + c_3 \times (\alpha_{13} \dot{\theta}_3 + \alpha_{03} \theta_3 - \lambda_3 w_3) \end{aligned} \quad (23)$$

#### 4. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 연구에서는 X 평면과 평행한 면상에서의 별모양

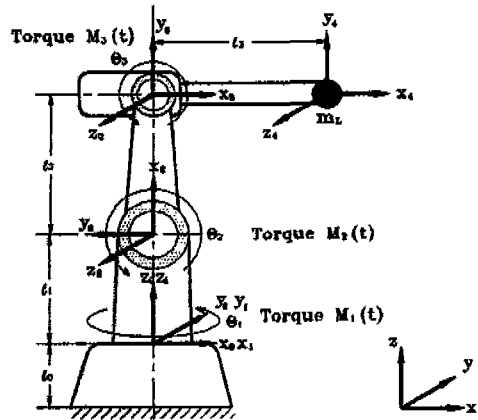


Fig. 2 3 D.O.F. vertical articulated manipulator

의 궤적과 임의의 평면상에서의 원의 궤적에 대해서 각각 시뮬레이션을 해보았다. 시뮬레이션 과정 동안의 매니퓰레이터 끝단의 속도는 사다리꼴 형태의 속도선도<sup>(11)</sup>를 택했다. 즉 초기 가속구간(0.5초)과 마지막 감속구간(0.5초)을 제외하고 모두 2.5 m/s의 속도를 유지하게 하였다.

다음은 Fig. 2의 매니퓰레이터에 대하여 식 (23)의 제어 법칙을 적용 했을 때의 시뮬레이션 결과이다. 이때  $\alpha_1$ 를 결정하는 데 있어서 최대 허용 오차를 5cm(=0.05m)로 하였다. 여기서의 오차는 추적 오차(tracking error)를 의미한다.

실제 시뮬레이션에 사용한 파라메타의 수치값은 다음과 같다.

# 각 링크의 무게 중심(각 조인트 좌표계에 대한 값, 단위 : m)

링크 1 : (0, 0.0678, 0.4304)

링크 2 : (0.4058, -0.0290, 0.0019)

링크 3 : (0.2162, 0.0115, -0.0026)

# 각 링크의 무게 중심에서의 관성 모멘트(단위 : kg m<sup>2</sup>)

링크 1 : I<sub>xx</sub>=3.5512, I<sub>yy</sub>=2.5088, I<sub>zz</sub>=2.4370

링크 2 : I<sub>xx</sub>=5.1323, I<sub>yy</sub>=0.6605, I<sub>zz</sub>=5.5380

링크 3 : I<sub>xx</sub>=0.2065, I<sub>yy</sub>=4.2055, I<sub>zz</sub>=4.2553

# 각 링크의 질량 (단위 : kg)

링크 1 : 108.38, 링크 2 : 42.81,

링크 3 : 44.53

# 각 링크의 길이 (단위 : m)

링크 1 : 0.48, 링크 2 : 0.72,

링크 3 : 0.79

그리고 이때 구해진  $\alpha_{1i}$ 값은 원의 궤적의 경우 167이고 별 모양의 궤적의 경우 203이다.

**원의 궤적의 경우**

3자유도 수직다관절 매니퓰레이터의 원의 궤적 추적의 경우  $\alpha_{1i}$ 와 최대오차, 최대토크의 관계는 Fig. 3과 같다. 그림에서도 알 수 있듯이  $\alpha_{1i}$ 가 커짐에 따라 최대 오차는 줄어들고 필요한 최대 토크는 증가한다. 이 때  $\alpha_{1i}$  값이 일정값 이상 증가하면 오차 곡선과 토크 곡선의 기울기가 작아지게 된다. 따라서 그러한 구간에서는  $\alpha_{1i}$  값이 증가하여도 최대 오차의 감소와 최대 토크 값의 증가가 둔화된다.

경로 추적 결과는 Fig. 4와 같다. 결과에서 알 수 있듯이 원의 경로를 비교적 정확히(최대 추적 오차:약 0.05 m) 추적한다.

Fig. 5는 매니퓰레이터 끝단의 오차와 속도를 나타낸 것이다. (a)에서는 오차를 x, y, z의 세 성분으로 나누었고 이 때의 최대 오차는 0.05 m이며 이 수치는 최적  $\alpha_{1i}$  값 결정 시 최대 허용 오차를 x, y, z 방향 각각에 대하여 준 값과 동일하다. (b)에서는 끝단의 속도가 목표치와 약간의 오차(최대 오차:약 0.15 m/sec)를 갖기는 하나 사다리꼴 속도 선도를 이룬다. (c)에서는 추적 오차의 성분을 원의 경로의 접선 방향, 원이 속한

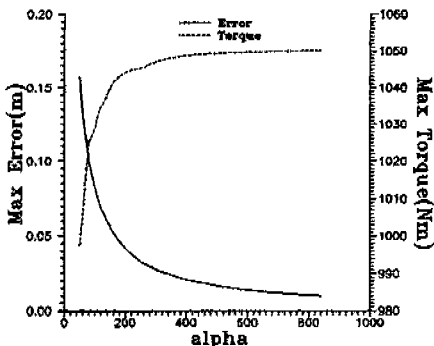


Fig. 3 Maximum error and torque for alpha variation in case of circular motion ( $v = 2.5$  m/s)

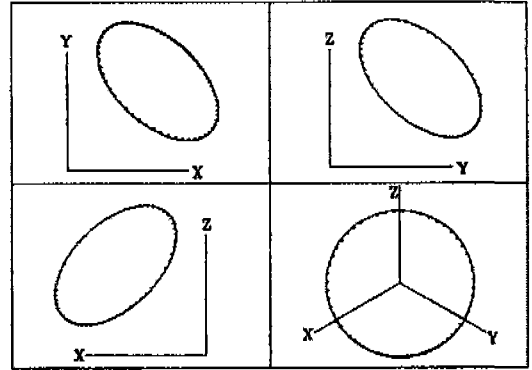


Fig. 4 Traced circular trajectories according to different views  
(— : desired path, ... : actual path)

평면에 수직인 방향, 원의 중심 방향으로 나누어서 각각 구하였다. 이때 최대 오차는 접선 방향으로 약 6 cm 정도이다.

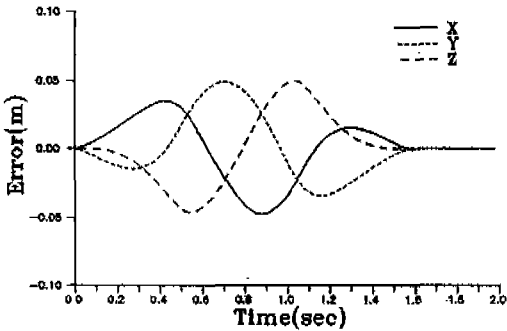
Fig. 6은 각 조인트의 필요한 토크를 시간에 대해서 나타낸 것이다. 원의 궤적에서는 경로의 변화가 심하지 않으므로 토크의 변화 역시 심하지 않다. 그림에 나타난 결과로 보아 조인트 2가 가장 큰 토크가 걸림을 알 수 있다.

Fig. 7(a)와 (b)는 각각 시간에 따른 조인트 2의 각도와 각속도의 변화를 시뮬레이션 한 결과이다. 결과에 나타나듯이 각도와 각속도 모두 목표값과 약간의 오차(최대 오차: 0.1 radian, 0.9 rad/sec)를 두고 추적한다. 즉 추적 오차의 최대값이 0.05 m 이므로 끝단의 속도가 2.5 m/s 인 점을 감안하여 이 값을 시간으로 환산하여 보면 0.02 초이므로 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

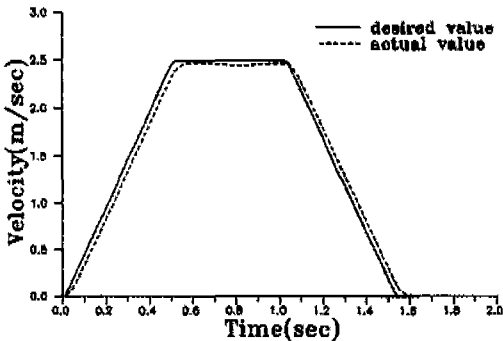
**별 모양의 궤적의 경우**

별 모양 궤적 추적의 경우  $\alpha_{1i}$ 와 최대 오차, 최대 토크의 관계는 Fig. 8과 같다. 이 경우에도  $\alpha_{1i}$ 가 커짐에 따라 최대 오차는 줄어들고 필요한 최대 토크는 증가한다. 그러나  $\alpha_{1i}$  값이 500 이상이 되어도 토크 곡선의 기울기가 거의 일정하므로  $\alpha_{1i}$  값을 증가시키에 따라 최대 토크가 계속 증가되는 반면, 최대 오차의 감소는 둔화된다.

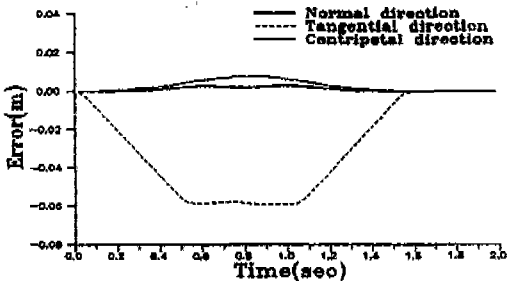
Fig. 9는 3 차원 공간 상에서 별모양의 궤적 추적 결과이다. 이 경우에는 별의 경로를 대부분 정확히 추적해 나가지만 경로가 급격히 변하는 별의 꼭지점 부근



(a) Position error in X-Y-Z directions



(b) Velocity of end effector



(c) Position error in normal, tangential and centripetal directions

Fig. 5 Position and velocity errors of end effector in case of circular motion

에서 오차가 발생된다.

Fig. 10은 매니퓰레이터 끝단의 오차와 속도를 나타낸 것이다. (b)에서는 끝단의 속도가 별의 꼭지점 부근에서 줄어들어 많은 오차(최대 오차: 약 1.73 m/sec)가 발생됨을 나타낸다. 이는 경로의 급격한 변화로 인한 가속도(혹은 각가속도)의 급격한 증가로 인한 현상

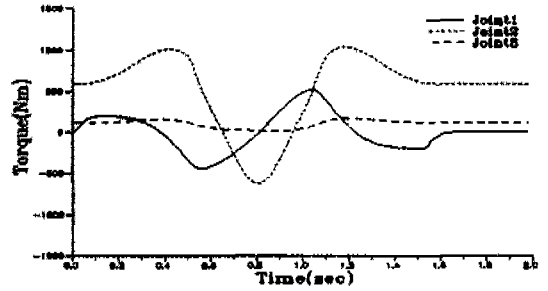
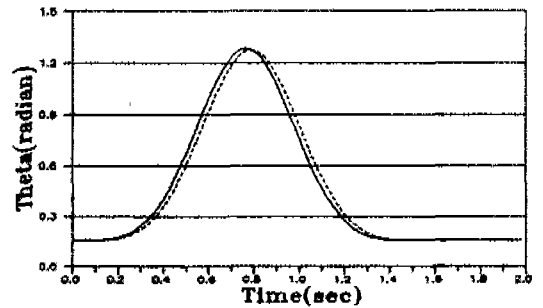
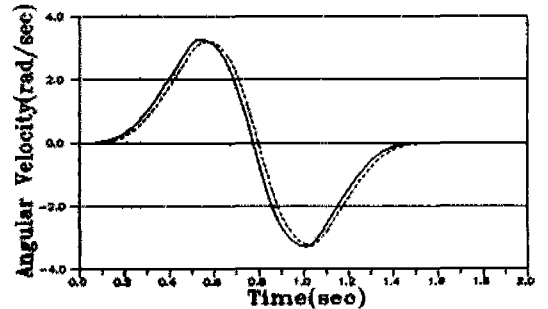


Fig. 6 Variation of torque with respect to time in case of circular motion



(a) Angular position



(b) Angular velocity

Fig. 7 Angular position and velocity of joint 2 for a circular motion  
(— : desired value, ... : actual value)

이다. 즉 이 점에서 필요한 최대 토크가 발생하게 되고 모터의 용량이 클수록 이 부근의 오차를 줄일 수 있다. (c)에서는 추적 오차의 성분을 별 모양 경로의 접선 방향과 수직 방향으로 나누어서 각각 구하였다. 끝단의 오차가 경로의 수직 방향과 접선 방향으로 5 cm 이내이다. 이때 별의 꼭지점 부근에서 수직 방향의 오차가



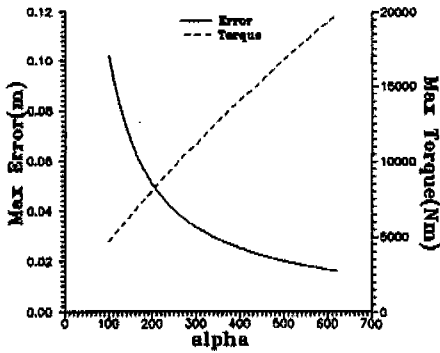


Fig. 8 Maximum error and torque for alpha variation in case of star motion ( $v = 2.5 \text{ m/s}$ )

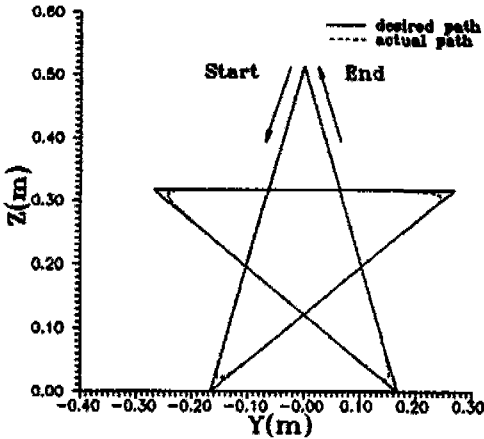
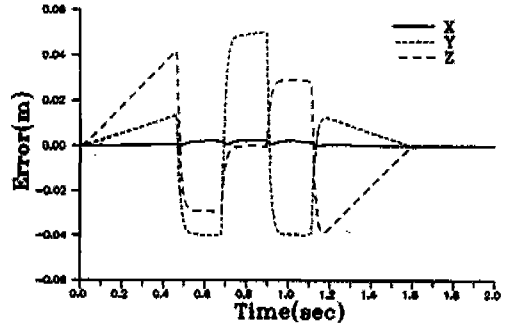


Fig. 9 Traced star trajectory

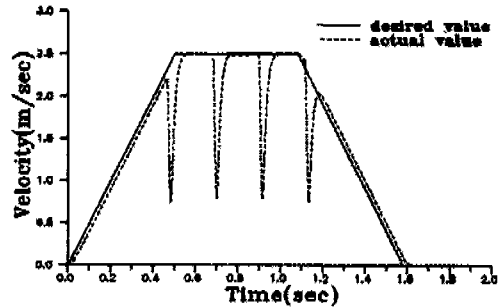
증가한다. 접선 방향의 오차는 부호가 바뀌기는 하나 꼭지점에서는 접선을 정의할 수가 없으므로 무의미한 값이라고 보아야 할 것이다.

Fig. 11은 각 조인트의 필요한 토크의 변화를 시간에 대해서 나타낸 것이다. Fig. 10에서도 언급하였듯이 별의 꼭지점 부근에서 매우 큰 토크(약 8000 Nm)가 필요하게 된다. 즉 이 부근에서 필요한 토크를 얼마나 공급해 줄 수 있는지가 바로 오차를 얼마나 줄일 수 있는지와 직결된다.

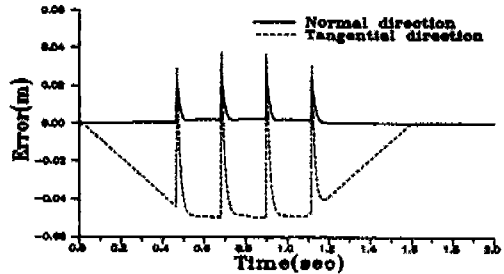
Fig. 12(a)와 (b)는 각각 시간에 따른 조인트 2의 각도와 각속도 변화를 시뮬레이션 한 결과이다. 별 모양 궤적의 경우는 조인트의 위치와 속도가 별의 꼭지점 부근에서 급격히 변화하게 된다. 따라서 변화가 심한 부분에서 목표치와의 오차가 증가하게 된다.



(a) Position error in X-Y-Z directions



(b) Velocity of end effector



(c) Position error in normal and tangential directions

Fig. 10 Position and velocity errors of end effector in case of star motion

Fig. 13은 3 자유도 수직 다관절 매니퓰레이터에 대해서 3차원 공간 상의 원의 궤적을 주어진 속도에 따라 추적하게 했을 때, 그 과정동안에 필요한  $M_{i,max}$ 와 발생하는 최대 오차를 구하고 이 때  $\alpha_1$  값과의 관계를 나타낸 것이다. 그래프에서 알 수 있듯이  $\alpha_1$ 의 값이 증가함에 따라 오차는 감소하고 필요한  $M_{i,max}$ 의 값은 증가한다. 즉, 취할 수 있는 모터의 최대 토크가 클수록 오차

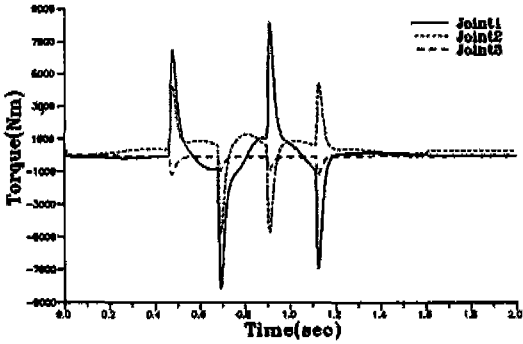


Fig. 11 Variation of torque applied for a star motion

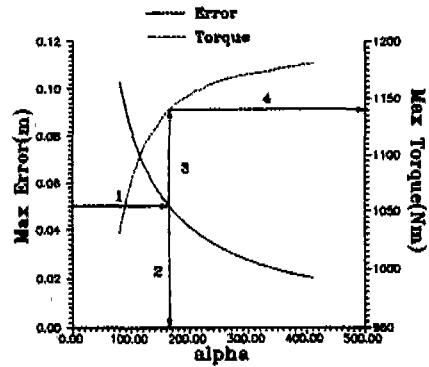
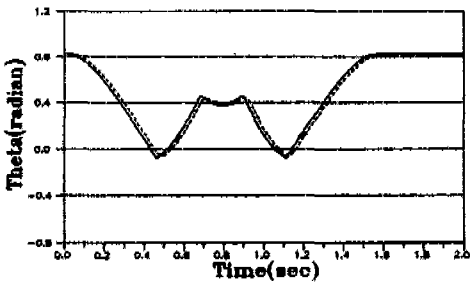
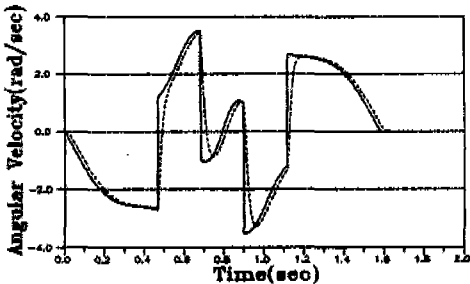


Fig. 13 Graphical determination of optimal alpha for circular motion ( $v = 2.5 \text{ m/s}$ )



(a) Angular position



(b) Angular velocity

Fig. 12 Angular position and velocity of joint 2 for a star motion  
(— : desired value, ... : actual value)

를 줄일 수 있다. 토크를 증가시키기 위해서는 모터 자체의 용량을 크게 하기보다는 감속비를 높이는 것이 바람직하다. 일반적으로 모터의 용량이 크면 모터의 무게도 증가하게 되고 결국 부하가 증가하기 늘기 때문이다. 한편 이 그래프로부터 이 과정동안의 최대 오차를 일정 값 이하로 하길 원했을 때, 그때의  $\alpha_1$ 의 값과 그때 필요한  $M_{i,max}$ 값을 구할 수 있음을 알 수 있다.

예를 들면 작업과정 동안의 최대 오차(여기서는  $x$ ,  $y$ ,  $z$  각 방향으로의 최대 오차)를 5cm로 하길 원하면 그림의 1번을 따라 error 선과 만나는 점에서 2번을 따라 alpha 축과 만나는 값이 원하는 alpha 값, 즉  $\alpha_1$  (이하  $\alpha_1$ 를  $\alpha$ 라고 함)가 되고 3번을 따라 토크 (혹은 힘) 곡선과 만나는 점에서 4번을 따라 토크(혹은 힘)축과 만나는 값이 그때의 필요한  $M_{i,max}$ 값이 된다. 또한 역으로, 선정된 모터의 사양으로부터  $M_{i,max}$ 값을 취하면  $\alpha$ 의 상한 값이 Fig. 13으로부터 결정되며 그 결정된  $\alpha$ 에 따라 예상 최대 오차 범위를 산정할 수 있다.

한편, Fig. 13은 정해진 경로에 대해  $\alpha$  값과 최대오차,  $M_{i,max}$ 값의 상관관계와 원하는 조건에 적합한  $\alpha$  값을 짐작할 수 있다는 장점이 있지만 단순히 최적  $\alpha$  값을 구하는 목적이라면 적절한 방법이 못된다. 즉  $\alpha$  값을 작은 값에서 큰 값까지 하나하나 대입해야 하기 때문에 많은 계산을 해야 하고, 앞과 같이 그래프 상에서 구한 값은 근사적인 값이기 때문에 오차가 따른다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 되먹임법칙을 이용하여 비선형 운동방정식을 디커플링 시키고 동시에 선형화시키는 제어법칙(control law)을 유도하였다. 그리고 이것을 수직다관절 매니플레이터에 대해서 적용시켜 보았으며, 매니플레이터의 경로를 3차원 임의의 평면상의 원과 x 평면상의 별모양의 경우로 나누어 해석하였다.

선형화된 방정식의 계수를 선정하는 방법은 최대 오차가 일정값 이하로 되게 하는 계수값( $\alpha_1$ )을 택하였다.

이 때 계수값의 추적은 직접탐색법을 이용하였고 정해진 경로에 대해  $\alpha_1$  값과 최대오차, 최대토크와의 관계를 나타내었다. 이상과 같은 시뮬레이션을 통하여 비선형 제어이론에 대한 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 비선형 제어이론을 적용하여 선형화된 방정식의 계수값 선택 시, 최대오차를 일정값 이하로 되게 하는 값을 결정하였고 이 때 필요한 최대 토크를 구하였다. 이 때의 계수는 최대 오차와 최대 토크(또는 최대 힘)의 그래프를 이용하여 근사적으로 구하는 방법을 제시하였고 직접탐색법에 의해 정확한 값을 구하였다.
2. 1에서 구한 계수값을 비선형 제어 이론에 적용시켰을 때, 위치, 속도, 경로 추적 등의 시뮬레이션을 통하여 비선형 제어이론의 타당성을 보였다.
3. 정해진 경로에 대하여 ( $\alpha_1$ ) 값이 커질 수록 오차는 줄어들고, 이 때 필요한 최대 토크는 증가한다. 즉, 비선형 제어 이론을 적용하면 취할 수 있는 모터의 최대토크가 클수록 오차를 줄일 수 있다.
4. 비선형 제어 이론을 적용한 경우, 같은 용량의 모터에서 추적 오차를 감소시키기 위해 감속비를 큰 값으로 채택함으로써 부하 측의 최대 토크를 증가시킬 수 있다.

### 참고문헌

1. Falb, P.L., and Wolovich, W.A., "Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.12, No.6, pp.651-655, 1967.
2. B. Markiewicz, "Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison with Conventional Position Servo for a Computed-Controlled Manipulator", Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33-601, 1973.
3. A. Bejczy, "Robot Arm Dynamics and Control", Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33-669, 1974.
4. H. Hemami and P.C. Camana, "Nonlinear Feedback in Simple Locomotion Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-21, No.6, pp.855-859, 1976.
5. Freund, E., "Decoupling and Pole Assignment in Nonlinear Systems", Electronics Letters, Vol.9, No.16, pp.373-374, 1973.
6. Freund, E., "The Structure of Decoupled Non-linear Systems", Int. J. Control, Vol.21, No.3, pp.443-450, 1975.
7. Freund, E., "Fast Nonlinear Control with Arbitrary Pole-Placement for Industrial Robot", Int. Journal of Robotics Research, Vol.1, No.1, pp.65-78, 1982.
8. 양창일, "매니퓰레이터의 비선형 제어에 관한 연구", 연세대학교 대학원 기계공학과 석사학위 논문, 1993.
9. 양창일, 백운수, 김호룡, "비선형 되먹임 제어의 수평암 매니퓰레이터에 대한 적용", 연세대학교 산업기술연구소 논문집, 제26집 제1권, pp.87-85, 1994.
10. 양창일, 백운수, 김호룡, "비선형 되먹임 제어의 계수 결정에 관한 연구", 대한기계학회 1994년 춘계 학술대회 논문집(1), pp.594-598, 1994.
11. Holland, J.M., Basic Robotic Concepts, Howard W. Sams & Co., Inc., p.44, 1983.
12. Freund, E. and Klein, H.J., 1984., "Practical results with nonlinear control strategy for computer controlled industrial robots", Proceeding of the 14th International Symposium on Industrial Robots, pp.347-358