

## 기호 비선형 방정식의 해석적 선형화

송 성 재,\* 문 흥 기\*\*

### Analytic Linearization of Symbolic Nonlinear Equations

Sung-Jae Song,\* Hong-Ki Moon\*\*

#### ABSTRACT

The first-order Taylor series expansion can be evaluated analytically from the formulated symbolic nonlinear dynamic equations. A closed-form linear dynamic equation is derived about a nominal trajectory. The state space representation of the linearized dynamics can be derived easily from the closed-form linear dynamic equations. But manual symbolic expansion of dynamic equations and linearization is tedious, time-consuming and error-prone. So it is desirable to manipulate the procedures using a computer. In this paper, the analytic linearization is performed using the symbolic language MATHEMATICA. Two examples are given to illustrate the approach and to compare nonlinear model with linear model.

**Key Words** : Taylor Series Expansion(Taylor 급수 전개), Symbolic Equation(기호 방정식), Local Linearization(국부 선형화), Linear Model(선형 모델), Sensitivity Matrix(감도행렬)

#### 1. 서 론

로봇을 비롯한 다양한 다물체 시스템에서 정적 평형 상태 근처의 미소운동이나 계획된 운동(nominal motion) 근처에서의 미소 운동이 관심의 대상이 될 수 있다. 이때 미소운동을 표현하는 방법으로 선형화된 방정식을 사용할 수 있다. 미소운동의 경우라도 자력(self-excitation)현상과 같이 선형계의 응답이라고 볼 수 없는 비선형 운동이 나타날 수 있지만 대부분의 경우에는 계획된 경로 근처의 미소운동을 선형화된 방정식으로 충분히 표현할 수 있다.<sup>(1)</sup> 또한 로봇의 경우에는

제어가 중요한 문제가 된다. 그 이유는 구성된 역동역학 해가 실제 환경을 이상화한 상황에서 구한 것이므로 모델링의 불확실성, 기어의 백래쉬, 마찰, 구동모터나 센서의 오차, 하중의 변화 등의 원인으로 계산된 구동력만으로는 사실상 원하는 운동을 구현할 수 없기 때문이다. 그런데 로봇 운동방정식은 고도의 비선형 방정식이고 서로 연관(coupled)되어 있다. 이런 비선형 운동방정식을 적용할 수 있는 일반적인 제어기법이 없기 때문에 선형화된 운동방정식을 구성하여 잘 정립된 선형 제어이론에 적용하게 된다.

선형화 방법에는 전체 선형화(global lineariza-

\* 원주전문대학 자동차과

\*\* 두원공업전문대학 자동차과

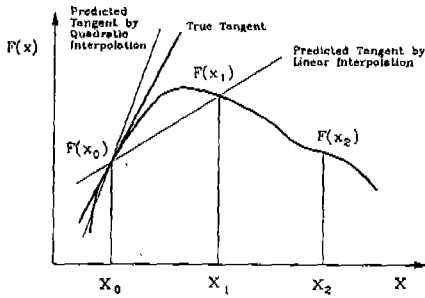


Fig. 1 Interpolation of a nonlinear function  $F(x)$

tion) 방법과 국부 선형화(local linearization) 방법으로 분류할 수 있다. 전체 선형화 방법은 비선형 모델이 정의된 전 영역에 걸쳐서 선형 모델을 구축하는 것이다. 일반적으로 전체 선형화 방법은 계산량이 많고 모델의 안정성이 부족하다. 국부 선형화 방법은 지정된 경로 위의 어느 특정한 점에서 정의된 선형 모델을 구축하는 것이다. 만약 로봇이 좁은 구간에서 동작하는 경우가 아니라면 로봇이 동작함에 따라 동작점이 바뀌게 되고 그에 따라 새로운 동작점에서 선형 모델이 다시 구축되어야 한다.<sup>(2)</sup>

또한 비선형 방정식의 선형화는 수치적 방법과 해석적 방법으로 나눌 수 있다. 수치적 방법은 많은 상용 프로그램에서 비선형 시스템을 선형 근사화할 경우에 사용한다.<sup>(3),(4)</sup> 이 중에는 1차 보간법(linear interpolation)과 2차 보간법(quadratic interpolation)이 있다. 1차 보간법은 선형화된 방정식의 자코비안 행렬을 계산하는 가장 직접적인 방법이다. Fig. 1에 도시한 바와 같이  $X_0$  근처에서의 선형화를 차분방정식(difference equation)으로 근사화시킨다.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y_i} \right|_{y_i=x_0} = \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (1)$$

2차 보간법은 Fig. 1에 도시한 바와 같이  $X_0$  근처에서의 선형화를 3점  $X_0, X_1, X_2$ 를 이용하여 다음식과 같이 근사화시킨다.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y_i} \right|_{y_i=x_0} = \frac{-3F(x_0) + 4F(x_1) - F(x_2)}{x_2 - x_0} \quad (2)$$

수치적 방법의 단점은 임의의 초기값( $X_1, X_2$ )으로부터 선형화한 방정식이 오차한계를 만족할 때까지 반복적으로 초기값을 수정하면서 계산하여야 하고 이러한 반복

계산이 발산하는 결과를 가져올 수도 있다는 점이다.

해석적 방법은 일반적으로 기호 방정식(symbolic equation)을 사용하며 Taylor 급수전개의 선형부분을 취하는 방법을 사용한다.<sup>(5),(6),(7)</sup> 따라서 선형화된 방정식이 해석적이고 closed-form이라는 장점을 가진다. 그러나 손작업에 의한 운동방정식의 기호 전개과정이나 이에 따르는 선형화 과정은 매우 번거롭고 틀리기 쉬운 과정이다. 또한 모델이 조금만 복잡해지면 시도하기조차 곤란하다. 따라서 이런 과정을 컴퓨터로 처리하는 방법이 요구된다.

본 논문에서는 기호 비선형 방정식을 Taylor 급수전개하여 선형부분만을 취하는 해석적 방법에 의한 국부 선형화 과정을 MATHEMATICA<sup>(8)</sup>를 사용하여 수행하였다. MATHEMATICA는 상수, 변수, 함수, 행렬 등의 수학적 처리가 가능하고 그래픽 처리가 지원되는 프로그래밍 언어이다. 수학적 처리는 수치 계산이나 기호 연산이 가능하고 많은 수학적 함수를 내장하고 있다. 구성된 선형 방정식은 로봇 운동제어에 기본이 되는 상태방정식의 형태로 쉽게 변환할 수 있다.

## 2. 국부 선형화 방법

국부 선형화 방법은 동작점에 관하여 비선형 운동방정식의 Taylor 급수전개에서 출발한다. 즉 비선형 운동방정식의 교란이 적다는 가정하에서 Taylor 급수전개식 중에서 교란부분의 선형부분만을 채택하여 선형 운동방정식을 구성하는 것이다. 로봇 비선형 운동방정식은 다음 식과 같이 표시할 수 있다.

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) \quad (3)$$

식(3)을 동작점 ( $q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0$ )에 관하여 Taylor 급수전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau(q, \dot{q}, \ddot{q}) = & \tau^0(q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0) + \left. \frac{\partial \tau}{\partial \ddot{q}} \right|_{(q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0)} (\ddot{q} - \ddot{q}^0) \\ & + \left. \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}} \right|_{(q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0)} (\dot{q} - \dot{q}^0) \\ & + \left. \frac{\partial \tau}{\partial q} \right|_{(q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0)} (q - q^0) \\ & + \text{Remainder} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)의 잔여항(Remainder) 부분은 비선형 부분이므로 소거하고 식 (3)을 식 (4)에 대입하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\delta \tau = \underline{D}(\underline{q}^0) \delta \underline{\ddot{q}} + \left. \frac{\partial \underline{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})}{\partial \underline{\dot{q}}} \right|_{(\underline{q}^0, \underline{\dot{q}}^0, \underline{\ddot{q}}^0)} \delta \underline{\dot{q}} \quad (5)$$

$$+ \left. \frac{\partial \{ \underline{D}(\underline{q}) + \underline{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + \underline{G}(\underline{q}) \}}{\partial \underline{q}} \right|_{(\underline{q}^0, \underline{\dot{q}}^0, \underline{\ddot{q}}^0)} \delta \underline{q}$$

또는 간략하게 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\delta \tau = \underline{D}^0 \delta \underline{\ddot{q}} + \underline{V}^0 \delta \underline{\dot{q}} + \underline{P}^0 \delta \underline{q} \quad (6)$$

식 (6)에서  $\delta \tau$ ,  $\delta \underline{q}$ ,  $\delta \underline{\dot{q}}$ ,  $\delta \underline{\ddot{q}}$ 는 동작점 값인  $\tau^0$ ,  $\underline{q}^0$ ,  $\underline{\dot{q}}^0$ ,  $\underline{\ddot{q}}^0$ 로 부터의 미소변화량이다. 또한 식 (6)의  $\underline{D}^0$ ,  $\underline{V}^0$ ,  $\underline{P}^0$ 는 선형모델의 감도행렬(sensitivity matrix)이라고 부른다. 이 감도행렬은 동작점의 함수이고 교란과는 서로 독립적이다. 식 (6)에서  $\underline{D}^0$ 는 항상 역행렬이 존재한다. 따라서  $\underline{D}^0$ 의 역행렬을 이용하여  $\delta \underline{q}$ 와  $\delta \underline{\dot{q}}$ 를 상태변수로 하는 상태방정식을 다음과 같이 구성할 수 있다. 이 상태방정식은 로봇 운동제어에 가장 기본이 되는 식이다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta \underline{q} \\ \delta \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -(\underline{D}^0)^{-1} \underline{P}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{I} \\ (\underline{D}^0)^{-1} \underline{V}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{q} \\ \delta \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -(\underline{D}^0)^{-1} \end{bmatrix} \delta \tau \quad (7)$$

$$\underline{D}^0 = \begin{bmatrix} a_1^2(m_1 + m_2) + a_2^2 m_2 + 2a_1 a_2 m_2 \cos(q_2^0) & a_2^2 m_2 + a_1 a_2 m_2 \cos(q_2^0) \\ a_2^2 m_2 + a_1 a_2 m_2 \cos(q_2^0) & a_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}^0 = \begin{bmatrix} -2a_1 a_2 m_2 \sin(q_2^0) \dot{q}_2^0 & -2a_1 a_2 m_2 \sin(q_2^0) [\dot{q}_1^0 + \dot{q}_2^0] \\ 2a_1 a_2 m_2 \sin(q_2^0) \dot{q}_1^0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^0 : \left. \frac{\partial \underline{D}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \right|_{(\underline{q}^0, \underline{\dot{q}}^0, \underline{\ddot{q}}^0)} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 a_2 m_2 \sin(q_2^0) [2\dot{q}_1^0 + \dot{q}_2^0] \\ 0 & -a_1 a_2 m_2 \sin(q_2^0) \dot{q}_1^0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial \underline{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})}{\partial \underline{q}} \right|_{(\underline{q}^0, \underline{\dot{q}}^0, \underline{\ddot{q}}^0)} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 a_2 m_2 \cos(q_2^0) \dot{q}_2^0 [2\dot{q}_1^0 + \dot{q}_2^0] \\ 0 & a_1 a_2 m_2 \cos(q_2^0) \dot{q}_2^0 [\dot{q}_1^0]^2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial \underline{G}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})}{\partial \underline{q}} \right|_{(\underline{q}^0, \underline{\dot{q}}^0, \underline{\ddot{q}}^0)} = \begin{bmatrix} a_1 g(m_1 + m_2) \cos(q_1^0) + a_2 g m_2 \cos(q_1^0 + q_2^0) & a_2 g m_2 \cos(q_1^0 + q_2^0) \\ a_2 g m_2 \cos(q_1^0 + q_2^0) & a_2 g m_2 \cos(q_1^0 + q_2^0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

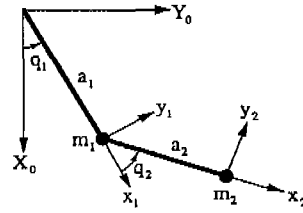


Fig. 2 2 link robot

식 (7)의  $\underline{0}$ 과  $\underline{I}$ 는  $\delta \underline{q}$ 의 크기와 적합한 영행렬과 단위행렬이다.

### 3. 2링크 로봇에 응용

각 링크 끝에 링크 질량을 집중질량  $m_1$ 과  $m_2$ 로 가정 한 2링크 로봇의 형상과 좌표계를 Fig. 2에 도시하였다. 이와 같은 단순화된 모델링은 과정 해설을 목적으로 흔히 다루어진다.<sup>(8)</sup> 중력방향은 절대좌표계의  $X_0$ 방향과 일치한다. 이 모델에 대한 기호 역동역학 해는 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$\tau_1 = [a_1^2 m_1 + a_1^2 m_2 + a_2^2 m_2 + 2a_1 a_2 m_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + a_2 m_2 [a_2 + a_1 \cos(q_2)] \ddot{q}_2 - 2a_1 a_2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) - a_1 a_2 m_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + g[a_1 m_2 \sin(q_1) + a_1 m_2 \sin(q_1) + a_2 m_2 \sin(q_1 + q_2)]$$

$$\tau_2 = a_2 m_2 [a_2 + a_1 \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + a_2^2 m_2 \ddot{q}_2 + a_1 a_2 m_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) + g a_2 m_2 \sin(q_1 + q_2) \quad (8)$$

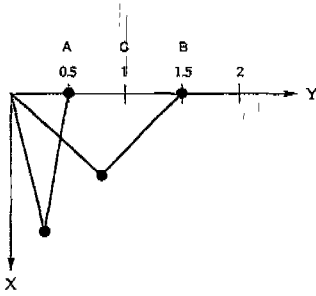


Fig. 3 2 link robot trajectory planning for linearization

식(8)을 바탕으로 식(5) 혹은 식(6) 형태의 선형 운동방정식을 구성하였다. 그 계수가 되는 행렬들은 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

Fig. 3에 도시한 바와 같이 점 A(0, 0.5)로부터 점 B(0, 1.5)사이를 1m/sec의 속도로 직선 정속운동을 하는 경우에 대하여 비선형 운동방정식을 이용한 구동토크를 구하고 같은 조건으로 같은 경로에서 동작점을 t=0.5초인 점 C(0, 1)로 선정한 선형 운동방정식에 대한 구동토크를 구하여 이들 두 가지 구동토크를 Fig. 4에 비교하였다. Fig. 3의 운동을 조인트 공간에서 시간의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$q_1 = \frac{\pi}{2} - \text{ArcCos}\left[\frac{(0.5+t)}{2}\right]$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{(0.5+t)^2}{4}}}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{(0.5+t)}{8\left[1-\frac{(0.5+t)^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$q_2 = \pi - \text{ArcCos}[1-0.5(0.5+t)^2]$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{(0.5+t)}{\sqrt{1-(1-0.5(0.5+t)^2)^2}}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{(0.5+t)^2(1-0.5(0.5+t)^2)}{\left[1-(1-0.5(0.5+t)^2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-(1-0.5(0.5+t)^2)^2}} \quad (10)$$

Fig. 5는 Fig. 4에서의 비선형 모델과 선형 모델에

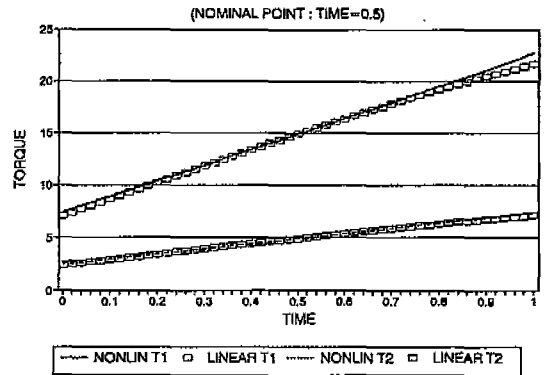


Fig. 4 Comparison of torque 1 and 2 between non-linear and linear model

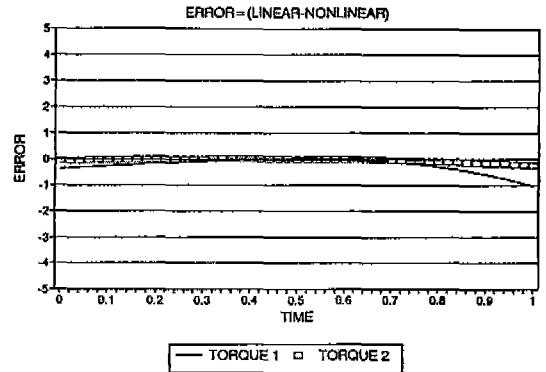


Fig. 5 Errors between nonlinear and linear model

서 각각 구한 구동토크의 차이를 도시한 것이다. Fig. 5에서 동작점으로 선정한 t=0.5 근처에서는 비선형 모델과 선형 모델의 차이가 거의 없으며, t=0 나 t=1 근처에서는 오차가 커짐을 알 수 있다. 또한 2번 링크운동의 영향까지 포함하는 토크 1의 오차의 크기가 토크 2의 오차의 크기보다 더 큰 값을 갖는다. 따라서 오차의 크기가 오차의 허용범위를 벗어난다면 더 많은 동작점의 선정이 필요하게 된다.

#### 4. 4링크 로봇에 응용

팬토그래프(pantograph) 형태로 평행사변형의 폐쇄 연쇄를 가지는 4링크 로봇의 형상과 좌표계를 Fig. 6에 도시하였다. 이런 구조를 포함한 로봇은 개방연쇄 구조에 비하여 대형 중량물을 다룰 수 있으며 역동역학 해에 관한 연구<sup>(10)(11)</sup>가 있다. 각 링크 중심에 질중질량을 가

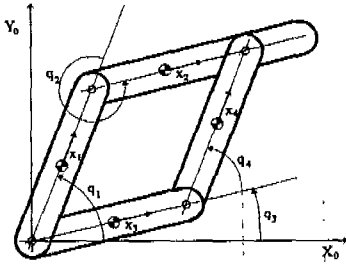


Fig. 6 Pantograph type robot

정하였고 조인트 1번과 3번이 구동부를 가지는 능동조인트(active joint)이다. 중력방향은 절대좌표계의  $Y_0$ 방향과 반대이다. 이 모델의 능동조인트에 대한 기호 역동역학 해는 부록의 식(A1)에 수록하였다. 식(A1)을 바탕으로 식(6) 형태의 선형 운동방정식을 구성하였다. 그 계수가 되는 행렬들은 부록의 식(A2)에 수록하였다.

비선형 방정식과 선형방정식의 결과를 비교하기 위한 경로계획은 조인트 공간에서 시간의 함수로 운전속도를 변화시켜 식(11)과 식(12)의 두 가지 경우로 하였다.

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\pi}{2} + 2t \\ q_3 = t \\ q_2 = 2\pi - q_1 + q_3 = \frac{3}{2}\pi - t \\ q_4 = q_1 - q_3 = \frac{\pi}{2} + t \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\pi}{2} + t \\ q_3 = \frac{t}{2} \\ q_2 = 2\pi - q_1 + q_3 = \frac{3}{2}\pi - \frac{t}{2} \\ q_4 = q_1 - q_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Fig. 7은 식(11)의 경로를 따라서 비선형 모델과 선형 모델에서 구한 구동토크의 차이를 능동조인트 1번과 3번에 대하여 각각 도시한 것이다. Fig. 8도 마찬가지로 식(12)의 경로를 따라서 구동토크의 차이를 능동조인트 1번과 3번에 대하여 각각 도시한 것이다. Fig. 7과 Fig. 8은 모두 동작점으로 선정된  $t=0.5$  부근에서 비선형 모델과 선형 모델의 차이가 거의 없으며, 동작점에서 멀어지면서 오차가 커짐을 알 수 있다. 그리고

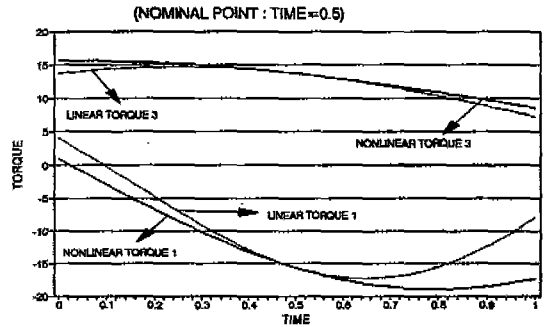


Fig. 7 Comparison of torque 1 and 3 by equation(11)

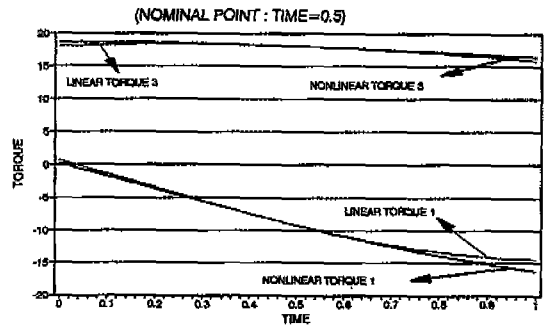


Fig. 8 Comparison of torque 1 and 3 by equation(12)

운전속도가 느린 Fig. 8의 경우에는 Fig. 7의 경우보다 넓은 범위에서 선형 모델이 비선형 모델에 접근됨을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 비선형 운동방정식의 선형화 방법에 관하여 기술하고 1차 근사법을 이용한 해석적 방법으로 비선형 운동방정식의 선형화 과정을 간단한 2링크 로봇의 경우와 평행사변형의 폐쇄연쇄를 가지는 펜토그래프 형태의 경우에 대하여 상세히 서술하였다. 그리고 이 과정을 컴퓨터를 사용하여 자동생성하도록 하였다. 임의의 경로에서 비선형 운동방정식에 의한 구동토크를 구하고, 같은 경로에서 동작점을 선정하여 구성한 선형 운동방정식에 의한 구동토크를 구하여 이들 값을 비교하였다. 또한 운전속도를 변화시키며 비선형 모델과 선형 모델의 차이를 비교하였다. 따라서 국부 선형화 방

법을 사용하는 경우에는 오차의 허용범위를 고려하여 동작점의 갯수 및 위치등을 결정하여야 한다. 선형 방정식의 감도행렬 중에서 관성력과 관련되는 감도행렬 ( $D^0$ )과 구심력 및 코리올리 힘과 관련되는 행렬 ( $V^0$ )은 비선형 운동방정식으로 부터 쉽게 구할 수 있다. 그리고 감도행렬 ( $D^0$ )는 항상 역행렬이 존재하므로 이 성질로부터 선형 운동방정식을 로봇 운동제어에 기초가 되는 상태방정식으로 변환할 수 있다.

### 참고문헌

1. Roberson, R. E. and Schwertassek, R., Dynamics of Multibody Systems, Springer-Verlag, 1988.
2. Balafontis, C. A. and Patel, R. V., Dynamic Analysis of Robot Manipulators: a Cartesian Tensor Approach, Klumer Academic Publishers, 1991.
3. Liang, C. G. and Lance, G. M., "A Differentiable Null Space Method for Constrained Dynamic Analysis", Trans. ASME J. of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 405-411, 1987.
4. Sohoni, V. N. and Whitesell, J., "Automatic Linearization of Constrained Dynamic Models", Trans. ASME J. of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design, Vol. 108, pp. 300-304, 1986.
5. Vukobratovic, M. and Nenad, K., "Computer-oriented Method for Linearization of Dynamic Models of Active Spatial Mechanisms", Mechanism and Machine Theory, Vol. 14, pp. 21-32, 1982.
6. Neuman, C. P. and Murray, J. J., "Linearization and Sensitivity Functions of Dynamic Robot Models", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 2, pp. 805-818, 1984.
7. Balafontis, C. A., Misra, P., and Patel, R. V., "Recursive Evaluation of Linearized Dynamic Robot Models", IEEE Robotics and Automation, Vol. 2, pp. 146-155, 1986.
8. Wolfram, S., Mathematica, Addison Wesley, 1991.
9. Leu, M. C. and Hemati, N., "Automated Symbolic Derivation of Dynamic Equations of Motion for Robotic Manipulators", Trans. ASME J. of Dynamics Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, pp. 172-179, 1986.
10. Luh, J. Y. S., and Zheng, Y., "Computation of Input Generalized Forces for Robot with Closed Kinematic Chain Mechanism", IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 95-103, 1985.
11. Nakamura, Y., and Ghodoussi, M., "A Computational Scheme of Closed Link Robot Dynamics Derived by D'Alembert Priciple", Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1354-1360, 1988.

부 록

$$T[1]=(g*11*m1*\text{Cos}[q[1]])/2 + g*11*m2*\text{Cos}[q[1]] + (g*14*m4*\text{Cos}[q[3]] + q[4])/2 + (11^2*m1*\text{ddq}[1])/4 + 11^2*m2*\text{ddq}[1] + (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*\text{ddq}[1])/2 + (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*\text{ddq}[2])/2 + (14^2*m4*\text{ddq}[3])/4 + (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*\text{ddq}[3])/2 + (14^2*m4*\text{ddq}[4])/4 - (11*12*m2*dq[1]^2*\text{Sin}[q[2]])/2 - 11*12*m2*dq[1]*dq[2]*\text{Sin}[q[2]] - (11*12*m2*dq[2]^2*\text{Sin}[q[2]])/2 + (13*14*m4*dq[3]^2*\text{Sin}[q[4]])/2$$

$$T[3]=(g*12*m2*\text{Cos}[q[1] + q[2]])/2 + (g*13*m3*\text{Cos}[q[3]])/2 + g*13*m4*\text{Cos}[q[3]] + (12^2*m2*\text{ddq}[1])/4 + (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*\text{ddq}[1])/2 + (12^2*m2*\text{ddq}[2])/4 + (13^2*m3*\text{ddq}[3])/4 + 13^2*m4*\text{ddq}[3] + (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*\text{ddq}[3])/2 + (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*\text{ddq}[4])/2 + (11*12*m2*dq[1]^2*\text{Sin}[q[2]])/2 - (13*14*m4*dq[3]^2*\text{Sin}[q[4]])/2 - 13*14*m4*dq[3]*dq[4]*\text{Sin}[q[4]] - (13*14*m4*dq[4]^2*\text{Sin}[q[4]])/2 \tag{A1}$$

$$D^0=\{(11^2*m1)/4 + 11^2*m2 + (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]])/2, (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]])/2, (14^2*m4)/4 + (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]])/2, (14^2*m4)/4, \{(12^2*m2)/4 + (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]])/2, (12^2*m2)/4, (13^2*m3)/4 + 13^2*m4 + (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]])/2, (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]])/2\}$$

$$V^0=\{-(11*12*m2*dq[1]*\text{Sin}[q[2]]) - 11*12*m2*dq[2]*\text{Sin}[q[2]], -(11*12*m2*dq[1]*\text{Sin}[q[2]]) - 11*12*m2*dq[2]*\text{Sin}[q[2]], 13*14*m4*dq[3]*\text{Sin}[q[4]], 0, \{11*12*m2*dq[1]*\text{Sin}[q[2]], 0, -(13*14*m4*dq[3]*\text{Sin}[q[4]]) - 13*14*m4*dq[4]*\text{Sin}[q[4]], -(13*14*m4*dq[3]*\text{Sin}[q[4]]) - 13*14*m4*dq[4]*\text{Sin}[q[4]]\}$$

$$P^0=\{-(g*11*m1*\text{Sin}[q[1]])/2 - g*11*m2*\text{Sin}[q[1]], -(11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*dq[1]^2)/2 - 11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*dq[1]*dq[2] - (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*dq[2]^2)/2 - (11*12*m2*\text{ddq}[1]*\text{Sin}[q[2]])/2 - (11*12*m2*\text{ddq}[2]*\text{Sin}[q[2]])/2, -(g*14*m4*\text{Sin}[q[3]] + q[4])/2, (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*dq[3]^2)/2 - (13*14*m4*\text{ddq}[3]*\text{Sin}[q[4]])/2 - (g*14*m4*\text{Sin}[q[3]] + q[4])/2, \{-(g*12*m2*\text{Sin}[q[1] + q[2]])/2, (11*12*m2*\text{Cos}[q[2]]*dq[1]^2)/2 - (11*12*m2*\text{ddq}[1]*\text{Sin}[q[2]])/2 - (g*12*m2*\text{Sin}[q[1] + q[2]])/2, -(g*13*m3*\text{Sin}[q[3]])/2 - g*13*m4*\text{Sin}[q[3]], -(13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*dq[3]^2)/2 - 13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*dq[3]*dq[4] - (13*14*m4*\text{Cos}[q[4]]*dq[4]^2)/2 - (13*14*m4*\text{ddq}[3]*\text{Sin}[q[4]])/2 - (13*14*m4*\text{ddq}[4]*\text{Sin}[q[4]])/2\} \tag{A2}$$