

확률적 동적계의 해석에 관한 연구

남 성 현,* 김 호 룡**

A Study on the Analysis of Stochastic Dynamic System

S. H. Nam,* H. R. Kim**

ABSTRACT

The dynamic characteristics of a system can be critically influenced by system uncertainty, so the dynamic system must be analyzed stochastically in consideration of system uncertainty. This study presents a generalized stochastic model of dynamic system subjected to both external and parametric nonstationary stochastic input. And this stochastic system is analyzed by a new stochastic process closure method and moment equation method. The first moment equation is numerically evaluated by Runge-Kutta method. But the second moment equation is founded to constitute an infinite coupled set of differential equations, so this equations are numerically evaluated by cumulant neglect closure method and Runge-Kutta method. Finally the accuracy of the present method is verified by Monte Carlo simulation.

Key Words : Stochastic dynamic system(확률적 동적계), Stochastic process closure method(확률 과정근사법), Moment equation(모멘트방정식), random variable(확률변수), stochastic process(확률과정)

1. 서 론

종래의 동적계의 해석은 계의 재료특성, 기하학적 특성, 초기조건 및 외력과 같은 계를 구성하고 있는 모든 변수들과 입력에 대해서 정확하게 알고있다는 가정하에 실제의 복잡한 계를 간단하고 이상적인 확정적 모델로 모델링하여 해석하였으나, 실제적으로는 외부의 입력과 계의 재료특성의 불규칙적인 편차, 부정확한 측정에 의한 오차, 가공과 조립에서 발생하는 편차 및 마모나 마

찰에 의한 물리적 성질의 편차 등 여러가지의 복합적인 요인으로 인하여 계의 변수들과 입력에는 모두 불확실성을 내포하고 있다.⁽¹⁾

이와같은 불확실성은 계의 동적특성이나 안정성에 심각한 영향을 미칠 수 있기 때문에, 가능한 한 불확실성을 정확히 파악하고 이러한 불확실성이 계의 출력에 미치는 영향을 조사하여야 한다. 기존에는 이러한 불확실성을 고려하기 위해 과거의 경험적 사실에 기초하여 설계자의 주관대로 결정한 안전계수를 사용하여 정성적으

* 연세대학교 대학원

** 연세대학교 기계설계학과

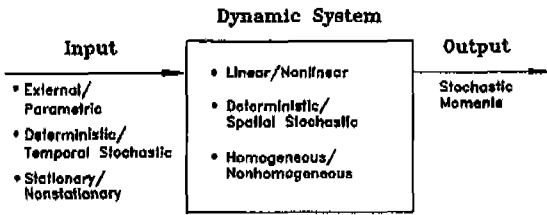


Fig. 1 Stochastic dynamic system

로 해결하였으나, 이러한 안전계수의 개념은 불확실성의 정도를 체계적으로 고려하지 못할 뿐만 아니라 계의 안전한 정도를 정량적으로 파악할 수 없다. 더욱이 초정밀, 초고속 등이 요구되는 산업계에서는 실제에 가장 가까운 계의 모델링과 해석을 통한 계의 신뢰성 향상이 절실히 요구되고 있으며, 근래에는 불확실성을 고려한 확률해석에 입각한 신뢰성 해석 및 최적설계의 연구가 많이 수행되고 있다.⁽²⁾

따라서 이러한 불확실성을 포함하고 있는 동적계를 실험적 측정, 확률법칙 및 통계적 성질을 이용한 확률추론에 의해 확률적 동적계로 모델링하고, 이를 해석하므로써 불확실성이 계의 출력에 미치는 영향을 정량적으로 정확히 파악하여야 한다.

일반적으로 확률적 동적계의 해석문제는 Fig. 1과 Table 1과 같이 6가지의 경우로 크게 구분할 수 있으며, 각각의 경우에 대해서는 선형/비선형 동적계, 정상/비정상 확률과정 혹은 균질/비균질 확률과정에 대한 문제로 세분할 수 있다. 종래의 확률적 동적계의 해석은 Table 1에서 구별한 각각의 경우에 대해서 각각 다른 분야로서 발전하여 왔다.⁽²⁻¹⁰⁾ 그러나 종래의 연구에서는 주로 평균이 영인 확률적 입력만을 고려하였고, 이러한 확률적 입력이 계의 응답에 미치는 영향에 비해서 계의 변수의 불확실성이 계의 응답에 미치는 영향이 작기 때문에 계의 변수들의 불확실성은 무시하였으나, primary-secondary system⁽¹¹⁾이나 본 연구에서와 같은 평균이 영이 아닌 확률적 입력인 경우에는 계의 불확실성이 입력의 불확실성만큼 계의 응답에 영향을 미치기 때문에 계의 변수들과 입력에 대한 불확실성을 모두 고려한 동적계의 확률해석이 필요하다.

최근에 비로소 계의 변수와 입력의 불확실성을 모두 고려한 해석방법이 연구되기 시작했다. 1991년 Chang과 Yang⁽¹²⁾은 계의 변수들의 불확실성을 포함하고 정상 확률적 외부입력을 받는 기하학적 비선형 보에 대해서 확률적 선형화법과 섭동법을 이용한 확률유한요소법을

Table 1 Classification of stochastic dynamic problem

	Input	System	Output	Ref.
Analysis of System under Stochastic External Inputs (Random Vibration)	Temporal Stochastic External	Deterministic	Temporal Stochastic	(3,4)
Analysis of System under Stochastic Parametric Inputs (Parametric Random Vibration)	Temporal Stochastic Parametric	Deterministic	Temporal Stochastic	(5,6)
Analysis of System with Uncertain Parameters	Deterministic	Spatial Stochastic	Temporal Stochastic	(2,7)
Analysis of System under Stochastic External and Parametric Inputs	Temporal Stochastic External and Parametric	Deterministic	Temporal Stochastic	(8-10)
Analysis of System with Uncertain Parameters under Stochastic External Inputs	Temporal Stochastic External	Spatial Stochastic	Temporal Stochastic	(12,13)
	Nonstationary Stochastic External	Nonlinear Spatial Stochastic	Temporal Stochastic	None
Analysis of System with Uncertain Parameters under Stochastic External and Parametric Inputs	Temporal Stochastic External and Parametric	Spatial Stochastic	Temporal Stochastic	None

사용하여 응답의 정상확률특성을 구하였으나, 섭동법을 사용했기 때문에 불확실성이 비교적 작아야 하는 단점을 가지고 있으며 비정상확률입력인 경우에는 해석이 불가능하다. 1992년 Jensen과 Iwan⁽¹³⁾은 계의 변수들의 불확실성을 포함하고 비정상 확률적 외부입력을 받는 선형 동적계에 대해서 계의 응답의 공분산행렬에 대한 확률상태방정식을 유도하고 이 식을 시간에 대해 적분을 수행하여 응답의 확률특성을 구하였으나, 비선형계는 적용할 수 없다. 그러나 Table 1과 같이 현재까지도 계의 변수들이 불확실성을 포함하고 확률적 외부입력과 계수입력을 받는 동적계의 해석과 계의 변수들이 불확실성을 포함하고 비정상 확률적 외부입력을 받는 비선형계의 해석은 현재까지 수행되지 않고 있다.

본 연구에서는 종래에 해석되지 않은 계의 변수들이 불확실성을 포함하고 확률적 외부입력과 계수입력을 받는 동적계를 포함한 일반적인 확률적 동적계의 모델과 새로운 해석방법을 제시하고 그 타당성을 Monte Carlo 시뮬레이션으로 검증한다.

2. 확률적 동적계의 해석

2.1 일반화된 확률적 동적계의 운동방정식

종래에는 계의 모든 변수들이 확정적으로 정의할 수 있다고 가정하였기 때문에 외부입력과 계수입력을 동시에 받는 확정적 동적계의 운동방정식은 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[M_0]\{\ddot{X}_0(t)\} + ([C_0] - p_0(t)[A])\{\dot{X}_0(t)\} + ([K_0] - q_0(t)[B])\{X_0(t)\} = \{F_0(t)\} \quad (1)$$

여기서 $[M_0]$, $[C_0]$, $[K_0]$ 는 질량, 감쇠, 강성행렬이고, p_0 , q_0 는 계수입력함수이며, $\{F_0\}$ 는 외부입력벡터이다. 또한 $[A]$ 와 $[B]$ 는 일정한 값을 갖는 행렬이고, $\{X_0\}$ 는 응답벡터이다.

그러나 앞에서 언급한 불확실성을 고려하기 위해서 확률개념을 도입하여 운동방정식을 표현하면 다음과 같다. 즉, 시간의 함수가 아닌 $[C]$, $[K]$ 와 시간의 함수인 $p(t)$, $q(t)$, $\{F(t)\}$ 를 각각 확률변수와 비정상확률과정으로 모델링하고 모든 확률변수와 확률과정은 중심극한정리에 의해 정규분포를 갖는다고 가정하면, Fig. 2와 같이 확률변수와 확률과정 (a)는 평균이 μ 인 확정적 부분 (b)와 평균이 0이고 편차가 $\sigma(t)$ 인 확률적 부분 (c)로 분리

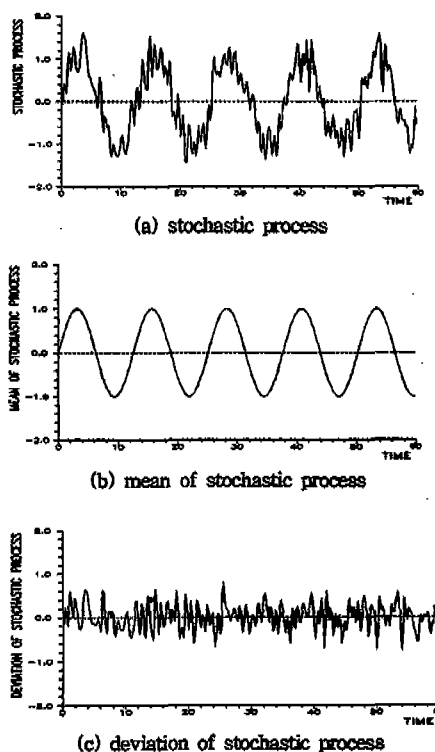


Fig. 2 A sample of stochastic process

할 수 있으며, 이것을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[C] = [C_0] + [\Delta C] = [\mu_C] + \sum_{r=1}^r [\sigma_{Cr}] b_r \quad (2)$$

$$[K] = [K_0] + [\Delta K] = [\mu_K] + \sum_{r=1}^r [\sigma_{Kr}] b_r \quad (3)$$

$$p(t) = p_0(t) + \Delta p(t) = \mu_p(t) + \sum_{j=1}^s (\sigma_p(t))_j \eta_j(t) \quad (4)$$

$$q(t) = q_0(t) + \Delta q(t) = \mu_q(t) + \sum_{j=1}^s (\sigma_q(t))_j \eta_j(t) \quad (5)$$

$$\{F(t)\} = \{F_0(t)\} + \{\Delta F(t)\} = \{\mu_F(t)\} + \sum_{j=1}^s \{\sigma_F(t)\}_j \eta_j(t) \quad (6)$$

여기서 b_r 와 $\eta_j(t)$ 는 각각 평균이 0이고 분산이 1인 확률변수와 정상확률과정을 의미하며, r 과 s 는 각각 확률변수와 확률과정의 갯수이다. 식 (2)에서 식 (6)까지의 식들에 의해 식 (1)은 다음과 같이 확률미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & [M]\{\ddot{X}(t, \mu_a, \sigma_a)\} + ([C(\mu_c, \sigma_c)] \\
 & - p(t, \mu_p, \sigma_p)[A])\{\dot{X}(t, \mu_v, \sigma_v)\} + ([K(\mu_k, \sigma_k)] \\
 & - q(t, \mu_q, \sigma_q)[B])\{X(t, \mu_x, \sigma_x)\} = F(t, \mu_f, \sigma_f) \quad (7)
 \end{aligned}$$

한편, 동적계가 구조물과 같은 연속계라면 일반적으로 계의 변수들은 공간에 대한 비균질확률과정으로 모델링할 수 있고, 비균질확률과정은 확률유한요소법에서 사용하는 확률변수법에 의한 요소분할⁽¹⁴⁾을 이용하면 식 (7)과 동일한 형태로 나타낼 수 있다. 그러므로 본 연구에서 해석하려는 확률적 동적계의 일반화된 운동방정식은 식 (7)과 같이 표현되어진다.

2.2 응답의 1차 모멘트

일반화된 확률적 동적계의 운동방정식으로부터 계의 출력인 응답의 1차 모멘트인 평균을 구하기 위해서 먼저 식 (2)-(6)을 식 (7)에 대입한 후, 기대값을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & [M]\{\mu_{\ddot{x}}\} + ([\mu_c] - \mu_p[A])\{\mu_{\dot{x}}\} + ([\mu_k] - \mu_q[B])\{\mu_x\} = \{\mu_f\} \\
 & - E([\Delta C]\{\Delta \dot{X}\}) - E(\Delta p[A]\{\Delta \dot{X}\}) - E([\Delta K]\{\Delta X\}) \\
 & - E(\Delta q[B]\{\Delta X\}) \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서 $E([\Delta C]\{\Delta \dot{X}\})$, $E(\Delta p[A]\{\Delta \dot{X}\})$, $E([\Delta K]\{\Delta X\})$ 및 $E(\Delta q[B]\{\Delta X\})$ 는 상대적으로 작기 때문에 무시할 수 있으므로 식 (8)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 & [M]\{\mu_{\ddot{x}}\} + ([\mu_c] - \mu_p[A])\{\mu_{\dot{x}}\} + ([\mu_k] - \mu_q[B])\{\mu_x\} \\
 & = \{\mu_f\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

따라서 본 연구에서는 Runge-Kutta법을 사용하여 식 (9)를 해석하므로써 응답 $\{X\}$ 의 평균인 $\{\mu_x\}$ 을 구한다.

2.3 응답의 2차 모멘트

일반화된 확률적 동적계의 운동방정식으로부터 계의 출력인 응답의 2차 모멘트를 구하기 위해서 식 (2)-(6)을 식 (7)에 대입한 후 $\{\Delta X\}$ 를 후적하여 기대값을 취한 식으로부터 다음과 같은 확률적 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & [M]\{\Delta \ddot{X}\} + ([\mu_c] - \mu_p[A])\{\Delta \dot{X}\} + ([\mu_k] - \mu_q[B])\{\Delta X\} \\
 & = \sum_{j=1}^s \{\sigma_{f_j}\} \eta_j - \left(\sum_{i=1}^r [\sigma_{c_i}] b_i - \sum_{j=1}^s (\sigma_{p_j} \eta_j [A]) \right) (\{\mu_{\dot{x}}\} + \{\Delta \dot{X}\}) \\
 & - \left(\sum_{i=1}^r [\sigma_{k_i}] b_i - \sum_{j=1}^s (\sigma_{q_j} \eta_j [B]) \right) (\{\mu_x\} + \{\Delta X\}) \quad (10)
 \end{aligned}$$

그러나 식 (10)과 같은 확률변수 b_i 과 확률함수 $\eta_j(t)$ 가 함께 존재하고 있는 운동방정식은 종래의 방법으로는 해석할 수 없기 때문에 본 연구에서는 새로운 근사적인 해석방법으로서 확률과정 근사법을 제시하고자 한다.

2.4 확률과정 근사법

평균이 0이고 분산이 σ^2 인 확률변수의 자기상관함수 $R(\tau)$ 와 스펙트럼 밀도함수 $S(\omega)$ 는 후리에 변환에 의해 Fig. 3과 같이 나타낼 수 있다. 또한 협대역 정상확률과정은 확률함수의 진폭과 위상이 시간에 대해 불규칙적으로 천천히 변화하고, 확률함수의 스펙트럼 밀도함수가 Fig. 4와 같이 협대역내에서만 존재하는 확률과정을 의미한다. 따라서 본 연구에서는 평균이 0이고 분산이 1인 확률변수 b_i 를 중심주파수가 해석하고자 하는 계의 고유진동수보다 매우 작고 평균이 0이고 분산이 1인 협대역 정상확률과정 $y(t)$ 으로 근사시키는 확률과정 근사법을 사용하며, 협대역 정상확률과정은 광대역 정상확률과정을 입력으로 하는 선형필터를 사용하여 구한다.

본 연구에서 필터로 사용되는 선형 동적계는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \xi(t) \quad (11)$$

여기서 ξ 는 감쇠비이고, ω_n 은 고유진동수이며, $\xi(t)$ 는 평균이 0이고 파워강도가 S_0 인 백색잡음이다. 이 필터의 출력인 협대역 정상확률과정 $y(t)$ 의 스펙트럼 밀도함수 $S(\omega)$ 는 Fig. 4와 같이 나타낼 수 있다.

Fig. 4를 살펴보면 λ_0 는 $S(\omega)$ 의 면적으로서 $y(t)$ 의 자승평균 또는 분산을 의미하고, ω_c 는 주파수의 원점축에 대한 $S(\omega)$ 의 도심으로서 중심주파수를 의미한다. 또한 ω_s 은 주파수의 원점축에 대한 $S(\omega)$ 의 회전 반지름으로써 필터의 고유진동수를 의미하고, ω_b 는 $S(\omega)$ 의 도심에 대한 편차로서 중심주파수에 대한 $S(\omega)$ 의 분산된 정도,

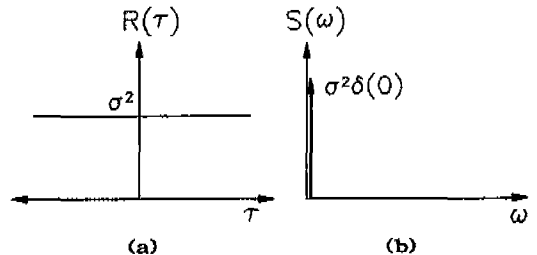


Fig. 3 Random variable (a)correlation function (b) one-sided spectral density function

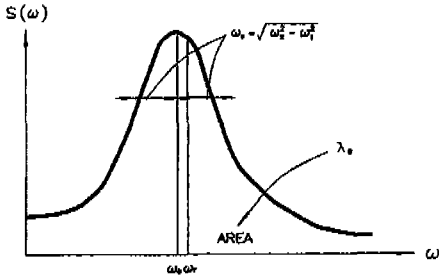


Fig. 4 One-sided power spectral density of narrow-band stationary stochastic process

다시말하면 확률과정의 대역폭의 정도를 의미한다. 이와같은 협대역 정상 확률과정의 특성을 나타내는 변수들을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\lambda_0 = \int_0^\infty S(\omega) d\omega = \frac{\pi S_0}{4\zeta\omega_n^3} \quad (12)$$

$$\omega_c = \frac{\int_0^\infty \omega S(\omega) d\omega}{\lambda_0} = \left\{ \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\omega_r = \frac{\int_0^\infty \omega^2 S(\omega) d\omega}{\lambda_0} = \omega_n \quad (14)$$

$$\omega_s^2 = \omega_r^2 - \omega_c^2 \approx \frac{4\zeta\omega_n^2}{\pi} [1 - 1.1\zeta] \quad (15)$$

그러므로 필터인 선형 동적계의 고유진동수와 감쇠비는 협대역 정상확률과정의 중심주파수와 대역폭에 영향을 미치며 필터의 입력인 백색잡음의 파워강도는 협대역 정상확률과정의 분산에 영향을 미친다. 따라서 평균이 0이고 분산이 1인 확률변수 b_i 를 평균이 0이고 분산이 1인 협대역 정상확률과정 $y_i(t)$ 로 근사시키기 위해서는 식 (12)-(15)를 이용하여 필터의 고유진동수와 감쇠비 및 필터의 입력인 백색잡음의 파워강도를 적절히 결정하면 된다. 이상과 같은 방법으로 식 (10)의 확률변수를 협대역 정상확률함수로 치환하면 다음과 같은 식으로 변형된다.

$$[M]\{\Delta\ddot{X}\} + ([\mu_c] - \mu_p[A])\{\Delta\dot{X}\} + ([\mu_K] - \mu_q[B])\{\Delta X\} = \sum_{j=1}^r \{\sigma_{Fj}\} \eta_j - \left(\sum_{i=1}^r \{\sigma_{Ci}\} y_i - \sum_{j=1}^s (\sigma_{pj}) \eta_j [A] (\{\mu_x\} + \{\Delta\dot{X}\}) \right) \quad (16)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^r \{\sigma_{Ki}\} y_i - \sum_{j=1}^s (\sigma_{qj}) \eta_j [B] (\{\mu_x\} + \{\Delta X\}) \right) \{\ddot{Y}\} + 2[\zeta][\omega_n]\{\dot{Y}\} + [\omega_n^2]\{Y\} = \{\xi(t)\} \quad (17)$$

여기서 식 (17)은 선형필터를 의미하며, $[\zeta]$ 와 $[\omega_n]$ 은 필터의 감쇠비와 고유진동수를 의미하는 $r \times r$ 대각행렬이고, $\{\xi(t)\}$ 는 백색잡음을 의미하는 $r \times 1$ 벡터이다.

2.5 모멘트방정식

확률적 방정식인 식 (16), (17)을 상태벡터 $\{Z(t)\}$ 를 이용한 Itô 확률미분방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$dZ(t) = \{f(t, \{Z\}, \{\mu_x\}, \{\mu_{\dot{x}}\})\} dt + [G]\{t, \{Z\}, \{\mu_x\}, \{\mu_{\dot{x}}\}\} dB(t) \quad (18)$$

여기서

$$\{Z(t)\} = \{\{Z_1\} \{Z_2\} \{Z_3\} \{Z_4\}\}^T = \{\{\Delta X\} \{\Delta \dot{X}\} \{Y\} \{\dot{Y}\}\}^T \quad (19)$$

$$\{f\} = \{\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3\}, \{f_4\}\}^T \quad (20)$$

$$\{f_1\} = \{Z_2\}$$

$$\begin{aligned} \{f_2\} = & -[M]^{-1}([\mu_K] - \mu_q[B])\{Z_1\} \\ & -[M]^{-1}([\mu_c] - \mu_p[A])\{Z_2\} \\ & - \sum_{i=1}^r [M]^{-1}(\{\sigma_{Ci}\} \{Z_3\}_i (\{Z_2\} + \{\mu_x\})) \\ & - \sum_{i=1}^s [M]^{-1}[\sigma_{Ki}] \{Z_3\}_i (\{Z_1\} + \{\mu_x\}) \end{aligned}$$

$$\{f_3\} = \{Z_4\}$$

$$\{f_4\} = -[\omega]^2 \{Z_3\} - 2[\zeta][\omega]\{z_4\}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [O] & [O] \\ [G]_{21} & [O] \\ [O] & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[G]_{21} = \begin{bmatrix} [M]^{-1}\{\sigma_{F1}\} \\ +[M]^{-1}(\sigma_{p1})_s [A] (\{\mu_{\dot{x}}\} + \{\Delta\dot{X}\}) \\ +[M]^{-1}(\sigma_{q1})_s [B] (\{\mu_x\} + \{\Delta X\}) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} [M]^{-1}\{\sigma_{Fs}\} \\ +[M]^{-1}(\sigma_{ps})_s [A] (\{\mu_{\dot{x}}\} + \{\Delta\dot{X}\}) \\ +[M]^{-1}(\sigma_{qs})_s [B] (\{\mu_x\} + \{\Delta X\}) \end{bmatrix}$$

$$dB(t) = \begin{Bmatrix} \{\xi(t)\} \\ \{\eta(t)\} \end{Bmatrix} dt \quad (22)$$

식 (18)을 만족하는 확률과정 $\{Z(t)\}$ 는 마코프과정이며 $\{Z(t)\}$ 는 확률밀도함수에 대한 Fokker-Planck식⁽¹⁵⁾을 만족하지만, Fokker-Planck식은 특별히 제한된 경우를 제외하고는 일반적으로 해석적인 해를 구할 수 없기 때문에, 본 연구에서는 확률밀도함수를 구하는 대신에 계의 응답의 모멘트들을 구하여 응답의 확률특성을 정의한다. 따라서 임의의 함수 $h = h(\{Z(t)\}, t)$ 의 증분을 2차항까지의 Taylor 급수로 전개하고 Fokker-Planck식을 적용한 후, 조건기대값을 취하고 다시 기대값을 취하면 다음과 같은 기대값 $E[h]$ 를 구하는 상미분방정식인 모멘트방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} E[h] = \sum_{i=1}^{2n+2r} E\left[f_i \frac{\partial h}{\partial z_i}\right] + E\left[\frac{\partial h}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^{2n+2r} \sum_{j=1}^{2n+2r} E[(GDG^T)_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial z_j}] \quad (23)$$

여기서 D 는 백색잡음의 강도(intensity)를 나타내는 행렬을 의미하며 다음과 같이 표현된다.

$$2D_{ij} dt = E[dB_i(t)dB_j(t)] \quad (24)$$

그러므로 식 (23)에 의해 계의 응답의 모멘트에 대한 상미분방정식을 유도하여 해석하면 응답의 확률과정을 정의할 수 있다. 그러나 식 (23)에 의해 유도된 모멘트방정식은 고차 모멘트에 의해 연성되어 있기 때문에, 본 연구에서는 응답이 가우스 확률과정이라 가정하고 계산이 매우 간단한 3차 cumulant neglect closure 법과 Runge-Kutta법을 사용하여 모멘트방정식을 해석한다.

3. 수치해석

본 연구에서 제시한 방법을 사용하여 확률적 동적계를 해석하기 위한 간단한 모델은 외부입력과 계수입력을 동시에 받는 자유도가 1인 동적계로서 운동방정식은 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + [k - p(t)]x = f(t) \quad (25)$$

여기서 m 과 c 는 확정적 변수로서 $m = 1.0 \text{ kg}$, $c = 0.1 \text{ N sec/m}$ 로 가정하고, k , $p(t)$ 와 $f(t)$ 는 10%의 편차를 가지고 있는 확률적 변수로서 다음과 같이 가정한다. 즉, 강성 k 의 평균과 편차는 $\mu_k = 5.0 \text{ N/m}$, $\sigma_k = 5.0 \text{ N/m}$ 이고,

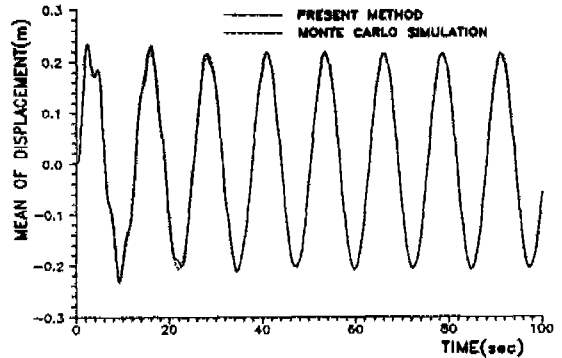


Fig. 5 Comparison of the mean of displacement using present method and MCS

계수입력 $p(t)$ 의 평균과 편차는 $\mu_p(t) = 0.1 \sin 0.5 t \text{ N}$ 이며, 외부입력 $f(t)$ 의 평균과 편차는 $\mu_f(t) = \sin 5.0 t \text{ N/m}$, $\sigma_f = 0.1 \sin 0.5 t \text{ N}$ 로 가정하였다.

Fig. 5에서 Fig. 7까지는 본 연구에서 제시한 해석방법과 Monte Carlo 시뮬레이션(MCS)을 사용하여 확률적 동적계를 해석한 결과이다. Fig. 5는 확률적 동적계의 변위의 평균을 구한 것이고, Fig. 6는 입력만을 확률적으로 고려하여 얻은 변위의 분산을 나타낸 것이며, Fig. 7은 입력과 계의 변수를 모두 확률적으로 고려하여 얻은 결과이다. 또한 Fig. 8은 Fig. 6과 Fig. 7에서 Monte Carlo 시뮬레이션에 의해 구해진 분산에 대한 본 연구에서 제시한 해석방법에 의해 구해진 분산의 백분율 오차를 확률밀도로써 표시한 그림이다. 그림에서 보듯이 변위의 편차의 백분율 오차에 대한 평균과 편차는 입력만을 확률적으로 고려한 경우 각각 3.76%

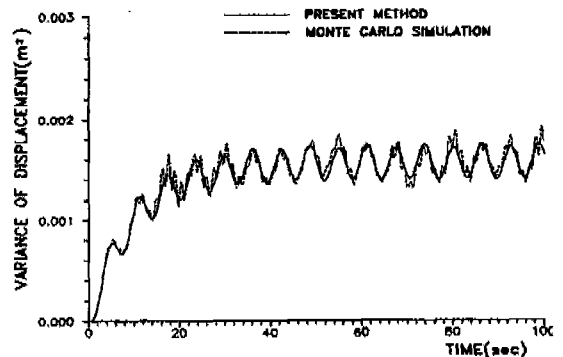


Fig. 6 Comparison of the variance of displacement of the system with stochastic inputs using present method and MCS

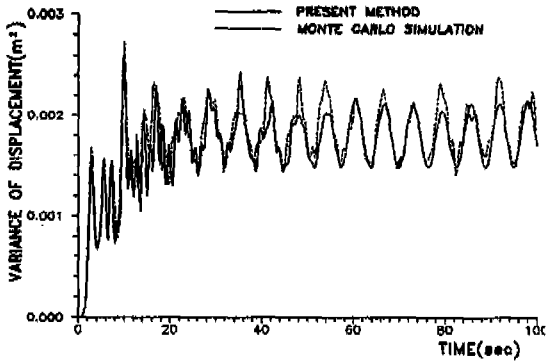


Fig. 7 Comparison of the variance of displacement of the system with stochastic inputs and parameters using present method and MCS

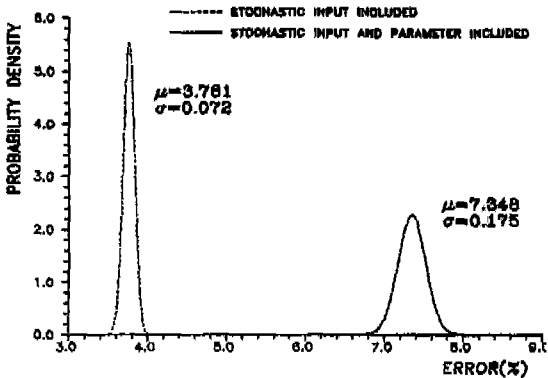


Fig. 8 Comparison of the probability density of error

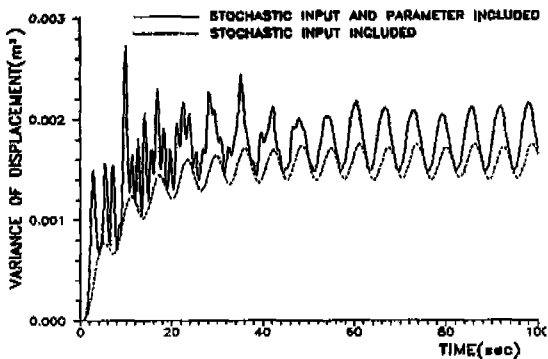


Fig. 9 Comparison of the variance of displacement of the system with stochastic inputs and parameters and with stochastic input

와 0.07%이며, 계의 변수들과 입력을 모두 확률적으로 고려한 경우는 각각 7.35%와 0.18%이다. 계의 변수들과 입력을 모두 확률적으로 고려한 경우가 입력만을 확률적으로 고려한 경우보다 오차의 평균과 편차가 약간 큰 것은 역시 확률변수들을 협대역 정상 확률과정으로 근사시켰기 때문에 발생하는 오차로 생각할 수 있다. 이상과 같은 그림들을 살펴보면, 본 연구에서 제시한 해석방법으로 얻은 결과와 Monte Carlo 시뮬레이션으로 얻은 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 입력만을 확률적으로 고려한 결과와 입력과 계의 변수를 모두 확률적으로 고려한 결과를 함께 나타낸 그림이다. 그림에서 살펴보면 계의 변수의 불확실성도 계의 응답에 상당한 영향을 끼치고 있음을 알 수 있다. 따라서 보다 정확하게 확률적 동적계의 해석을 수행하기 위해서는 입력만을 확률적으로 고려하여 해석한 종래의 해석방법에서 벗어나 계의 변수들도 확률적으로 고려하여 해석하여야만 한다. 이상과 같은 결과로 보아 본 연구에서 제시한 해석방법은 확률적 동적계의 해석을 수행함에 있어서 매우 일반적인 방법이며 또한 그 방법이 타당함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 종래의 확정적 해석에서 벗어나 계의 불확실성을 고려한 확률해석을 수행하기 위해서 일반적인 동적계의 확률적 동적 모델을 만들고, 새로운 확률과정 근사법을 이용한 확률해석방법을 제시하였으며, 이 방법에 의한 확률적 동적계의 해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서는 일반화된 확률적 동적계를 해석하기 위해서 새로운 해석방법인 확률과정근사법을 제시하였다.
- 2) 본 연구에서 제시한 확률해석방법에 의한 해석결과와 Monte Carlo 시뮬레이션에 의한 해석결과가 잘 일치하기 때문에, 확률과정근사법을 이용한 해석방법이 타당함을 알 수 있다.
- 3) 평균이 영이 아닌 확률적 입력을 받는 동적계의 확률해석을 수행할 경우, 계의 변수들도 계의 응답에 상당한 영향을 끼침을 보였다. 따라서 확률적 동적계를 보다 정확하게 해석하기 위해서는 입력만을 확률적으로 고려하여 해석한 종래의 해석방법에서 벗어나 반드시 계의 변수들도 확률적으로 고려하여 해석해야 한다.

참고문헌

1. Ang, A.H.S., and Tang, W.H., "Probability concepts in engineering planning and design", Volume I, Basic principles, Wiley, New York, 1975.
2. Ibrahim, R.A., "Structural dynamics with parameter uncertainties", Applied Mechanics Review, Vol.40, NO.3, pp.309-328, 1987.
3. Crandall, S.H., and Zhu, W.Q., "Random vibration: a survey of recent developments", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 50, pp.953-962, 1983.
4. To C.W.S., "Random vibration of nonlinear systems", Shock and Vibration Digest, Vol. 19, pp.3-9, 1987.
5. Ibrahim, R.A., "Parametric vibration, Part VI: Stochastic problems", Shock and Vibration Digest, Vol.13, No.9, pp.23-35, 1981.
6. Ibrahim, R.A., "Parametric random vibration", Research Studies Press, 1985.
7. 中桐滋, 久田俊明, "確率有限要素法 入門", 培風館, 1985.
8. To, C.W.S., and Orisamololu, I.R., "Response of discretized plates to transversal and in-plane nonstationary random excitations", J. of Sound and Vibration, Vol.114, No.3, pp.481-494, 1987.
9. Roberts, J.B., "Stochastic averaging: An approximate method of solving random vibration problems", Int. J. of Nonlinear Mechanics, Vol.21, No.2, pp.111-134, 1986.
10. Young, G.E., and Chang, R.J., "Prediction of the response of nonlinear oscillators under stochastic parametric and external excitations", Int. J. of Nonlinear Mechanics, Vol.22, No.2, pp.151-160, 1987.
11. Igusa, T., and Kiureghian, A. D., "Response of uncertain systems to stochastic excitation", ASCE J. of Engineering Mechanics, Vol.114, No.5, pp.812-832, 1988.
12. Chang, C.C., and Yang, H.T.Y., "Random vibration of flexible uncertain beam element", ASCE J. of Engineering Mechanics, Vol.117, No.10, pp.2329-2350, 1991.
13. Jensen, H., and Iwan, W.D., "Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation", ASCE J. of Engineering Mechanics, Vol.118, No.5, pp.1012-1025, 1992.
14. Mahadevan, S., and Haldar, A., "Practical random field discretization in stochastic finite element analysis", Structural Safety, Vol.9, pp.283-304, 1991.
15. Soong, T.T., "Random differential equations in science and engineering", Academic Press, 1973.