

구형 인볼류트 베벨기어쌍의 각속도비에 관한 해석적 연구

박 노 길*

An Analytical Investigation on the Ratio of Angular Velocity in Spherical Involute Bevel Gearsets

Park No-Gill*

ABSTRACT

The kinematical relationship of bevel gearsets lies at the root of the gear design. As the demand on precision bevel gears is increased in the related industries, the kinematic analysis of a pair of spherical involute bevel gears needs to be exactly evaluated for the computer aided design.

Pitch cone angles of bevel gearsets have been calculated under the assumption that the geared system is equivalent to a coned roller system without slipping. But this kinematical model involves some errors in the value of the ratio of angular velocity.

In this paper, the ratio of the angular velocity is exactly derived, based on the perfect involute tooth surface. Four nonlinear equations representing the kinematical relationships are numerically solved to obtain the pitch and base cone angles. The ratios of angular velocities according to pressure and shaft angles are calculated and compared with those of the approximate gear model.

Key Words : spherical involute, bevel gearset, ratio of angular velocity, kinematic analysis, nonlinear equations.

1. 서 론

베벨기어는 차량의 차동장치나 헬리콥터의 감속장치 등 치차전동장치에 사용되는 기어로서, 기능의 최적화를 위해 점차 높은 정밀도가 요구되고 있다. 컴퓨터를 이용한 설계는 각종 기계요소의 정밀도 향상에 지대한

역활을 해온 것은 주지의 사실이므로 베벨기어의 정밀 설계를 위한 CAD화도 계속적인 진보가 있어야 할 분야이다.

베벨기어의 정밀 설계에 있어서, 우선적으로 고려되어야 할 내용은 치면 형상의 수식화이며 피니언과 기어 사이의 기구학적 관계의 규명이다. 베벨기어의 기구학

* 부산대학교 공과대학 생산기계공학과, 기계기술연구소

적 관계가 얻어지면 그 다음으로 동력 전달 기능을 갖추기 위한 강도 설계가 이루어져야 한다. 강도 설계는 동특성까지 고려되면 더욱 복잡한 문제가 된다. 그런데 베벨기어의 치형곡선은 스피어 혹은 헬리컬 기어의 치형곡선보다 복잡하여 아직도 엄밀한 기구학적 관계 규명이 미흡한 상태이다.

Sloane⁽¹⁾은 그의 저서에서, 완전한 베벨기어쌍을 피치각이 같은 원추마찰차로 보고 각속도비를 유도하고 있다. 그밖의 많은 관련 저서⁽¹⁻⁵⁾에서도 상기의 내용이 일반적으로 받아들여지고 있다. 1987년 W. D. Mark⁽⁶⁾은 완전한 인볼류트 베벨기어의 전달오차를 유도하는 과정에서 각속비에 관한 Sloane의 기술을 그대로 인용하고 있다. 그러나 베벨기어의 기구학적 관계를 등가의 피치원추 마찰차로 가정하는 것은 실질 각속도비에 있어서 다소의 오차를 유발한다.

본 연구는 인볼류트 베벨기어 쌍의 기구학적 관계를 구면 공간상에서 해석하고 완전한 인볼류트 베벨기어의 엄밀한 각속도비를 구하고자 한다. 엄밀하게 유도된 기구학적 관계식으로부터 피치원추각과 기초원추각을 구하고 상기의 등가 피치원추마찰차로 가정 한 경우의 피치원추각과 기초원추각과의 오차를 비교하고자 한다.

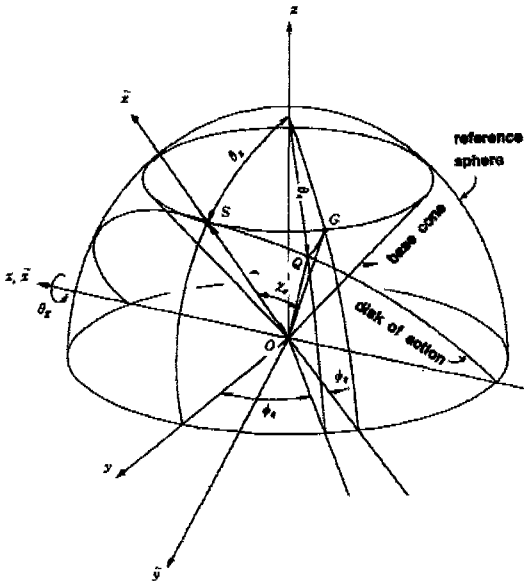


Fig. 1 The spherical involute tooth surface of a bevel gear

2. 인볼류트 베벨기어의 기구학적 관계

(1) 베벨기어의 치형 곡면

구형 인볼류트 치형곡면은, 개념적으로, 원추의 측면에 늘어나지 않는 얇은 막이 감겨져 있다고 가정하고 원추 측면에 감겨진 막이 팽팽하게 당겨진 상태에서 미끄럼없이 풀려나갈 때 막의 모서리가 그리는 곡면으로 정의된다. 이때 원추를 베벨기어의 기초원추라 한다. Fig. 1은 구형 인볼류트 곡면과 좌표계의 공간적 관계를 도시한 것이다. 곡면 OQG 는 베벨기어의 인볼류트 치면이다. 여기서 곡면 SOQ 는 O 가 중심인 구의 일부이다. 따라서 선분 OS , 선분 OQ , 선분 OG 는 구의 반경과 일치한다. 이 때 출발점 G 가 풀려나가면서 그리는 곡선 GQ 를 반경 OS 에서의 구형 인볼류트 곡선이라 한다.

두 좌표계 (x, y, z) , $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_g & \sin\theta_g \\ 0 & -\sin\theta_g & \cos\theta_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 θ_g 는 기초원추각(angle of base cone)이다. 점 Q 의 좌표성분을 $(\bar{x}_q, \bar{y}_q, \bar{z}_q)$ 좌표계로 나타내면,

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_q \\ \bar{y}_q \\ \bar{z}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\gamma \sin x_q \\ 0 \\ \gamma \cos x_q \end{Bmatrix} \quad (2)$$

이다.

점 Q 의 좌표를 (x, y, z) 좌표계로 나타내면,

$$\begin{Bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r \sin\theta_q \sin\phi_q \\ r \sin\theta_q \cos\phi_q \\ r \cos\theta_q \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이다. 여기서 θ_q, ϕ_q 는 각각 극각(polar angle), 방위각(azimuth angle)이다. 식(2), (3)을 식(1)에 대입하여 각 성분 별로 등치시키면,

$$-r \sin\theta_q \sin\phi_q = -r \sin x_q \quad (4)$$

$$r \sin\theta_q \cos\phi_q = r \cos x_q \sin\theta_g \quad (5)$$

$$r \cos\theta_q = r \cos x_q \cos\theta_g \quad (6)$$

이 성립한다. θ_g 와 θ_q 가 주어지면 접면각 x_q 은, 식(6)에서,

$$x_q = \cos^{-1}\left(\frac{\cos\theta_q}{\cos\theta_g}\right) \quad (7)$$

로 되며 식(4)와 식(5)를 변변 나누면 방위각 ϕ_q 에 대한 식,

$$\tan\phi_q = \frac{\tan x_q}{\sin\theta_g} \quad (8)$$

을 얻는다.

한편 인블류트 곡선이 시작되는 점 Q 에서 점 G 까지의 방위각 ϕ_q 는 다음과 같이 얻어진다. 인블류트 치형의 정의로부터,

$$\widehat{SG} = \widehat{SQ} \quad (9)$$

인데, $\widehat{SG} = (r \sin\theta_g)(\phi_q + \psi_q)$ 이고 $\widehat{SQ} = rx_q$ 이므로 이들을 식(9)에 대입하고 정리하면

$$\psi_q = \frac{x_q}{\sin\theta_g} - \phi_q \quad (10)$$

을 얻는다.

인블류트 베벨기어는 상기의 치형 곡면을 기초원추 상에서 일정 간격을 두고 연속적으로 생성하고 반대면에 대해서도 같은 방식으로 일정 크기의 치를 생성하고 치 끝에 한계를 정하여(addendum angle) 만든 기어이다.

이 때 생성된 인블류트 치는 치형곡선 간의 간격을 일정하게 유지시키는 중요한 특성을 갖는데, 인블류트 스퍼기어에서 인접한 치형과의 거리가 법선방향으로 일정함(이를 법선 피치라 한다)과 같이 베벨기어에서도 같은 원리가 적용된다. 그러나 다른 점은, 베벨기어에서는 인접한 인블류트 곡선과의 거리가 직선이 아닌 구면상의 거리, 즉, 원호에 따라 측정된 거리가 된다.

(2) 기구학적 관계

Fig. 2는 구동베벨기어와 종동베벨기어 사이의 기구학적 관계를 개념적으로 도시한 것이다. 한 정점에 놓여 있는 두 원추와 그 사이의 접면인 작용원판(disk of action)은 서로 구름접촉한다고 가정한다. 구동원추로부터 운동이 작용원판에 전달되고 다시 종동원추에 전달되는데 미끄럼 없는 구름접촉으로 인하여 두 원추는 일정 각속도비를 유지하게 된다.

Fig. 2의 두 원추를 구동 및 종동 베벨기어의 기초원추로 보면 기초원추 상의 점 G_1, G_2 로부터 생성된 구

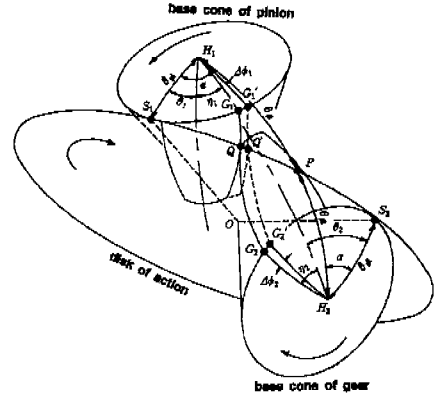


Fig. 2 Kinematical relationship of a bevel gearset

형인블류트 치면은 서로 작용원판 상의 한 점 Q 에서 만난다.

베벨기어의 압력각 α 는 평면 OS_1H_1 혹은 평면 OS_2H_2 가 평면 OH_1H_2 와 이루는 각이다. 원호 $\widehat{H_1H_2}$ 가 작용원판의 모서리와 만나는 점 P 는 피치점이며 P 점을 지나는 원추는 양기어의 피치원추가 된다. 피치원추가 $\theta_p, \theta_g, \alpha$ 와의 관계는 식(5), (6)의 θ_q, ϕ 대신에 각각 θ_p, α 을 대입하고 변변 나누어 얻을 수 있다. 결과 식이 다음과 같다.

$$\tan\theta_p \cos\alpha = \tan\theta_g \quad (11)$$

(3) 각속도비

치형곡선의 기구학적 필요조건은 기어의 모든 물림 위치에서 각속비가 일정해야 한다. Fig. 2의 점 G_1', Q', G_2' 는 시간 t 에서 $t + \Delta t$ 로 될 때의 점 G_1, Q, G_2 의 위치변화를 뜻한다. 원호 $\widehat{G_1'G_1}, \widehat{Q'Q}, \widehat{G_2'G_2}$ 의 길이는 인블류트 곡면의 정의로부터 모두 같아야 하므로,

$$\widehat{G_1'G_1} = \widehat{Q'Q} = \widehat{G_2'G_2} \quad (12)$$

가 성립되고 Δt 동안의 구동 및 종동기어의 회전각을 각각 $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2$ 라 하면

$$\begin{aligned} \widehat{G_1'G_1} &= (\overline{OG_1} \sin\theta_{g1})\Delta\phi_1 \\ \widehat{G_2'G_2} &= (\overline{OG_2} \sin\theta_{g2})\Delta\phi_2 \end{aligned} \quad (13)$$

이다. 여기서 θ_{g1}, θ_{g2} 는 각각 피니언, 기어의 기초원추 각이다. 식(13)을 식(12)에 대입하여 Δt 로 나누면,

$$\sin \theta_{g1} \frac{\Delta \phi_1}{\Delta t} = \sin \theta_{g1} \frac{\Delta \phi_2}{\Delta t} \quad (14)$$

이 되므로 구동기어와 증동기어의 각속도 ω_1, ω_2 에 대한 각속비 ζ ,

$$\zeta = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \theta_{g2}}{\sin \theta_{g1}} \quad (15)$$

가 구해진다.

(4) 축각, 각속도비, 및 피치원추각과의 관계

앞절에서 엄밀한 각속도비 식(15)가 유도되었는데 지금까지 통용되고 있는 각속도비,⁽¹⁻⁵⁾

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \theta_{p2}}{\sin \theta_{p1}} \quad (16)$$

은 베벨기어의 기구학적 관계를 피치원추차로 간주하여 얻어진 결과식이다. 그러나 식(11)에 의하여 식(15)와 식(16)은 동시에 만족되지 않는다. 따라서 엄밀한 의미의 피치원추각과 기초원추각을 구하기 위해서는 식(16) 대신에 식(11)과 식(15)를 사용해야 한다.

식(11)을 구동기어와 증동기어 양측에 적용하면,

$$\begin{aligned} \tan \theta_{p1} \cos \alpha &= \tan \theta_{g1} \\ \tan \theta_{p2} \cos \alpha &= \tan \theta_{g2} \end{aligned} \quad (17)$$

이다. 또한 피치원추각의 합이 축각 Σ 이 되어야 하므로,

$$\theta_{p1} + \theta_{p2} = \Sigma \quad (18)$$

이다. 따라서 Σ, ζ, α 가 주어지면, 식(15), (17), (18)의 비선형 방정식으로부터 미지수 $\theta_{p1}, \theta_{p2}, \theta_{g1}, \theta_{g2}$ 가 구해진다.

(5) 각속도비 오차

지금까지 관련 전공서적⁽¹⁻⁶⁾과 발표 논문⁽⁶⁾에서는 식(16)을 근거로 한 근사적인 기구학 모델에 의하여 베벨기어를 운동해석하거나 설계를 수행하여 왔는데, 이때 얻어지는 실질 각속도비와 예상 각속도비의 차이를 수식적으로 살펴보기로 한다.

식(16)과 식(18)로부터 구해지는 피치각을 근사적 피치원추각이라 하고 이를 $\hat{\theta}_{p1}, \hat{\theta}_{p2}$ 로 표기하면 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \tan \hat{\theta}_{p1} &= \frac{\sin \Sigma}{\zeta + \cos \Sigma} \\ \tan \hat{\theta}_{p2} &= \frac{\sin \Sigma}{\zeta^{-1} + \cos \Sigma} \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)를 식(11)에 대입하여 기초원추각을 구하고 구한 기초원추각을 다시 식(15)에 대입하면 실질 각속도비 $\hat{\zeta}$ 를 얻게 된다. 결과식은 다음과 같이 정리된다.

$$\hat{\zeta} = \sqrt{\frac{(\zeta + \cos \Sigma)^2 + \sin^2 \Sigma \cos^2 \alpha}{(\zeta^{-1} + \cos \Sigma)^2 + \sin^2 \Sigma \cos^2 \alpha}} \quad (20)$$

따라서 예상 속도비에 대한 실질 속도비의 퍼센트 오차는

$$\eta = \left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta} - 1 \right) \times 100 \quad (21)$$

이 된다.

3. 수치해석 및 토의

(1) 피치원추각과 기초원추각

베벨기어의 축각 Σ , 각속도비 ζ , 그리고 압력각 α 가 주어질 때 피니언과 기어의 피치원추각과 기초원추각을 각각 엄밀해와 근사해로 구분하여 구하였다. 축각 90°, 압력각 14.5°, 20°일 때, 기초원추각과 피치원추각에 대한 엄밀해와 근사해가 Table 1에 수록되어 있다. 피치원추각의 최대오차는 압력각 20°, 각속도비 2.5에서 0.8769°로 계산되었다.

축각, 압력각, 그리고 각속도비에 따른 피치원추각 오차를 좀더 자세히 살펴보기 위하여 축각 45°에서 22.5° 간격으로 135°까지, 압력각 14.5°에서 5.5° 간격으로 31°까지, 속도비 1.0에서 0.1간격으로 10.0까지 검색한 결과가 Fig. 3에 도시되어 있다. Fig. 3(a)는 축각 90°에서의 압력각에 따른 오차곡선인데 압력각이 클수록 피치원추각 오차가 커짐을 보여주고 있다. Fig. 3(b)는 압력각 20°에서의 축각에 따른 오차곡선인데 축각이 클수록 피치원추각 오차가 커짐을 보여주고 있다.

Table 2에는 실질 각속도비 $\hat{\zeta}$ 의 예상 각속도비 ζ , 축각, 및 압력각에 따른 계산 결과가 수록되었다. 압력각이 클수록, 그리고 축각이 클수록 각속도비 오차는 전반적으로 증가하는 경향을 보이고 있다.

축각 45°에서 22.5° 간격으로 135°까지, 속도비 1.0

Table 1 The exact and approximated cone angles of a pair of bevel gears

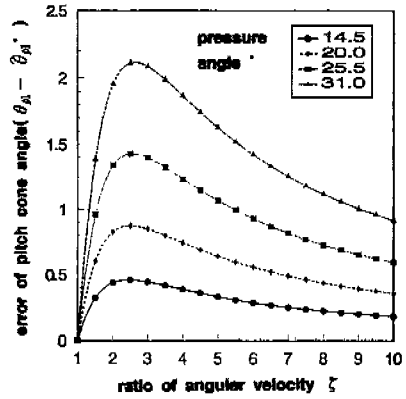
(a) $\Sigma = 90^\circ$ $\alpha = 14.5^\circ$

ξ	θ_{p1}	$\hat{\theta}_{p1}$	θ_{p2}	$\hat{\theta}_{p2}$	θ_{p1}	$\hat{\theta}_{p1}$	error1	θ_{p2}	$\hat{\theta}_{p2}$	error 2
1.00	44.07	44.07	44.07	44.07	45.00	45.00	.0000	45.00	45.00	.0000
1.50	33.16	32.84	55.12	55.45	34.01	33.69	.3213	55.99	56.31	-.3213
2.00	26.26	25.83	62.24	62.69	27.00	26.57	.4386	63.00	63.43	-.4386
2.50	21.62	21.17	67.08	67.55	22.26	21.80	.4599	67.74	68.20	-.4599
3.00	18.32	17.89	70.55	71.00	18.88	18.43	.4445	71.12	71.57	-.4445
3.50	15.87	15.46	73.13	73.56	16.36	15.95	.4170	73.64	74.05	-.4170
4.00	13.98	13.61	75.12	75.52	14.42	14.04	.3871	75.58	75.96	-.3871
4.50	12.49	12.14	76.70	77.07	12.89	12.53	.3584	77.11	77.47	-.3584
5.00	11.28	10.96	77.99	78.33	11.64	11.31	.3322	78.36	78.69	-.3322
5.50	10.28	9.98	79.05	79.36	10.61	10.30	.3086	79.39	79.70	-.3086
6.00	9.45	9.17	79.94	80.23	9.75	9.46	.2876	80.25	80.54	-.2876
6.50	8.73	8.47	80.69	80.97	9.02	8.75	.2690	80.98	81.25	-.2690
7.00	8.12	7.87	81.35	81.61	8.38	8.13	.2524	81.62	81.87	-.2524
7.50	7.59	7.36	81.91	82.16	7.83	7.59	.2375	82.17	82.41	-.2375
8.00	7.12	6.90	82.41	82.64	7.35	7.13	.2242	82.65	82.87	-.2242
8.50	6.70	6.50	82.85	83.07	6.92	6.71	.2122	83.08	83.29	-.2122
9.00	6.33	6.14	83.25	83.45	6.54	6.34	.2014	83.46	83.66	-.2014
9.50	6.00	5.82	83.60	83.79	6.20	6.01	.1915	83.80	83.99	-.1915
10.00	5.71	5.53	83.91	84.10	5.89	5.71	.1826	84.11	84.29	-.1826

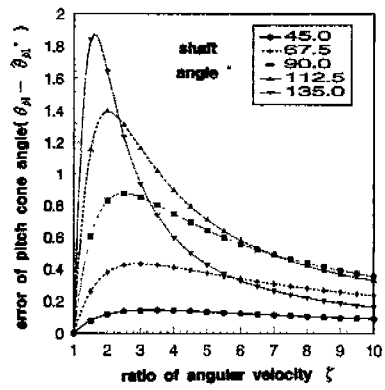
* error1 = $\theta_{p1} - \hat{\theta}_{p1}$, error 2 = $\theta_{p2} - \hat{\theta}_{p2}$

(b) $\Sigma = 90^\circ$ $\alpha = 20^\circ$

ξ	θ_{p1}	$\hat{\theta}_{p1}$	θ_{p2}	$\hat{\theta}_{p2}$	θ_{p1}	$\hat{\theta}_{p1}$	error 1	θ_{p2}	$\hat{\theta}_{p2}$	error 2
1.00	43.22	43.22	43.22	43.22	45.00	45.00	.0000	45.00	45.00	.0000
1.50	32.65	32.07	54.03	54.65	34.29	33.69	.6032	55.71	56.31	-.6032
2.00	25.97	25.17	61.12	61.98	27.40	26.57	.8305	62.60	63.43	-.8305
2.50	21.44	20.60	66.03	66.94	22.68	21.80	.8769	67.32	68.20	-.8769
3.00	18.20	17.39	69.57	70.47	19.29	18.43	.8519	70.71	71.57	-.8519
3.50	15.79	15.03	72.24	73.09	16.75	15.95	.8023	73.25	74.05	-.8023
4.00	13.93	13.22	74.31	75.10	14.78	14.04	.7468	75.22	75.96	-.7468
4.50	12.45	11.80	75.96	76.69	13.22	12.53	.6929	76.78	77.47	-.6929
5.00	11.25	10.64	77.30	77.98	11.95	11.31	.6431	78.05	78.69	-.6431
5.50	10.26	9.70	78.42	79.05	10.90	10.30	.5983	79.10	79.70	-.5983
6.00	9.43	8.90	79.35	79.94	10.02	9.46	.5581	79.98	80.54	-.5581
6.50	8.72	8.23	80.15	80.70	9.27	8.75	.5223	80.73	81.25	-.5223
7.00	8.11	7.65	80.84	81.36	8.62	8.13	.4903	81.38	81.87	-.4903
7.50	7.58	7.14	81.43	81.92	8.06	7.59	.4617	81.94	82.41	-.4617
8.00	7.11	6.70	81.96	82.42	7.56	7.13	.4360	82.44	82.87	-.4360
8.50	6.70	6.31	82.43	82.86	7.12	6.71	.4128	82.88	83.29	-.4128
9.00	6.33	5.96	82.84	83.26	6.73	6.34	.3918	83.27	83.66	-.3918
9.50	6.00	5.65	83.21	83.61	6.38	6.01	.3728	83.62	83.99	-.3728
10.00	5.70	5.37	83.55	83.93	6.07	5.71	.3555	83.93	84.29	-.3555



(a) shaft angle $\Sigma = 90^\circ$



(b) pressure angle $\alpha = 20^\circ$

Fig. 3 The error curves of pitch cone angles

에서 0.1 간격으로 10.0까지, 압력각을 14.5°에서 5.5°간격으로 31.0°까지 η 를 검색한 결과가 Fig. 4에 도시되어 있다. Fig. 4(a)에는 축각 90°에서 압력각 변화에 따른 각속도비의 퍼센트 오차를 보여주며 최대오차는 압력각 31°에서 16.3%이다. Fig. 4(b)는 압력각 20°에서 축각의 변화에 따른 퍼센트 오차곡선을 나타내 주며 최대오차는 축각 90°일 때 6.3%이다.

이상의 수치 해석으로부터, 베벨기어 쌍의 기구학적 관계를 피치원추마찰차의 기구학적 관계와 동일시하는 기존의 모델링은 실질 각속도비의 오차를 유발시킴을 확인할 수 있었다.

4. 결론

완전한 인볼류트 베벨기어의 형상 및 베벨기어쌍의

Table 2 The actual angular velocity ratios ξ , compared with the prescribed angular velocity ratio ζ .

$\zeta \backslash \alpha$	60°		90°		120°	
	14.5°	20°	14.5°	20°	14.5°	20°
1.50	1.51	1.52	1.52	1.54	1.53	1.55
2.00	2.02	2.04	2.04	2.08	2.05	2.10
2.50	2.53	2.56	2.56	2.62	2.57	2.63
3.00	3.04	3.09	3.08	3.15	3.08	3.16
3.50	3.56	3.61	3.60	3.69	3.60	3.69
4.00	4.07	4.13	4.12	4.23	4.11	4.22
4.50	4.58	4.66	4.63	4.76	4.63	4.75
5.00	5.09	5.18	5.15	5.30	5.14	5.27
5.50	5.61	5.70	5.67	5.83	5.65	5.80
6.00	6.12	6.23	6.19	6.36	6.17	6.32
6.50	6.63	6.75	6.70	6.90	6.68	6.85
7.00	7.14	7.27	7.22	7.43	7.19	7.37
7.50	7.66	7.80	7.74	7.96	7.70	7.90
8.00	8.17	8.32	8.25	8.50	8.22	8.42
8.50	8.68	8.85	8.77	9.03	8.73	8.94
9.00	9.19	9.37	9.29	9.56	9.24	9.47
9.50	9.70	9.89	9.81	10.10	9.75	9.99
10.00	10.22	10.42	10.32	10.63	10.27	10.51

기구학적 관계를 이론적으로 엄밀하게 해석하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 구형 인볼류트 곡선에 대한 인볼류트 함수를 좌표변환 접근 방식으로 유도하였다.
- (2) 인볼류트 베벨기어 쌍의 기구학적 관계를 해석하여 엄밀한 각속도비, 피치원추각, 및 기초원추각을 구하였다.
- (3) 엄밀한 해와 근사해를, 축각, 압력각, 속도비에 따라 수치 비교한 결과, 최대 2.13°의 피치원추각 오차를 나타내었고 최대 16.3%의 각속도비 퍼센트 오차를 보여 주었다.
- (4) 축각 90°, 물림 압력각을 14.5° 에서 31°까지, 축각을 45°에서 135°까지, 속도비를 1.0에서 10.0까지 변화시키면서 각속도비 퍼센트 오차를 검색한 결과 1.7%에서 16.3%까지 되었다.

5. 참고문헌

1. A. Sloane, Engineering Kinematics,

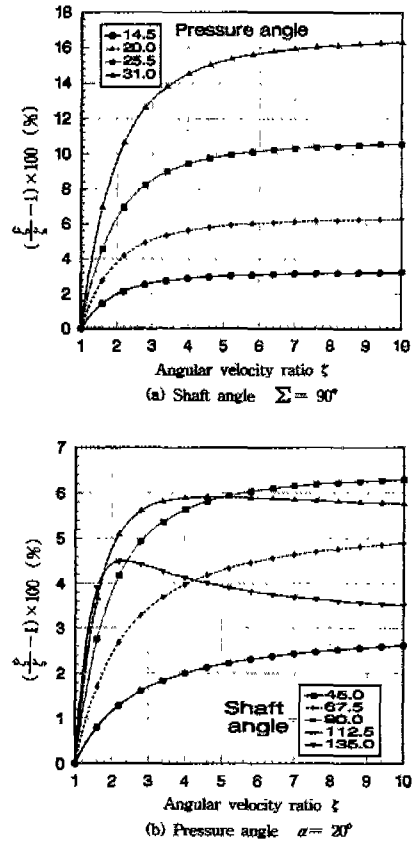


Fig. 4 Percent errors of angular velocity ratio ζ

Macmillian, New York, 1941;republished by Dover, NewYork, pp.125-128, 1966.

2. 정선모, 한동철, 표준기계설계학(신판), 동명사, pp.618-619, 1992.
3. J.E. Shigley, 한동철, 송지복, 유완석, 임오강 공역, 기계설계, 회중당, pp.444-445, 1989.
4. 박영조, 기계설계, 보성문화사, pp.364-365, 1991.
5. R.J. Drago, Fundamentals of Gear Design, Butterworths, pp.485, 1988.
6. W.D. Mark, "The Generalized Transmission Error of Spiral Bevel Gears", Tran. of the ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.109, pp.275-282, 1987.