

불확실성 및 관절 유연성을 고려한 로봇의 전실제어기 설계

한 명 철*

Robust control design for robots with uncertainty and joint-flexibility

Myung-Chul Han*

ABSTRACT

An improved robust control law is proposed for uncertain rigid robots. The uncertainty is nonlinear and (possibly fast) time-varying. Therefore, the uncertain factors such as imperfect modeling, friction, payload change, and external disturbances are all addressed. Based on the possible bound of the uncertainty, the controller is constructed. For uncertain flexible-joint robots, some feedback control terms are then added to the proposed robust control law in order to stabilize the elastic vibrations at the joints. To show that the proposed control laws are indeed applicable, the stability study based on Lyapunov function, a singular perturbation approach, and simulation results are presented.

Key Words : Robust control(견실제어), Robot manipulators(로봇 매니퓰레이터), Flexible-joint robot(유연관절로봇), Singular perturbation(특이섭동)

1. 서론

산업용 로봇 매니퓰레이터의 제어 알고리즘의 개발에 있어 장애 중의 하나가 실제 로봇 매니퓰레이터와 주위 환경의 정확한 모델링의 어려움이다. 그 시스템 동역학은 예를 들면, 부정확한 파라미터들의 값, 마찰력, payload의 변화, 외란 등 여러 종류의 불확실성을 포함하게된다. 이러한 불확실성을 고려한 견실제어기 설계는 Chen,⁽¹⁾ Chen and Pandey,⁽²⁾ Kang,⁽³⁾ Reithmeier and Leitmann,⁽⁴⁾ Shoureshi et al⁽⁵⁾ 등에

의해 제시되었다. 이들에 의해 불확실 인자들의 가능한 경계치가 제어기 설계에 사용된 확정제어(deterministic control) 알고리즘이 제시되고, 또한 주어진 제어기가 견딜 수 있는 불확실성의 정도가 분석되었다.

로봇 시스템의 많은 제어 알고리즘이 지난 이십여 년간 강성 모델(rigid model)에 대해 개발되어 왔다. 그러나, Sweet and Good⁽⁶⁾의 실험적 결과에 의해 유연성(flexibility)이 고려되지 않은 제어알고리즘의 경우 때에 따라 시스템이 불안정에 이른다는 것이 입증되었다. 이렇게 실험적 발견에 의해 제기된 유연관절 로봇

* 부산대학교 제어기계공학과, 기계기술연구소

의 제어기 설계는 Spong⁽¹¹⁾, Ghorbel and Spong⁽⁴⁾, Lozano and Brogliato⁽⁷⁾, Nicosia and Tomei⁽⁶⁾ 등에 의해 이론적으로 뒷받침되었다.

본 논문에서는 첫째, 강성 로봇의 위치추종제어를 위한 새로운 견실제어기를 개발한다. 이 제어기는 로봇 운동방정식 중 관성행렬의 미분치와 코리올리력과 원심력 항에서 유출된 행렬의 차이가 교대대칭(skew symmetric)되는 성질을 이용하는 것으로 기존 견실제어기^(1,12)의 단점들을 극복한다. 즉 기존의 견실제어기 설계시 이용되는 관성행렬의 역치(inverse)와 고유값(eigenvalue)의 필요성을 없애고, 관성행렬의 추측값(estimated value)에 대한 제한도 제거한다. 둘째, 불확실 유연관절 로봇의 견실제어기로서 강성 로봇의 견실제어기에 속도 항이 첨가된 복합제어기가 제안되어 유연성에 의한 진동을 극복한 위치추종제어가 가능토록 한다. 이 두가지 모두 안정성 분석이 수행된다. 특히 유연관절 로봇의 경우엔 특이섭동(singular perturbation) 접근방법에 의해 안정성 분석이 이루어진다. 이 제어기의 적용으로 1축 유연관절 매니퓰레이터의 시뮬레이션을 수행하여 이론적 결과를 뒷받침한다.

2. 시스템 운동방정식 및 안정성

일반적으로 n 관절 로봇 매니퓰레이터의 운동방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(q, \dot{q}, t) = \tau(t) \quad (1)$$

여기서,

$q : n \times 1$ 관절위치벡터(vector of joint positions)

$\tau : n \times 1$ 토크벡터(vector of joint torques supplied by the actuator)

$M(q) : n \times n$ 관성행렬(inertia matrix)

$C(q, \dot{q})\dot{q} : n \times 1$ 원심력 및 코리올리시스힘 벡터(vector of centrifugal and Coriolis forces)

$g(q) : n \times 1$ 중력벡터(vector of gravity force)

$f(q, \dot{q}, t) : n \times 1$ 불확실토크벡터(vector of uncertain torques)

식 (1)은 다음과 같은 성질을 갖고 있으며 이를 바탕으로 본 논문에서 제어기 설계가 이루어진다. 첫째, 관성행렬 $M(q)$ 은 양확정(positive definite)이다. 둘째, $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ 이 교대대칭(skew symmetric)

이 될 수 있도록 적당한 $C(q, \dot{q})$ 가 선택될 수 있다. (Spong and Vidyasagar⁽¹²⁾참조) 셋째, 불확실성 항 $f(q, \dot{q}, t)$ 는 구조적, 비구조적 불확실성에 의해 발생되는 토크를 나타낸다. 예를 들면, 마찰력, 비모델 동역학(unmodeled dynamics)에 의한 토크나 외란 등이 여기에 속할 수 있다.

흔히 실용적 안정성(practical stability) 혹은 대역적 평등흡인성(global uniform attractivity)으로 지칭되는 안정성은 다음과 같이 정의 된다.^(1, 2, 5, 14)

정의: 실용적 안정성(혹은 대역적 평등 흡인성)
동적 시스템

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= f(\xi(t), t), \quad \xi(t) \in R^n \\ \xi(t_0) &= \xi_0 \end{aligned} \quad (2)$$

은 아래의 성질들을 만족시키는 상수 $r \geq 0$ 가 존재할 때 실용적 안정성(혹은 대역적 평등 흡인성)을 갖는다고 한다.

(P1) 해의 존재성(existence of solutions):

각 (ξ_0, t_0) 에 대하여 식 (2)의 해 $\xi(\cdot) : [t_0, \infty)$ 가 존재한다.

(P2) 평등유계성(uniform boundedness):

임의의 $r > 0$ 에 대하여, $\|\xi_0\| \leq r$ 이면 $\|\xi(t)\| \leq d(r)$, $\forall t \in [t_0, \infty)$ 을 만족하는 상수 $d(r) < \infty$ 가 존재한다.

(P3) 평등극유계성(uniform ultimate boundedness): 임의의 $\bar{r} \geq r$ 와 $r > 0$ 에 대하여, $\|\xi_0\| \leq r$ 이면 $\|\xi(t)\| \leq \bar{r}$, $\forall t \geq t_0 + T(r, \bar{r})$ 을 만족하는 유한시간 $T(r, \bar{r})$ 이 존재한다.

(P4) 평등안정성(uniform stability): 임의의 $\bar{r} \geq r$ 에 대하여, $\|\xi_0\| \leq \delta(\bar{r})$ 이면 $\|\xi(t)\| \leq \bar{r}$, $\forall t \geq t_0$ 을 만족하는 상수 $\delta(\bar{r})$ 가 존재한다.

대략적으로 이 안정성을 점근안정성의 느슨한 형태로 볼 수 있다. 즉 실용적 안정성은 모든 상태벡터의 궤적이 발산하지 않고 유한 시간 내에 원점 주위의 볼(ball) 내로 들어와 머무는 것을 의미한다.

3. 추종제어를 위한 견실제어기

위 로봇의 운동방정식에서 불확실성 항 $f(q, \dot{q}, t)$ 뿐만 아니라 $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, $g(q)$ 등에도 불확실성이 존재한다. 그 불확실성의 기준 값으로부터 각 항의 예측가정한 값을 각각 $\hat{M}(q)$, $\hat{C}(q, \dot{q})$, $\hat{g}(q)$, $\hat{f}(q, \dot{q}, t)$ 라 하면

추종제어를 위해 다음과 같은 건설제어기가 제안된다.

$$\tau = \hat{M}(q)(\dot{q}_d - S\dot{e}) + \hat{C}(q, \dot{q})(\dot{q}_d - S\dot{e}) + \hat{g}(q) + \hat{f}(q, \dot{q}, t) + p(q, \dot{q}, t) - K_a e - K_b \dot{e} \quad (3)$$

여기서,

q_d : 목표궤적 (desired trajectory)

$e = q - q_d, \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d$

$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$: 양확정 상수행렬 (positive constant matrix)

$K_a = \text{diag}\{k_{a1}, k_{a2}, \dots, k_{an}\}$: 양확정 상수행렬

$K_b = \text{diag}\{k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bn}\}$: 양확정 상수행렬

$p(q, \dot{q}, t)$: 건설제어 항 (robust control term)

건설제어 항 $p(q, \dot{q}, t)$ 은 다음과 같은 절차로 정의된다. 먼저 불확실성에 의해 발생하는

$$\phi(q, \dot{q}, t) = (\hat{M} - M)(\dot{q}_d - S\dot{e}) + (\hat{C} - C)(\dot{q}_d - S\dot{e}) + \hat{g} - g + \hat{f} - f \quad (4)$$

의 경계함수를 찾는다.

$$\rho(q, \dot{q}, t) \geq \|\phi(q, \dot{q}, t)\| \quad (5)$$

이 경계함수를 찾기위해 불확실성 인자값들이 속한 집합들의 경계치에 대한 정보가 필요하다. 그러나 그 인자들의 시간에 따른 구현방식과 건설제어기설계는 서로 독립적이다. 그러므로 적용제어에서는 고려되기 어려운 고 주파수 시변불확실성 인자도 본 연구의 대상시스템에 포함될 수 있다.

본 논문에서 사용되는 벡터의 노름(norm)은 유클리디안 노름 (Euclidean norm)이고, 행렬의 노름은 유클리디안 유도 노름 (induced norm)이다. 즉 예를 들어, 행렬 M 의 노름 $\|M\|$ 은 $\sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)}$ 이다. 여기서 $\lambda_{\min}(\cdot)$ (혹은 $\lambda_{\max}(\cdot)$)은 최소(혹은 최대) 고유값(eigenvalue)를 나타낸다.

그 다음, 건설제어항이 아래와 같이 정의된다.

$$P = [p_1 p_2 \dots p_n]^T$$

$$p_i = \begin{cases} -\frac{\mu_i}{\|\mu_i\|} \rho, & \text{if } \|\mu_i\| \geq \varepsilon \\ -\rho \sin(\pi \mu_i / 2\varepsilon), & \text{if } \|\mu_i\| < \varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

여기서,

$$\mu_i = (\dot{e}_i + S_i e_i) \rho(q, \dot{q}, t) \quad (7)$$

그리고, ε 은 설계자에 의해 선택되는 상수이다.

건설제어 항 $p(q, \dot{q}, t)$ 는 더 일반적인 형태의 함수인

$$P_i = \begin{cases} -\frac{\mu_i}{\|\mu_i\|} \rho, & \text{if } \|\mu_i\| \geq \varepsilon \\ -\frac{\mu_i}{\varepsilon} \rho, & \text{if } \|\mu_i\| < \varepsilon \end{cases} \quad (8)$$

로 정의될 수 있으나 다음 절에서 고려될 유연 관절 로봇에도 적용하기 위해 전 구간에서 미분가능한 식 (6)의 형태를 취하였다. 제안된 제어기 식 (3)은 다음과 같이 기존 건설제어기들의 단점들을 극복하였다. 첫째, 역행렬의 계산을 피하여 제어기 실현 시 계산량을 줄일 수 있다(Chen⁽¹⁾, Spong and Vidyasagar⁽¹²⁾와 비교). 둘째, 제어기 설계 시 불확실성을 내포한 관성행렬 $M(q)$ 의 최대, 최소 고유값(eigenvalue)이 불필요하고(Spong and Vidyasagar⁽¹²⁾와 비교), 추측값 $\hat{M}(q)$ 에 대한 제한을 제거하였다(Chen⁽¹⁾과 비교).

다음 정리는 제안된 제어기에 의한 로봇시스템 성능을 서술한다.

정리 1. 제안된 제어기 식(3)에 의해, 불확실 로봇시스템 식(1)은 실용적 안정성(global practical stability)을 갖는다.

증명: 다음의 함수를 리아프노프(Lyapunov) 함수 후보로 택한다.

$$V(\bar{e}, t) = (\dot{e} + Se)^T M(\dot{e} + Se) + e^T (K_a + SK_b) e \quad (9)$$

여기서,

$$\bar{e} = [e^T, \dot{e}^T]^T = [e_1 \dots e_n, \dot{e}_1 \dots \dot{e}_n]^T \quad (10)$$

먼저 다음과 같은 부등식이 항상 성립하도록 각 경계함수의 양의 상수 φ_1, φ_2 가 존재함을 보인다.

$$\varphi_1 \|\bar{e}\|^2 \leq V(\bar{e}, t) \leq \varphi_2 \|\bar{e}\|^2 \quad (11)$$

식 (9)으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\bar{e}, t) &\geq \lambda_{\min}(M) \|\dot{e} + Se\|^2 + e^T (K_a + SK_b) e \\ &= \lambda_{\min}(M) \sum_{i=1}^n (\dot{e}_i + s_i e_i)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (k_{ai} + s_i k_{bi}) e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [\lambda_{\min}(M) \dot{e}_i^2 + 2\lambda_{\min}(M) s_i \dot{e}_i e_i + \lambda_{\min}(M) s_i^2 e_i^2 + (k_{ai} + s_i k_{bi}) e_i^2] \\ &= \sum_{i=1}^n [e_i, \dot{e}_i] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\min}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\min}(M)s_i \\ \lambda_{\min}(M)s_i & \lambda_{\min}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

다음과 같이 φ_{1i} 를 정의하므로써

$$\varphi_{1i} \equiv \lambda_{\min} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_{\min}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\min}(M)s_i \\ \lambda_{\min}(M)s_i & \lambda_{\min}(M) \end{bmatrix} \right\} \quad (13)$$

식 (12)의 결과로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\bar{e}, t) &\geq \sum_{i=1}^n \varphi_{1i} (e_i^2 + \dot{e}_i^2) \geq \varphi_1 \sum_{i=1}^n (e_i^2 + \dot{e}_i^2) \\ &= \varphi_1 \|\bar{e}\|^2 \quad (14) \end{aligned}$$

여기서, $\varphi_1 \equiv \min\{\varphi_{1i}\}$.

한편, 위와 비슷한 분석을 통해 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\bar{e}, t) &\leq \lambda_{\max}(M) \|\dot{e} + Se\|^2 + e^T (K_a + SK_b) e \\ &= \sum_{i=1}^n [e_i \ \dot{e}_i] \begin{bmatrix} \lambda_{\max}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\max}(M)s_i \\ \lambda_{\max}(M)s_i & \lambda_{\max}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varphi_{2i} (e_i^2 + \dot{e}_i^2) \leq \varphi_2 \|\bar{e}\|^2 \quad (15) \end{aligned}$$

여기서,

$$\varphi_{1i} = \lambda_{\min} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_{\max}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\max}(M)s_i \\ \lambda_{\max}(M)s_i & \lambda_{\max}(M) \end{bmatrix} \right\} \quad (16)$$

$$\varphi_2 \equiv \max\{\varphi_{2i}\} \quad (17)$$

결과식 (14)와 (15)으로 부터 부등식 (11)이 성립함을 알 수 있다. 그리고, 관련된 행렬들이 양확정이므로 상수 φ_{1i} , φ_{2i} 들이 양수이다.

다음은 리아프노프함수 후보인 $V(\bar{e}, t)$ 의 시간에 대한 미분치가 원점을 중심으로한 어느 볼(ball)의 외부에서는 항상 음임을 보여준다. 제어되는 시스템의 임의의 궤도를 따른 $V(\bar{e}, t)$ 의 시간에 대한 미분치는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, t) &= 2(\dot{e} + Se)^T M(\ddot{e} + Se) + (\dot{e} + Se)^T \\ &\quad \dot{M}(\dot{e} + Se) + 2e^T (K_a + SK_b) \dot{e} \quad (18) \end{aligned}$$

식 (1)과 (3)으로 부터, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M\ddot{e} &= -M\ddot{q}_d - C(\dot{q}_d - Se + Se + \dot{e}) - g - f \\ &\quad + \hat{M}(\ddot{q}_d - S\dot{e}) + \hat{C}(\dot{q}_d - Se) + \hat{g} + \hat{f} + p \\ &\quad - K_a e - K_b \dot{e} \quad (19) \\ &= (\hat{M} - M)\ddot{q}_d - \hat{M}S\dot{e} + (\hat{C} - C)(\dot{q}_d - Se) \\ &\quad - C(\dot{e} + Se) + \hat{g} - g + \hat{f} - f + p - K_a e - K_b \dot{e} \end{aligned}$$

식 (19)를 식 (18)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, t) &= 2(\dot{e} + Se)^T [(\hat{M} - M)(\ddot{q}_d - S\dot{e}) \\ &\quad + (\hat{C} - C)(\dot{q}_d - Se) + \hat{g} - g + \hat{f} - f + p] \\ &\quad + (\dot{e} + Se)^T (\hat{M} - 2C)(\dot{e} + Se) \quad (20) \\ &\quad - 2(\dot{e} + Se)^T (K_a e + K_b \dot{e}) \\ &\quad + 2e^T (K_a + SK_b) \dot{e} \\ &= 2(\dot{e} + Se)^T (\phi + p) - 2e^T SK_a e - 2\dot{e}^T K_b \dot{e} \end{aligned}$$

일반성을 잃지 않고, 주어진 상태변수에 의해 다음을 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\mu_i\| &\leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (21) \\ \|\mu_i\| &\geq \varepsilon, \quad i = l+1, l+2, \dots, n. \end{aligned}$$

또한, 다음 부등식을 이용하여

$$\begin{aligned} \|\dot{e} + Se\| &\leq \|\dot{e}_1 + s_1 e_1\| + \|\dot{e}_2 + s_2 e_2\| + \dots \\ &\quad + \|\dot{e}_n + s_n e_n\| \quad (22) \end{aligned}$$

식 (20)으로 부터, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, t) &\leq 2 \sum_{i=1}^n \|\dot{e}_i + s_i e_i\| \rho - \sum_{i=1}^l \frac{2}{\varepsilon} \|\dot{e}_i + s_i e_i\|^2 \rho^2 \\ &\quad - \sum_{i=l+1}^n 2 \|\dot{e}_i + s_i e_i\| \rho - \sum_{i=1}^n (2s_i k_{ai} e_i^2 + 2k_{bi} \dot{e}_i^2) \\ &\leq s \sum_{i=1}^l (\|\dot{e}_i + s_i e_i\| \rho - \frac{1}{\varepsilon} \|\dot{e}_i + s_i e_i\|^2 \rho^2) \\ &\quad - k_0 \sum_{i=1}^n (e_i^2 + \dot{e}_i^2) \\ &= l \frac{\varepsilon}{2} - k_0 \|\bar{e}\|^2 \quad (23) \end{aligned}$$

여기서,

$$k_0 = \min\{2s_i k_{ai}, 2k_{bi}\} \quad (24)$$

그러므로, $\|\bar{e}\| > \sqrt{l\varepsilon/2k_0}$ 일때, 리아프노프함수 후보 $V(\bar{e}, t)$ 의 시간에 대한 미분치는 항상 음이다.

결과적으로, 식 (14), (15), (23)를 종합하여 볼 때, 불확실성 로봇시스템의 대역적·실용적 안정성이 보장된다. (Han and Chen,⁽⁵⁾ Corless and Leitmann,⁽⁶⁾

Leitmann⁶⁾ 등을 참조)

4. 유연 관절로봇의 건설제어기

로봇 관절의 유연성이 무시될 수 없는 경우, 로봇팔과 작동기 사이에 스프링이 삽입된 모델로 단순화하여 다음과 같은 운동방정식으로 불확실 유연 관절 로봇을 표현할 수 있다.

$$D(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + g(q_1) + f(q_1, \dot{q}_1, t) + K(q_1 - q_2) = 0 \quad (25)$$

$$I_a\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) = \tau(t) \quad (26)$$

여기서, 벡터 q_1 과 q_2 는 각각 링크 각도와 작동기의 각도를 나타내고, 대각(diagonal) 행렬 K 는 관절의 강성(stiffness)를 나타낸다. I_a 는 작동기의 관성행렬로 식 (1)와 (25), (26)을 비교하면 $M(q) = D(q_1) + I_a$ 이다.

이와같이 관절의 유연성이 고려된 불확실성 유연관절 로봇에 대해, 다음의 복합 제어 알고리즘을 생각한다.

$$\tau(t) = \tau_r(t) + K_c(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \quad (27)$$

여기서, $\tau_r(t)$ 은 3 절에서 제안된 제어기이며, 제어 상수 K_c 는 아래 식 (38)의 상수 행렬 A 가 안정(Hurwitz)하도록 그 값을 정한다.

다음은 안정성 분석을 위하여, 식 (25), (26), (27)으로 표현되는 폐회로 시스템 방정식을 적절한 특이섭동(singularly perturbed) 모델로 변환한다. 먼저, 상수 대각 행렬 K, K_c 을 다음과 같이 나타낸다.

$$K = K_1/\delta^2, K_c = K_2/\delta \quad (28)$$

여기서, δ 는 작은 값의 파라미터이다. 그리고, $x_1 = -K(q_1 - q_2)$ 라 놓으면, 식 (25)와 (26)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + g(q_1) + f(q_1, \dot{q}_1, t) = x_1 \quad (29)$$

$$\delta^2 I_a \ddot{x}_1 + \delta K_2 \dot{x}_1 + K_1 x_1 = K_1(\tau_r - I_a \ddot{q}_1) \quad (30)$$

여기서
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \delta \dot{x}_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

이면, 식 (30)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I_a^{-1}K_1 \end{bmatrix} (\tau_r - I_a \ddot{q}_1) \quad (32)$$

유연성을 무시할 수 있는 경우 즉 $\delta = 0$ 일 때, 식 (30)과 (31)으로부터

$$x = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (\tau_r - I_a \ddot{q}_1) \quad (33)$$

이며, 식 (29)는 강체(rigid) 로봇인 식 (1)이 된다. 강체 로봇과 유연관절 로봇의 x 값의 차이를 다음과 같이 정의 하면,

$$y = x - \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (\tau_r - I_a \ddot{q}_1) \quad (34)$$

식 (32)는

$$\begin{aligned} \delta \dot{y} &= \delta \dot{x} - \delta \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\tau}_r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix} (y + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (\tau_r - I_a \ddot{q}_1)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ I_a^{-1}K_1 \end{bmatrix} (\tau_r - I_a \ddot{q}_1) - \delta \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\tau}_r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix} y - \delta \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\tau}_r \end{aligned} \quad (35)$$

으로 변환된다. 여기서, $\tau_r = \tau_r - I_a \ddot{q}_1$ 결국, 다음과 같은 특이섭동 모델을 얻었다.

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + g(q_1) + f(q_1, \dot{q}_1, t) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} y + \tau_r \quad (36)$$

$$\delta \dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix} y - \delta \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\tau}_r \quad (37)$$

여기서, 제어 상수 행렬 K_c (즉 K_2)의 설계조건을 이야기하면, 다음 상수 행렬이 안정(Hurwitz)하도록 그 값을 정한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

제어된 시스템 (36)과 (37)의 안정성을 조사하기 위하여 다음과 같은 분석을 한다. 아래와 같은 리아프노

프 함수 후보를 생각하자.

$$V_0(z, t) = (1-d)V(\bar{e}, t) + dy^T Py, \quad 0 < d < 1 \quad (39)$$

여기서, $z = [\bar{e}^T y^T]^T$, 그리고 $P > 0$ 는 리아프노프 방정식의 해이다.

$$A^T P + PA + Q = 0, \quad Q > 0 \quad (40)$$

양수 d 의 선택에 대해서는 아래 분석 중 설명될 것이다.

이 리아프노프함수 후보의 시간에 대한 미분치를 구하면

$$\dot{V}_0(z, t) = (1-d)\dot{V}(e, t) + 2dy^T P\dot{y} \quad (41)$$

앞 절의 식 (23)의 결과에 따라

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(z, t) \leq (1-d) & \left(\frac{l\varepsilon}{2} - k_0 \|\bar{e}\|^2 + 2\|\dot{e} + S e\| \|y\| \right) \\ & + dy^T P \left(\frac{2}{\delta} A y - 2[I \ 0]^T \dot{t}_i \right) \end{aligned} \quad (42)$$

다음의 부등식

$$2y^T P [I \ 0]^T \dot{t}_i \leq \alpha_2 \|y\|^2 + \alpha_3 \|y\| \quad (43)$$

이 성립한다면, 부등식

$$\begin{aligned} \|\dot{e} + S e\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{e}_i + s_i e_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (2\dot{e}_i^2 + 2s_i^2 e_i^2)} \\ &\leq \sqrt{\alpha_1^2 \sum_{i=1}^n (\dot{e}_i^2 + e_i^2)} = \alpha_1 \|\bar{e}\| \\ &\alpha_1^2 \max_{i \in V} \{2, 2s_i^2\} \end{aligned} \quad (44)$$

을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(z, t) &\leq -(1-d)k_0 \|\bar{e}\|^2 - \left(\frac{d}{\delta} \lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2 \right) \|y\|^2 \\ &\quad + 2(1-d)\alpha_1 \|\bar{e}\| \|y\| + d\alpha_3 \|y\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2} \\ &= -[\|\bar{e}\| \|y\|] R [\|\bar{e}\| \|y\|]^T \\ &\quad + d\alpha_3 \|y\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (45)$$

여기서,

$$R = \begin{bmatrix} (1-d)k_0 & -(1-d)\alpha_1 \\ -(1-d)\alpha_1 & \frac{d}{\delta} \lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

식 (43)은 시스템 방정식에 따라 광역적(global)으로 만족할 수 있고, 그렇지 않을 경우에 대해선 아래에서 지역적(local)으로 안정성을 분석할 것이다. 부등식

$$(1-d)k_0 \left(\frac{d}{\delta} \lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2 \right) - (1-d)^2 \alpha_1^2 > 0 \quad (47)$$

을 만족하는 δ 에 대하여, 즉,

$$\delta < \frac{dk_0 \lambda_{\min}(Q)}{(1-d)\alpha_1^2 + dk_0 \alpha_2} =: \delta_1 \quad (48)$$

행렬 R 은 양확정이다. 그러므로, 식 (48)을 만족하는 δ 에 대하여,

$$\|z\|^2 = \|\bar{e}\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 \quad (49)$$

이기 때문에 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(z, t) &\leq -\lambda_{\min}(R) \|z\|^2 + d\alpha_3 \|y\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2} \\ &\leq -\lambda_{\min}(R) \|z\|^2 + d\alpha_3 \|z\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

식 (50)로부터, 식 (48)를 만족하는 δ 와 아래 부등식을 만족하는 z 에 대해 $\dot{V}_0(z, t)$ 는 항상 음임을 알 수 있다.

$$\|z\| \frac{d\alpha_3 + \sqrt{d^2 \alpha_3^2 + 2(1-d)l\varepsilon \lambda_{\min}(R)}}{2\lambda_{\min}(R)} =: l_1 \quad (51)$$

여기서 식 (43)를 다시 생각해 본다. 그 가정이 성립한다면 안정성 문제를 광역적(global)으로 다룰 수 있으나, 그렇지 않을 경우 상수 α_2 와 α_3 가 존재하기 위하여 지역적(local)으로 안정성 문제를 생각하는 것이 자연스럽다. 먼저 $\bar{e} = 0$ 에 중심을 두고 반지름이 l_2 인 닫힌(closed) 볼을 생각한다. 이 볼에서 $O(1/\varepsilon)$ 인 상수 α_2 와 α_3 가 존재함을 알 수 있다. 그러나 식 (43)이 만족할 지라도 $l_1 < l_2$ 일 때만 지역적 안정성이 의미를 갖기 때문에 다음에서 l_1 의 값을 분석한다. 식 (46)를 기초로 다음을 얻는다.

$$\lambda_{\min}(R) = \frac{\eta_2 - \sqrt{\eta_2^2 - 4\eta_1}}{2} \quad (52)$$

여기서

$$\eta_1 = (1-d)k_0 \left(\frac{d}{\delta} \lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2 \right) - (1-d)^2 \alpha_1^2 \quad (53)$$

$$\eta_2 = (1-d)k_0 + \frac{d}{\delta} \lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2 \quad (54)$$

다음의 극한 값을 고려하여

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda_{\min}(R) = (1-d)k_0 \quad (55)$$

다음의 l_1 의 극한치를 얻을 수 있다.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} l_1 = \frac{d\alpha_3 + \sqrt{d^2\alpha_3^2 + 2(1-d)^2k_0\varepsilon}}{2(1-d)k_0} \quad (56)$$

여기서 ε 과 d 는 임의의 작은 수로 취할 수 있기 때문에 $O(\varepsilon^2)$ 의 d 를 선택한다면 l_2 보다 작은 l_1 의 값을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그 때의 δ 값을 δ_2 라 하고 편리를 위해 $\delta^* = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 라 정의한다. 결국 분석 결과 일반적인 경우(즉, 식 (43)이 만족하지 않는 경우)는 다음의 정리로 이 절의 결과를 종합할 수 있다.

정리 2. 전실편복합제어기 (27)에 의한 특이점동 시스템 (36)과 (37) (불확실 유연관절 로봇)은 모든 $\delta \in (0, \delta^*)$ 에 대하여 실용적으로 안정하다.

5. 제어기 설계 예: 1축 유연관절 매니플레이터

이 절에서는 앞에서 얻은 이론적 결과를 적용하는 예로 Fig. 1의 1축 유연관절 매니플레이터 (Spong and Vidyasagar, ⁽¹²⁾ pp.220)의 제어기 설계와 시스템 응답을 살펴 본다.

이 조작기의 운동방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$I_1 \ddot{q}_1 + Dgl \sin(q_1) + k(q_1 - q_2) + f(t) = 0 \quad (57)$$

$$I_2 \ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \quad (58)$$

시뮬레이션 실행을 위해 다음과 같이 불확실 파라미터들의 데이터를 사용한다.

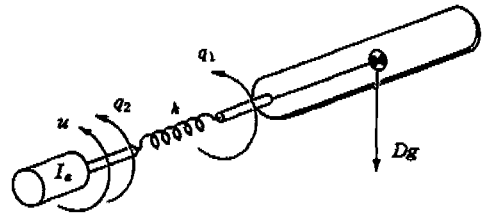


Fig. 1 Single-link flexible-joint manipulator

Table 1 Simulation data for unknown parameters

Unknown parameters	Maximum value	Minimum value	Real value
I	5	10	7
Dgl	5	10	9
f(t)	-1	1	sin(20t)

Table 1의 데이터는 단지 시뮬레이션을 위한 것으로 값의 단위는 별 의미가 없다. (Spong and Vidyasagar, ⁽¹²⁾ pp.226 참조)

그 밖의 파라미터들은 $I_2 = 1, k = 25/\delta^2$ 를 취하고 제어기 설계를 위하여 불확실 파라미터들의 추측 값을 $\bar{I} = 5, \overline{Dgl} = 5$ 로 하였다. 제어기 상수 $k_c = 10/\delta$ 를 취하므로 식 (38)의 행렬 A 의 고유치는 모두 -5로 안정하다. 이 조작기의 목표궤적을 $q_{1d} = \sin(t)$ 라 할 때 전실편제어기는 다음과 같다.

$$u = 6(\ddot{q}_{1d} - s\dot{e}) + 5\sin(q_1) + p - k_a e - k_b \dot{e} + 10(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)/\delta \quad (59)$$

$$p = \begin{cases} -\frac{\mu}{\|\mu\|} \rho, & \text{if } \|\mu\| \geq \varepsilon \\ -\rho \sin(\pi\mu/2\varepsilon), & \text{if } \|\mu\| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\mu = (e + s\dot{e})\rho, \quad \rho = 6\|\dot{e}\| + 12$$

제어기 내의 상수들은 다음과 같이 선택하였다. $k_a = 1, k_b = 2, s = 1, \varepsilon = 1$. Fig. 2와 3은 $\delta = 0.03$ 일 때의 두 축의 응답을 나타낸 것으로 목표궤적을 잘 추종함을 볼 수 있다. Fig. 4와 5는 $\delta = 0.3$ 일 때, Fig. 6와 7은 $\delta = 3$ 일 때의 시스템응답을 각각 나타낸다. Fig. 6와 7에서 보듯이 δ 가 큰 값을 갖을 때는 시스템이 불안정해져 앞 절의 특이점동 분석의 결과와 일치함을 알 수 있다.

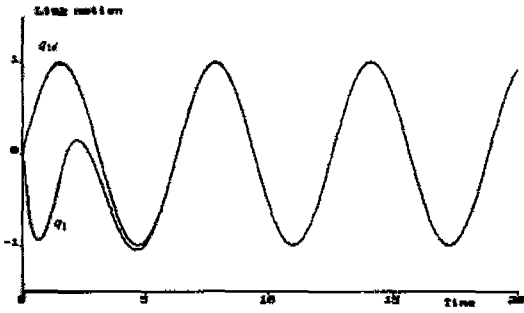


Fig. 2 Desired trajectory and history of link position when $\delta=0.03$

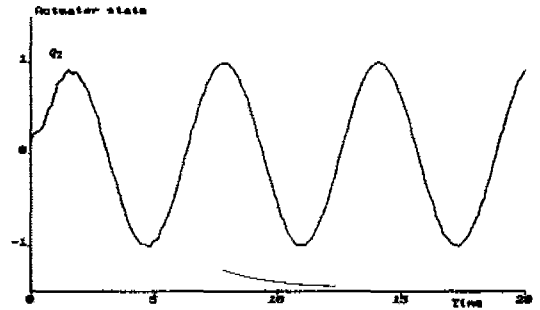


Fig. 5 History of actuator position when $\delta=0.3$

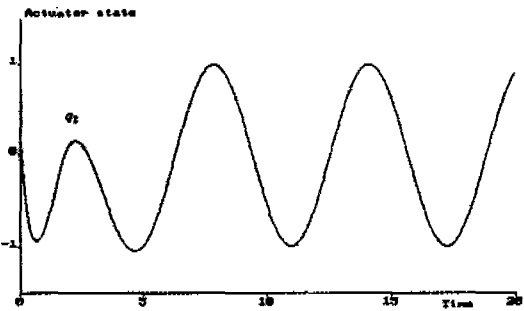


Fig. 3 History of actuator position when $\delta=0.03$

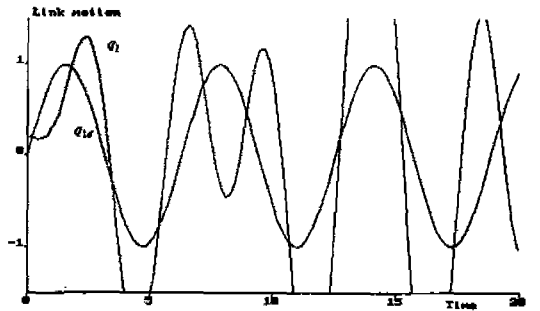


Fig. 6 Desired trajectory and history of link position when $\delta=3$

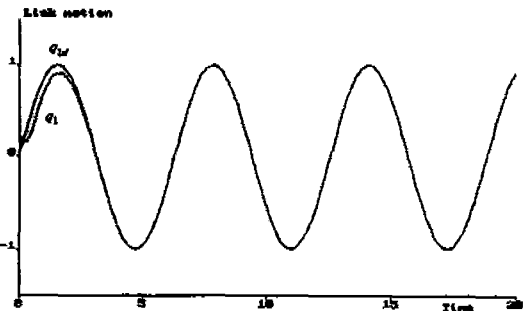


Fig. 4 Desired trajectory and history of link position when $\delta=0.3$

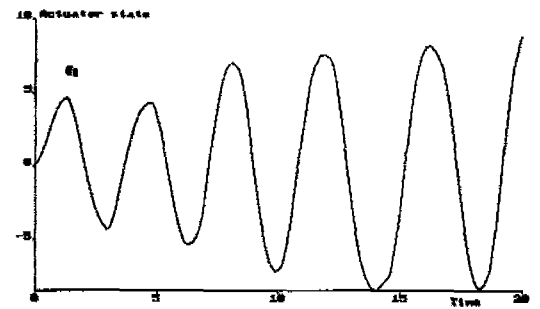


Fig. 7 History of actuator position when $\delta=3$

6. 결 론

본 논문에서는 로봇 매니퓰레이터를 위한 기존의 견실제어기들의 단점들을 보완하는 위치추종을 위한 견실제어기를 제안하고 그 타당성을 입증하였다. 불확실한 시스템 파라미터들의 값뿐만 아니라 구조적, 비구조적 불확실성에 의해 발생하는 모든 토크가 고려되었다. 예를 들면, 마찰력, payload 등에 의한 토크나 시변 고

주파수의 외란 등이 여기에 속할 수 있다. 개발된 제어기는 역행렬의 계산을 피하여, 제어기 실현 시 계산량을 줄이고 역행렬이 발산하는 우려를 없앴다. 또한, 제어기 설계 시 불확실성을 내포한 관성행렬의 최대, 최소 고유값이 필요하고, 추측값 $\hat{M}(q)$ 에 대한 제한이 있었던 기존 제어기설계의 단점들을 극복하였다. 관절에 유연성을 갖는 불확실 로봇의 경우 제안된 강성 로봇을 위한 견실제어기에 속도항을 첨가한 견실복합제어기를

적용하고 특이섭동 기법으로 안정성을 입증하였다. 유연성에 의해 발생하는 진동을 제어하여 목표궤적을 추종할 수 있는 이 알고리즘의 그 적용예로 1축 매니퓰레이터에 대해 시뮬레이션을 실시하여, 그 결과로 이 제어기의 현실성을 보여주었다.

본 논문에서 제안된 알고리즘과 다른 제어기들을 불확실 로봇 시스템에 적용한 시뮬레이션 및 실험 연구로부터 안정성 이외의 성능에 대한 고찰은 앞으로 수행해 볼만한 과제이다

참고문헌

1. Y. H. Chen, "Robust computed torque schemes of mechanical:non-adaptive versus adaptive", ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr., Vol.113, pp.324-327, 1991.
2. Y. H. Chen and S. Pandey, "Uncertainty bounded-based hybrid control for robot manipulators", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol.6, No.3, pp.303-311, 1990.
3. M. J. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-26, No.5, pp.1139-1144, 1981.
4. F. Ghorbel and M. W. Spong, "Adaptive integral manifold control of flexible joint robot manipulators", Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, pp.707-714, 1992.
5. M. C. Han and Y. H. Chen, "Polynomial robust control design for uncertain systems" Automatica, Vol.28, No.4, pp.809-814, 1992.
6. G. Leitmann, "On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems", ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr., Vol.103, pp.95-102, 1981

7. R. Lozano and B. Brogliato, "Adaptive control of robot manipulators with flexible joints", IEEE transactions on Automatic Control, Vol.37, No.2, pp.174-181.
8. S. Nicosia and P. Tomei, "A new approach to control elastic joint robot with application to adaptive control", Proceedings of the 30th IEEE Conference of Decision and Control, Brighton, England, pp.343-347, 1991.
9. E. Reithmeier and G. Leitmann, "Tracking and force control for a class of robotic manipulators", Dynamics and Control, Vol.1, pp.133-150, 1991.
10. R. Shoureshi, M. Corless, and M. D. Roesler, "Control of industrial manipulators with bounded uncertainties", ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr., Vol.109, pp.53-58, 1987.
11. M. W. Spong, "The control of flexible joint robots:a survey", in New Trends and Applications of Distributed Parameter Control Systems, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, G. Chen, E. B. Lee, W. Littmann, and L. Markus, Eds., Marcel Dekker Publishers, New York, pp.355-382, 1990.
12. M. W. Spong and M. Vidyasagar, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, New York, 1989.
13. L. M. Sweet and M. C. Good, "Redefinition of the robot motion control problem : effects of plant dynamics, drive system constraints, and user requirements", Proceeding of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp.724-730, 1984.
14. 강철구, "건설확정제어이론을 이용한 직접구동 로봇의 운동제어", 한국정밀공학회지, 제11권, 제3호, pp.82-95, 1994.