

완전한 인볼류트 베벨기어쌍의 기구학적 고찰 및 형상 모형화

박 노 길*

Kinematical Investigation and Geometry Modeling of the Perfect Involute Bevel Gearsets

No-Gill Park*

ABSTRACT

As demands on the precision bevel gears are increased in the related industry, the exact kinematical investigations of a pair of spherical involute bevel gears are required for the computer aided design.

The exact angular velocity ratio based on the characteristics of the spherical involute tooth is derived and verified from the relationship between rotational angles. Elementary kinematics of the gearsets is investigated by applying the transformation of the coordinate systems.

The tooth contact lines based on logarithmic tooth-wise curve are examined in three dimensional space. Contact ratio is formulated and simulated according to the system parameters such as shaft angles, pressure angle, and spiral angles. The condition of teeth interference is derived and the critical numbers of gear teeth are calculated. The whole surface geometry of a spiral bevel gearsets are discretized and visualized by a computer graphic tool.

Key words : spherical involute tooth, spiral bevel gear, logarithmic tooth-wise curve, teeth interference, contact ratio

1. 서 론

베벨기어는 각종 변속기에 다양하게 사용되고 있는 교차축 동력전달용 기계요소로서 날로 발달하는 컴퓨터로 말미암아 CAD/CAM을 실현시킬 수 있는 단계에 와 있다. 그러나 베벨기어에 대한 기하학적 형상과 기구학적 관계에 대한 연구가 미흡하여 아직도 컴퓨터를

이용한 정밀 설계 단계에는 못미치고 있다.

베벨기어의 정밀 설계를 위해서는 엄밀한 치면 형상화와 치 접촉부의 운동 해석이 선결되어야 한다. 최근 베벨기어의 인볼류트 치면 형상에 관한 연구가 발표되고 있는데 1987년 Tsai와 Chin⁽¹⁾은 기초원추 축면으로부터 생성되는 인볼류트 곡선을, 펼친 선이 직선이라고 가정한 상태에서, 수식화하였다. 1994년 M. J. Al-

* 부산대학교 공과대학 생산기계공학과, 기계기술연구소

Daccak, et al.⁽²⁾ 등은 완전한 구형 인볼류트 곡면을 아무런 가정 없이 공간좌표 상에서 수식화하여 Tsai와 Chin이 기술한 인볼류트 곡면과 비교하였고 단독의 베벨기어에 대한 형상을 모형화하였다. 그러나 서로 물러 돌아가는 기어쌍의 기구학적 관계에 관련한 연구는 거의 발표되지 않고 있는 실정이다.

베벨기어 쌍의 기구학적 관계를 해석하기 위해서는 먼저 엄밀한 피치각과 기초원추각이 구해져야 하는데 지금까지 대부분의 문헌⁽³⁻⁶⁾에는 베벨기어쌍을 등가의 원추마찰차로 가정하고 속도비를 피치원추각의 싸인값의 비로 정의하고 있다. 저자는 베벨기어의 엄밀한 각속도비가 기초원추각의 싸인값의 비로 정의됨을 밝힌 바 있다.⁽⁶⁾ 평행축 기어쌍은, 각속도비가 기초원 직경의 비와 피치원 직경의 비로 정의되므로, 등가의 원통마찰차로 가정해도 오차가 없으나 베벨기어쌍은, 각속도비가 원추각에 대하여 비선형인 관계로, 등가 원추마찰차로 가정하면 기구학적 관계에 오차를 유발한다.

본 연구에서는 엄밀한 피치원추각과 기초원추각을 근거로 한 치형 곡면을 해석적으로 정의하고 기어의 성능, 치의 간섭, 그리고 치점축선의 거동을 파악하고자 한다. 또한 베벨기어쌍의 물음상태를 해석하는 프로그램을 개발하며 림(rim)부와 웨브(web)부를 포함한 베

벨기어의 전체 표면을 형상화하고자 한다.

2. 완전한 인볼류트 베벨기어쌍의 기구학적 관계

(1) 인볼류트 치형 곡면⁽⁹⁾

베벨기어의 완전한 구형 인볼류트 곡면은 기초원추의 측면에 감겨진 늘어나지 않는 막이 풀려나가면서 모서리가 그리는 면으로 정의할 수 있다. 이때 양기어 치점축선의 공통법면은, 스퍼기어의 경우와 마찬가지로, 공간상의 고정 평면이 되며 치점축점의 움직이는 궤적은 기초원추 꼭지점을 중심으로 원호를 그린다. 따라서 물러 돌아가는 베벨기어의 치점축선은 원운동을 하게 되는데 이때의 공통법면을 작용원판(disk of action)이라 한다.

Fig. 1은 기초원추로부터 발생하는 인볼류트 곡면을 도시한 것이다. 기초원추각 θ_g 과 극각 θ_q 가 주어질 때 임의의 구 반경 r 에서의 구형 인볼류트 곡선 \widehat{QG} 를 좌표상의 각도 ϕ_q 와 ψ_q 로 정의하면 다음과 같다.

$$\psi_q = \frac{x_q}{\sin \theta_g} - \phi_q \quad (1)$$

$$\tan \phi_q = \frac{\tan x_q}{\sin \theta_g} \quad (2)$$

여기서 접면각 x_q 는 다음과 같다.

$$x_q = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta_q}{\cos \theta_g} \right) \quad (3)$$

(2) 치점축점

Fig. 1에서, 점 F 는 치형 뒷면에 생성된 인볼류트 치면의 시작점이고 F_0 는 백래쉬가 없는 경우의 치형 뒷면의 시작점이다. 치 대칭면 OHB^* 에서 평면 OHG^* 까지의 이밀방위각 η 는 다음과 같다.

$$\eta = \frac{\pi}{2Z} + \psi_p - \frac{B_f}{2r \sin \theta_g} \quad (4)$$

여기서 Z 는 기어 잇수, ψ_p 는 피치점의 구형인볼류트각으로 식(1)로 구해진다. B_f 는 백래쉬량으로 원호 $\widehat{FF_0}$ 의 길이이다.

구동베벨기어의 회전각 \widehat{HS} 에서 HB 까지의 방위각으로 정의한다. 치점축점 Q 의 좌표성분을 받

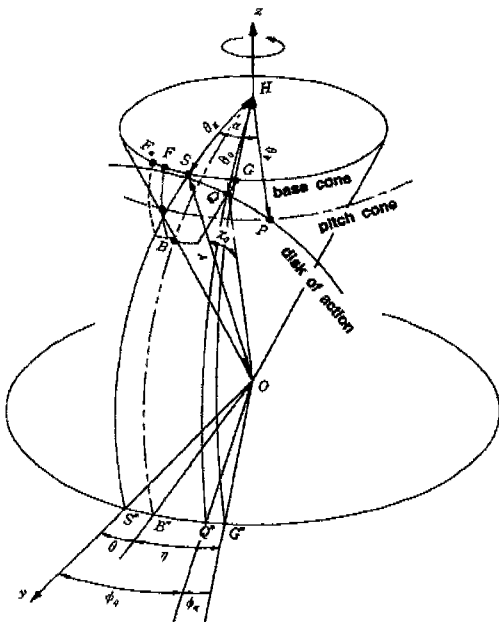


Fig. 1 Spherical Involute tooth surface and contact point in a bevel gearset

경 r , 극각 θ_q , 방위각 ϕ_q 로 표현하면,

$$\begin{aligned} x_q &= -r \sin \theta_q \sin \phi_q \\ y_q &= r \sin \theta_q \cos \phi_q \\ z_q &= r \cos \theta_q \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 여기서 θ_q, ϕ_q 는 θ 의 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \theta_q &= \cos^{-1}(\cos x_q \cos \theta_g) \\ \phi_q &= \tan^{-1}\left(\frac{\tan x_q}{\tan \theta_g}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $x_q = (\theta + \eta)\sin \theta_g$ 이다.

(3) 각속도비

베벨기어의 입력각은 스피어 및 헬리컬 기어에서와 마찬가지로 피치원추와 기초원추의 관계를 규정해준다. 피치원추각 θ_p, ϕ_s , 압력각 α 와의 관계는 다음과 같다.

$$\tan \theta_p \cos \alpha = \tan \theta_g \quad (7)$$

Fig. 2는 베벨기어쌍의 기구학적 관계를 도시한 것이다. 인볼류트 치형의 정의로부터 원호 $\widehat{G_1G'_1}$ 와 원호 \widehat{QG} 의 길이는 일치한다. 따라서 이들 원호에 대하여 수식을 세우고 방정식을 세워 정리하면 다음과 같은 엄밀한 각속도비가 얻어진다.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \theta_{g2}}{\sin \theta_{g1}} \quad (8)$$

여기서 ω_1, ω_2 는 각각 피니언과 기어의 회전각속도이다.

베벨기어의 축각 Σ 와 각속도비 ζ, α 가 주어질 때의 피치원추각과 기초원추각은 양기어에 대한 식(7)과 식(8), 그리고 피치원추각의 합이 축각과 같다는 조건으로부터 구할 수 있다.

(4) 구동기어와 종동기어에 대한 회전각

Fig. 2에서, 구동기어 회전각 θ_1 에 대한 종동기어 회전각 θ_2 는 양기어의 기구학적 관계로부터 유도될 수 있다. 즉,

$$\widehat{S_1G_1} + \widehat{S_2G_2} = \widehat{S_1P} + \widehat{PS_2} \quad (9)$$

이 성립하며 $\widehat{S_1G_1} = r \sin \theta_{g1}(\theta_1 + \eta_1)$, $\widehat{S_2G_2} = r \sin \theta_{g2}(\theta_2 + \eta_2)$, $\widehat{S_1P} = r x_{p1}$, $\widehat{PS_2} = r x_{p2}$ 이므로 식(9)에 대

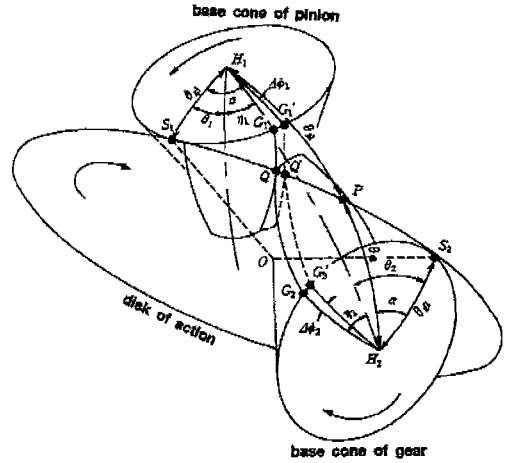


Fig. 2 Kinematical relationship of a bevel gearset

입하고 θ_2 에 대하여 풀면,

$$\theta_2 = \frac{x_{p1} + x_{p2}}{\sin \theta_{g2}} - (\theta_1 + \eta_1) \frac{\sin \theta_{g1}}{\sin \theta_{g2}} - \eta_2 \quad (10)$$

가 된다. 식(10)의 양변에 미분을 취하면,

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{\sin \theta_{g1}}{\sin \theta_{g2}} \dot{\theta}_1 \quad (11)$$

이 된다. 여기서 식(11)과 식(8)은 동일한 식이다.

(5) 치열곡선

치열곡선은 두 스피어럴 기어가 접촉할 때의 치접촉선을 뜻한다. Fig. 3은 로그형 치열곡선을 작용원판 상에 도시한 것이다. 외반경 r_o 의 점 Q_o 를 기준으로 임의 반경 r 의 점 Q 까지 변화된 비틀림각도를 ρ , 스피어럴각을 β 라 할 때, 점 Q 까지 비틀림 방위각 ϕ_r 는 다음과 같다.

$$\phi_r = \frac{\rho}{\sin \theta_g} \quad (12)$$

치열곡선이 로그형이면 $\rho = \tan \beta \log\left(\frac{r_o}{r}\right)$ 로 정의된다.

3. 기어의 성능

(1) 물음틀

물음틀은 물음길이를 법선피치로 나눈 값으로서 값이 클수록 치접촉부에 받는 부하가 작아지고 원활한 운동

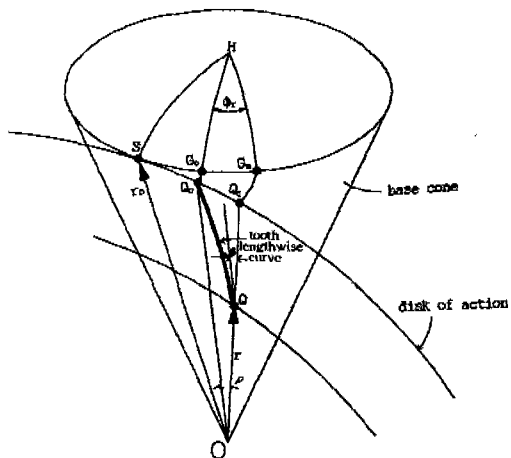


Fig. 3 A logarithmic tooth lengthwise curve

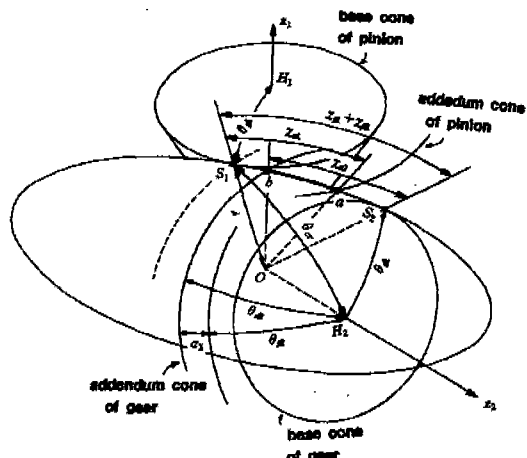


Fig. 4 Contact circular length and critical addendum cone angle

을 한다. Fig. 4에서 양기어의 이끝원이 작용원호를 끝는 점을 a, b 라 하면 한 쌍의 치가 물음을 시작하여 끝마칠 때까지 양기어의 치면의 접촉점은 a 와 b 사이를 이동한다.

Fig. 4의 ab 의 길이는,

$$\widehat{ab} = \widehat{S_1a} + \widehat{bS_2} - \widehat{S_1S_2} = rx_{a1} + rx_{a2} - r(x_{p1} + x_{p2}) \quad (13)$$

이고 반경 r 에서의 베벨기어 법선피치 P_n 는,

$$P_n = \frac{2\pi}{Z_1} r \sin \theta_{g1} = \frac{2\pi}{Z_2} r \sin \theta_{g2} \quad (14)$$

이므로 스파이럴 베벨기어의 물음을 ϵ_b 은, 스파이럴 치열에 의한 물음원호의 증가분을 고려하면, 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_b = \frac{(x_{a1} + x_{a2} + \rho_o - x_{p1} - x_{p2})Z_1}{2\pi \sin \theta_{g1}} \quad (15)$$

여기서 $\rho_o = \tan \beta \log \left(\frac{r_o}{r_i} \right)$ 이고 r_i 는 베벨기어 기초원 추의 내반경이다.

(2) 치의 간섭

한 쌍의 물고 돌아가는 기어의 간섭은 피니언의 이뿌리면에서 일어나므로 간섭을 일으키지 않기 위해서는, Fig. 4에서 보는 바와 같이, 기어의 이끝원이 피니언의 기초원추상의 시작점 S_1 을 넘어서지 말아야 한다.

표준 베벨기어에서 기어의 이끝각 (addendum angle) $\alpha_2 = 2 \sin \theta_{p2} / Z_2$ 이다. 기어의 이끝원추가 점 S_1 을 통과할 때의 각도를 θ_{cr} 이라 하면 θ_{cr} 는 치간섭의 한계 각도로서, 구형 인블류트 곡선의 정의로부터,

$$\cos \theta_{cr} = \cos(x_{p1} + x_{p2}) \cos \theta_{g2} \quad (16)$$

이 구해진다. 따라서 간섭이 일어나지 않을 조건은 다음과 같다.

$$\theta_{p2} + \alpha_2 \leq \theta_{cr} \quad (17)$$

(3) 치접촉선의 갯수

치접촉선은 Fig. 5의 치접촉영역 (면적 $abcd$)내에서만 나타난다. 즉, 양기어의 치열곡선이 치접촉영역 안으로 들어오게 되면 치접촉선이 정의되며 치접촉영역 밖에 있을 때는 양기어의 치가 서로 떨어져 있는 상태가 된다.

인블류트 시작점 Q_o 인 어느 한 치가 치접촉영역에 나타나기 시작할 때 (Fig. 5에서 치열곡선이 점 C 를 통과할 때)의 피니언 회전각 θ_o 은 다음의 식에서 계산된다.

$$\theta_o = x_{p1} + x_{p2} - x_{a2} - \rho_o - \eta_l \quad (18)$$

작용원판상의 치접촉선은 일정 거리를 유지하고 있으므로 치접촉선들의 이동은 주기적이다. 따라서 치접촉선의 한 주기당 이동 구간을, 피니언 회전각 θ_1 으로 나타내면, θ_o 에서 $\theta_o + \theta_n$ 까지이다. 여기서 $\theta_n = 2\pi / Z_1$

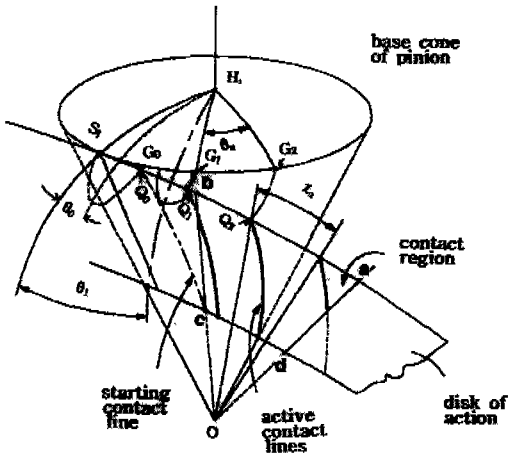


Fig. 5 A contact region on the disk of action

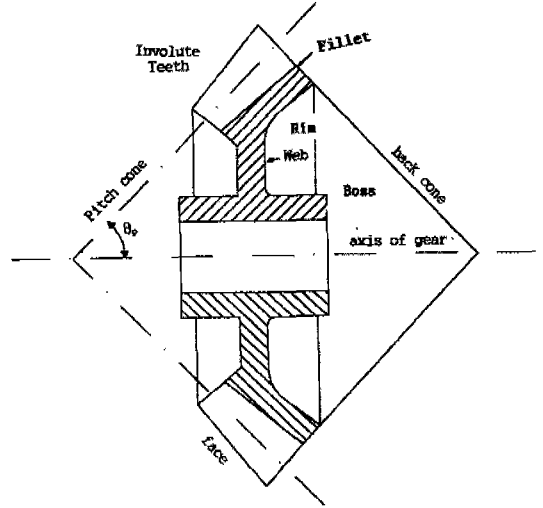


Fig. 6 Cross section of a bevel gear

이고 점 G_1, G_2 는 서로 이웃하는 기어의 인볼류트 곡선 출발점들이다.

치접축선의 갯수 n_c 는 물음로부터 다음과 같이 계산된다.

$$n_c = \begin{cases} [\varepsilon_b] + 1, & \text{at } \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_0 + \mu\theta_n \\ [\varepsilon_b], & \text{at } \theta_0 + \mu\theta_n \leq \theta_1 \leq \theta_0 + \theta_n \end{cases} \quad (19)$$

여기서 $[\]$ 는 가우스 기호이고, $\mu = \varepsilon_b - [\varepsilon_b]$ 이다. 따라서 치접축선의 갯수는 θ_1 의 구간 θ_0 에서 $\theta_0 + \theta_n$ 동안 변동됨을 알 수 있다.

4. 형상 모형화

완전한 인볼류트 베벨기어에 대한 형상 모형화(Geometry modeling)는 유한요소법을 이용한 치면 강도 해석, 절삭 가공, 단조 가공용 금형설계, 기어장치의 동역학적 모델링 및 해석을 위한 전처리 과정이다.

Fig. 6은 스파이럴 베벨기어의 전체 단면도로서 형상의 특성으로 구분하면 인볼류트부, 윗렛부, 몸체부로 된다. 본 절에서는 몸체의 표면을 이산화(discretization)된 점으로 정의하는 과정을 설명하기로 한다.

(1) 인볼류트 부 및 윗렛 부의 형상 이산화

인볼류트 부는 Fig. 7에서 θ_g 에서 이끝 원추각 θ_a 까지의 치 곡면을 지칭한다. 구간 $[\theta_g, \theta_a]$ 을 등분하여 i 번째 원추각 θ_i 에 대한 인볼류트 곡선의 방위각 ϕ_i 을 식(2)에 의해서 산출하므로써 곡면을 이산화한다.

윗렛 부는 이밀 원추각 θ_d 과 θ_g 사이의 구석살 부

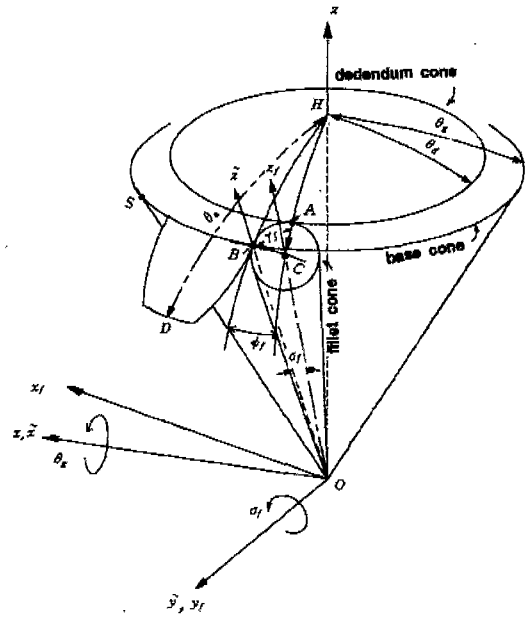


Fig. 7 Fillet curve in a bevel gear

분을 지칭하며 작은 원추각 이밀원추와 인볼류트 치의 경계면 사이에서 접한 상태이다. Fig. 7에서 점 A는 이밀원추(dedendum cone)에서 윗렛이 시작되는 점이고 점 B는 인볼류트 곡선과 윗렛곡선이 만나는 점이다. 중심축 OC 인 윗렛원추(fillet cone)가 선분 OA 에서

이밀원추와 접하고 선분 \overline{OB} 에서 인블류트곡선의 측면과 접한다는 조건으로부터 중심축 \overline{OC} 의 방위각 θ_f 와 윗렛원추각 $\sigma_f (= \angle COB, \angle COA)$ 이 구해진다.

윗렛원추의 형상을 정의하는데 편리한 좌표계 (x_f, y_f, z_f) 에서, y_f 를 σ_f 만큼 회전한 좌표계를 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 라 하고, \tilde{x} 를 θ_g 만큼 회전한 좌표계를 (x, y, z) 라 하면 윗렛곡선을 (x_f, y_f, z_f) 기준으로 정의한 후 (x, y, z) 로 좌표변환하면 다음의 관계식으로부터 σ_f, ϕ_f 를 구할 수 있다.

$$\tan \sigma_f = \frac{\cos \theta_d - \cos \theta_g}{\sin \theta_d} \quad (20)$$

$$\tan \phi_f = \frac{\tan \sigma_f}{\sin \theta_g} \quad (21)$$

윗렛원추의 모서리 중에서 원호 \widehat{AB} 가 실제의 윗렛곡선인데, 각도 $\gamma_f (= \angle ACB)$ 는 다음과 같이 구해진다. 점 A의 좌표는 (x, y, z) 좌표계로 정의하면,

$$\begin{aligned} x_A &= r \sin \theta_d \sin(-\phi_f) \\ y_A &= r \sin \theta_d \cos(-\phi_f) \\ z_A &= r \cos \theta_d \end{aligned} \quad (22)$$

이므로 다시 (x_f, y_f, z_f) 좌표계로 변환시키면,

$$\begin{Bmatrix} x_{fA} \\ y_{fA} \\ z_{fA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \sigma_f & \sin \sigma_f \sin \theta_g & \sin \sigma_f \cos \theta_g \\ 0 & \cos \theta_g & -\sin \theta_g \\ -\sin \sigma_f & \cos \sigma_f \sin \theta_g & \cos \sigma_f \cos \theta_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} \quad (23)$$

가 된다. 따라서

$$\gamma_f = \tan^{-1} \left(\frac{-y_{fA}}{x_{fA}} \right) \quad (24)$$

을 얻는다. 윗렛곡선의 이산화는 $\angle ACB$ 을 등분하여 수행한다.

윗렛곡선의 점 A가 치경계면 밖으로 넘어설 경우, Fig. 7과 같은 배치가 더이상 성립되지 못한다. 따라서 Fig. 8과 같은 윗렛곡선이 다시 정의되어야 한다. Fig. 8에서 접점 B는 θ_g 와 θ_d 중간 부분에 위치하게 되며 A점은 치의 경계점에 놓이게 된다. 이미 유도된 식(20), (21)을 근거로 σ_f, θ_m 을 구하면 다음과 같다.

$$\sin \theta_m = \frac{\cos \theta_d \tan \phi_f + \sec \phi_f \sin \theta_d}{1 + \sin^2 \theta_d \tan^2 \phi_f} \quad (25)$$

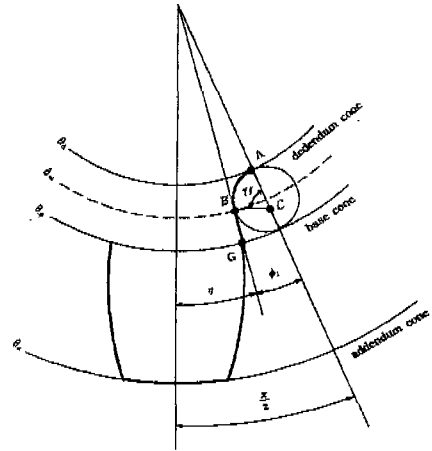


Fig. 8 Fillet curve in a bevel gear having small dedendum cone angle

$$\tan \sigma_f = \tan \phi_f \sin \theta_m \quad (26)$$

여기서 $\phi_f = \pi / Z - \eta$ 이다.

몸체부는 인블류트 치면이 존재하는 치를 제외한 림(rim), 웨부(web)부를 지칭하는데 축대칭이므로 이산화 과정이 용이하여 구체적인 설명은 생략한다.

(2) 양기어의 좌표계 관계

Fig. 9는 양기어 기준 좌표계의 공간적 관계를 도시한 것이다. (x_{p1}, y_{p1}, z_{p1}) 및 (x_{p2}, y_{p2}, z_{p2}) 는 양기어 회전축 $\overline{OH_1}, \overline{OH_2}$ 와 피치점 P를 근거로 설정한 공간교정좌표계로서 두 좌표계 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{p1} &= -x_{p2} \\ y_{p1} &= -y_{p2} \cos \Sigma + z_{p2} \sin \Sigma \\ z_{p1} &= y_{p2} \sin \Sigma + z_{p2} \cos \Sigma \end{aligned} \quad (27)$$

본 연구에서는 피니언과 기어가 서로 물려 돌아가는 운동을 기술하기 위하여 양기어에 대한 편리한 좌표계를 선택하여 독립적으로 기술한 후 식(27)을 적용하여 좌표계를 통일시키고자 한다.

6. 결과 및 토의

(1) 물음물

Fig. 10은 Σ 60°, 75°, 90°, α 16°, 20°, 22.5°, ζ 1, 2, 3, 4, 5, 10, β 0°, 35°, 반경 r_o, r_i 각각 2.0, 1.5일 때의 물음물을 도시한 것이다. 물음물은 잇

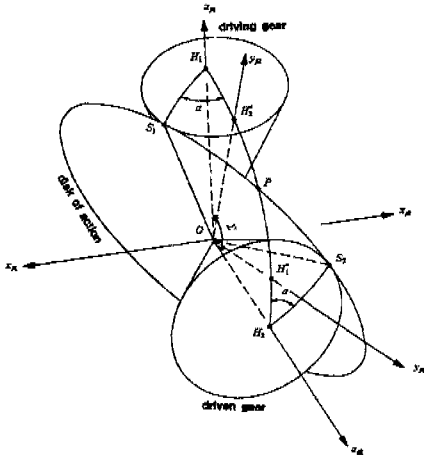


Fig. 9 Space fixed coordinate systems for pinion and gear

수비와 스파이럴각이 증가할수록 증가한다. 스파이럴각 35°에서 물음틀은 직선 기어의 그것에 비하여 대략 5~20배로 증가함을 보였다. 잇수가 증가할수록 물음틀의 변화는 더욱 심하다. 따라서 큰 잇수이면서 각속비가 높은 스파이럴 베벨기어쌍에서는 마찰 손실이 증가될 것으로 예측된다. 압력각이 작고 축각이 커지면, 직선 베벨기어의 경우는 물음틀이 증가하는데 반하여 스파이럴 베벨기어의 경우는 감소하는 경향을 보였다.

(2) 치접축선

피니언과 기어 잇수가 각각 18, 24, 압력각이 20°, 축각이 60°, 스파이럴각이 35°, 외내반경이 2.0, 1.5 이고 로그형 치열곡선을 갖는 베벨기어쌍의 작용원판상의 치접축선을 해석한 결과가 Fig. 11에 도시되어 있다. 이때의 물음틀은 3.234이다.

$\mu = 0.234$ 이므로 한 주기 중에서 처음 23.4% 동안은 치접축선이 4개가 되고 나머지 구간인 76.6%에서 치접축선이 3개가 된다. 피니언이 회전함에 따라 접촉영역에서 치접축선이 오른쪽으로 이동됨을 관찰할 수 있었다.

(3) 치의 간섭

Fig. 12는 기어 간섭을 도시한 것으로서, 가로축은 피니언 잇수 Z_1 , 세로축은 피니언 잇수에 대한 기어 잇수의 비 Z_2/Z_1 이고 곡선의 아래 영역은 간섭이 일어나지 않는 경우를, 위 영역은 간섭이 일어나는 경우를 의미한다. 기어 잇수비 10 이하에서, 축각 60°, 75°, 90°와

압력각 16°, 20°, 22.5°인 경우의 치간섭 경계선이 도시되었다. 간섭이 일어나지 않을 기어쌍의 잇수가 Table 1에 수록되었다.

치의 간섭은 피니언 잇수와 압력각이 증가하고 축각이 감소할 수록 적게 일어난다. Table 1에서 피니언의 한계잇수는, 축각 60°, 압력각 22.5°에서 12, 축각 90°, 압력각 16°에서 26이다.

(4) 피니언과 기어의 기구학적 관계

Fig. 13은 양기어 잇수 18, 24, 축각 60°, 압력각 20°, 백레쉬 0.002인 베벨기어쌍의 서로 물려들어가는 상태를, 피니언 회전각 $\theta_1 - \theta_0 = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ$ 에서 그린 것이다.

한편 간섭이 일어나는 기어쌍의 잇수 8, 16, 축각 60°, 압력각 14.5°, 백레쉬 0.002일 때, $\theta_1 - \theta_0 = 20^\circ$ 의 물림 위치를 Fig. 14에 도시하였다. 피니언의 이뿌리 부근에서 치간섭을 보여주고 있다.

(5) 형상 모형화

잇수 12, 15, 축각 60°, 압력각 22.5°, 스파이럴각 35°, 외내반경 2.0, 1.5인 베벨기어 쌍에 대하여 전체 표면 형상을 이산화시켜 NISA II의 그래픽 전처리 프로그램을 이용하여 그려보았다. (Fig. 15) 베벨기어의 백콘(back cone)은 Tregold의 근사법⁽⁶⁾을 적용하여 수정하였다.

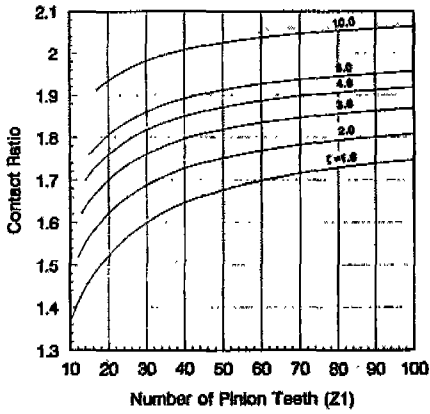
6. 결 론

엄밀한 피치원추각을 근거로 표준기어 베벨기어쌍의 형상을 모형화하고 기구학적 관계를 유도한 결과 다음의 결과를 얻었다.

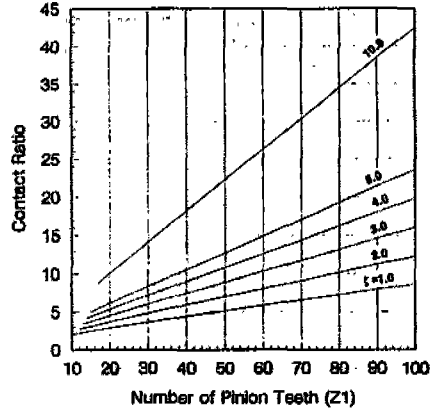
(1) 인볼류트 곡선의 정의로부터 각속도비를 유도하고 피니언과 기어의 회전각 관계로부터 결과를 확인하였다.

(2) 물음틀은 잇수비와 스파이럴각이 증가할수록 증가하며 스파이럴각 35°인 베벨기어의 물음틀은 직선 베벨기어의 물음틀에 비하여 대략 5~20배로 급증함을 보였다. 압력각이 감소되고 축각이 증가될 수록, 직선 베벨기어의 경우는 물음틀이 증가되는 반면, 스파이럴 베벨기어의 경우는 감소되었다.

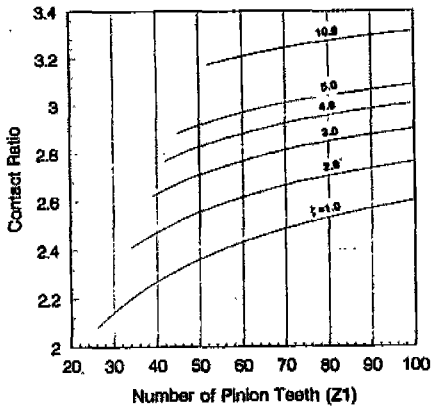
(3) 축각이 증가하고 압력각이 감소할 수록 치의 간섭은 증가되는 경향을 보였다.



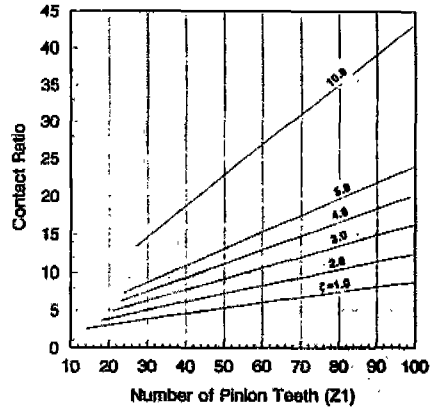
(a) $\Sigma = 60^\circ, \alpha = 25^\circ, \beta = 0^\circ$



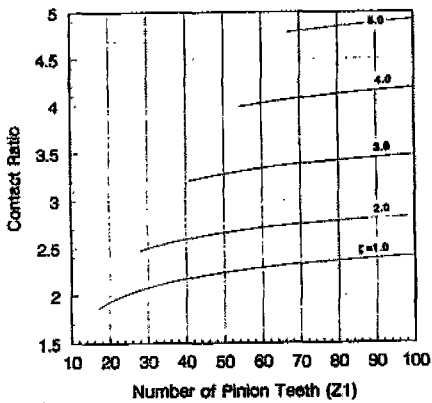
(b) $\Sigma = 60^\circ, \alpha = 25^\circ, \beta = 35^\circ$



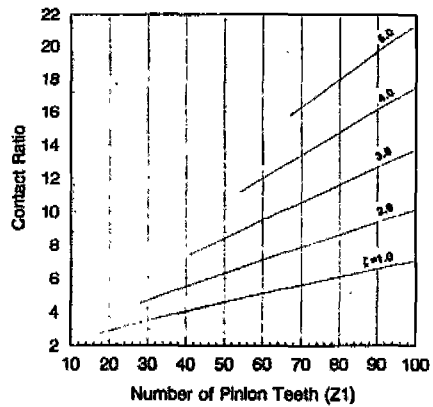
(c) $\Sigma = 60^\circ, \alpha = 14.5^\circ, \beta = 0^\circ$



(d) $\Sigma = 60^\circ, \alpha = 14.5^\circ, \beta = 35^\circ$



(e) $\Sigma = 90^\circ, \alpha = 20^\circ, \beta = 0^\circ$



(f) $\Sigma = 90^\circ, \alpha = 20^\circ, \beta = 35^\circ$

Fig. 10 Contact ratios of bevel gearsets

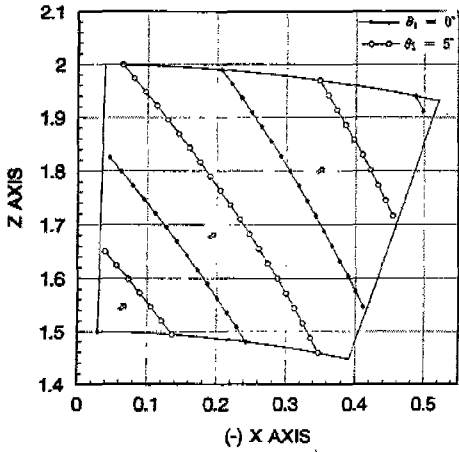


Fig. 11 Moving contact lines by the rotating angle of pinion

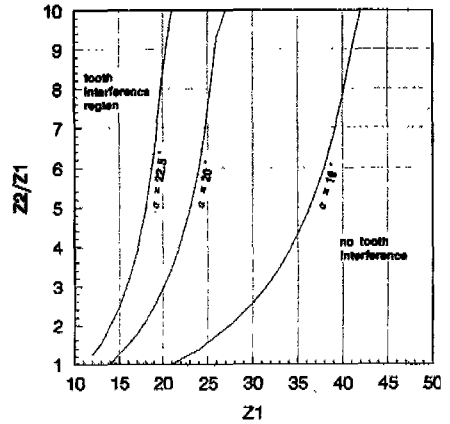
(4) 치간섭이 일어나지 않는 경우와 치간섭이 일어나는 경우의 두 베벨기어쌍에 대하여 물음 상태를 도식적으로 보여주므로써 기어쌍의 기구학적 해석의 타당성을 보였다.

(5) 베벨기어 전체 형상을 모델링하여 NISA II의 컴퓨터 그래픽 모드를 이용하여 가시화하였다.

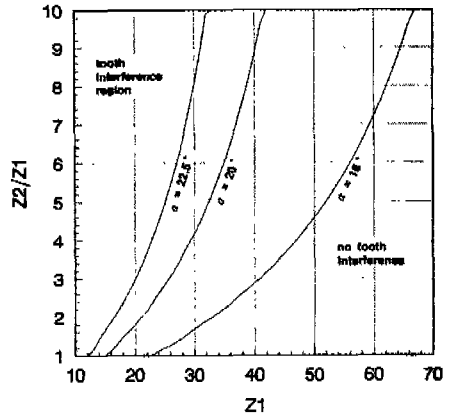
이상의 결과는 기어의 성능과 치의 간섭을 다각적으로 검토하는 CAD의 지원 프로그램으로 활용할 수 있으며, 치접촉부의 피로강도 해석, NC를 이용한 절삭가공, 소성가공을 위한 금형 제작의 기초 자료로 활용될 수 있는 것으로 사료된다. 또한 기어 전달오차의 모델링과 치차장치의 동역학 모델링의 기초자료로 활용될 수 있는 것으로 사료된다.

8. 참고 문헌

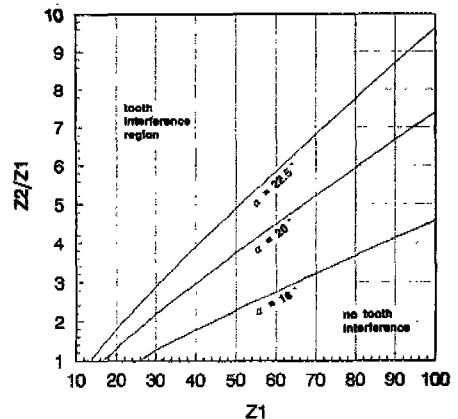
1. Y.C. Tsai and P.C. Chin, "Surface Geometry of Straight and Spiral Bevel Gears", Trans. of the ASME, J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.109, Dec., pp.443-449, 1987.
2. M.J. Al-Daccak, J. Angeles and M.A. Gonzalez-Palacios, "The Modeling of Bevel Gears Using the Exact Spherical Involute", Trans. of the ASME, J. of Mechanical Design, Vol.116, pp.364-676, June 1994.



(a) shaft angle = 60°



(b) shaft angle = 75°



(c) shaft angle = 90°

Fig. 12 Tooth interference region of bevel gearsets

Table 1 Numbers of gear teeth not to interfere in a gear pairing

$\Sigma = 60^\circ$ $\alpha = 22.5^\circ$		$\Sigma = 60^\circ$ $\alpha = 20^\circ$		$\Sigma = 60^\circ$ $\alpha = 16^\circ$		$\Sigma = 90^\circ$ $\alpha = 22.5^\circ$		$\Sigma = 90^\circ$ $\alpha = 20^\circ$		$\Sigma = 90^\circ$ $\alpha = 16^\circ$	
Z_1	max. Z_2	Z_1	max. Z_2	Z_1	max. Z_2	Z_1	max. Z_2	Z_1	max. Z_2	Z_1	max. Z_2
12	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	28	14	14	—	—	14	15	—	—	—	—
15	37	15	19	—	—	15	18	—	—	—	—
16	50	16	24	—	—	16	21	—	—	—	—
17	66	17	30	—	—	17	25	17	18	—	—
18	89	18	38	—	—	18	28	18	20	—	—
19	121	19	47	—	—	19	32	19	23	—	—
20	168	20	59	—	—	20	36	20	26	—	—
21	∞	21	73	21	21	21	41	21	30	—	—
.	.	22	91	22	25	22	45	22	33	—	—
.	.	23	114	23	29	23	49	23	37	—	—
.	.	24	144	24	33	24	54	24	40	—	—
.	.	25	185	25	39	25	59	25	44	—	—
.	.	26	242	26	45	26	64	26	48	26	27
.	.	27	∞	27	52	27	70	27	52	27	29
.	.	.	.	28	59	28	75	28	57	28	32
.	.	.	.	29	68	29	81	29	61	29	35
.	.	.	.	30	77	30	87	30	66	30	38
.	.	.	.	31	88	31	93	31	70	31	41
.	.	.	.	32	101	32	99	32	75	32	44
.	.	.	.	33	115	33	106	33	80	33	47
.	.	.	.	34	132	34	112	34	85	34	50
.	.	.	.	35	151	35	119	35	91	35	54
.	.	.	.	36	173	36	126	36	96	36	57
.	.	.	.	37	199	37	134	37	102	37	60
.	.	.	.	38	229	38	141	38	107	38	64
.	.	.	.	39	267	39	149	39	113	39	68
.	.	.	.	40	312	40	156	40	119	40	72
.	.	.	.	41	368
.	.	.	.	42	∞
.
100	∞	100	∞	100	∞	100	965	100	740	100	458

* ∞ means the number of gear teeth for the angular velocity ratio to be over 10

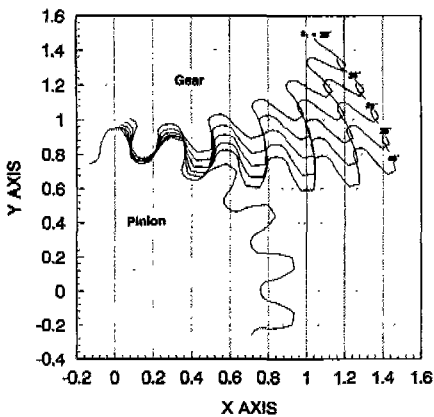


Fig. 13 Rotating a bevel gear set

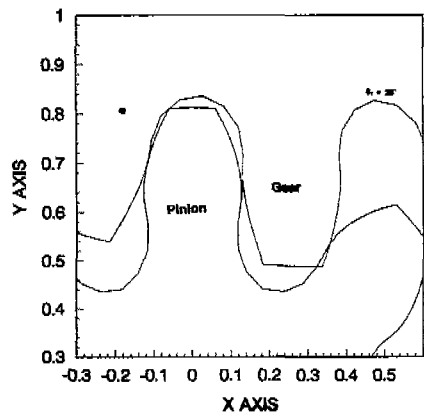


Fig. 14 A pair of bevel gears having the tooth interference

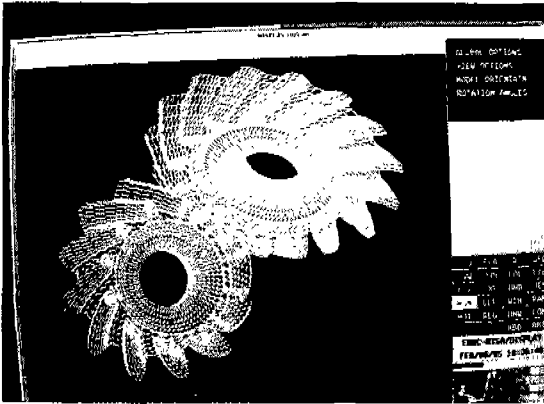


Fig. 15 A surface generation of a pair of spiral bevel gears

3. 정선모, 한동철, 표준기계설계학(신판), 동명사, pp.618-619, 1992.
4. J.E. Shigley, 한동철, 송지복, 유완석, 임오강 공역, 기계설계, 회중당, pp.444-445, 1989.
5. 박영조, 기계설계, 보성문화사, pp.364-365, 1991.
6. E. Buckingham, Analytical Mechanics of Gears, McGRAW-HILL, 1949.
7. R.J. Drago, Fundamentals of Gear Design, Butterworths, pp.485, 1988.
8. N. P. Chironis, Gear Design and Application, McGRAW-HILL, pp.67, 1967.
9. N.G. Park, "An Analytical Investigation on the Angular Velocity Ratio of Spherical Involute Bevel Gear Pairs", J. of the Korean Society of Precision Engineering, Vol.12, No.5, 1995.