

## 적응성 선향저감적분법에 의한 요소의 안정성 향상과 강소성 유한요소해석에의 적용

박 근,\* 이 영 규,\* 박 용 복,\* 양 등 열\*\*

### Improvement of Element Stability using Adaptive Directional Reduced Integration and its Application to Rigid-Plastic Finite Element Method

K. Park,\* Y. K. Lee,\* Y.B.Park\* and D.Y.Yang\*\*

#### ABSTRACT

In the analysis of metal forming processes by the finite element method, there are many numerical instabilities such as element locking, hourglass mode and shear locking. These instabilities may have a bad effect upon accuracy and convergence. The present work is concerned with improvement of stability and efficiency in two-dimensional rigid-plastic finite element method using various types of elements and numerical integration schemes. As metal forming examples, upsetting and backward extrusion are taken for comparison among the methods: various element types and numerical integration schemes. Comparison is made in terms of stability and efficiency in element behavior and computational efficiency and a new scheme of adaptive directional reduced integration is introduced. As a result, the finite element computation has been stabilized from the viewpoint of computational time, convergency, and numerical instability.

**Key Words** : Rigid-plastic Finite Element Method(강소성 유한요소해석), Numerical Instability(수치적 불안정성), Shear Locking(전단잠금), Hourglass Mode(무에너지모드), Adaptive Directional Reduced Integration(적응성 선향저감적분법)

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 한국과학기술원 기계공학과(정회원)

## 1. 서 론

유한요소해석 과정에서 여러가지 수치적 불안정성이 발생되는데, 특히 비압축성 조건과 극부적인 대변형이 전제되는 소성변형에서는 이러한 특성과 관련된 불안정성이 발생하게 된다. 이러한 불안정성은 변형 형상, 변형률과 응력의 분포 및 수렴성까지 좋지 않은 영향을 미치게 되어 해의 정확성 및 계산의 효율성을 저하시킨다.

현재 유한요소해석에서의 수치적 불안정성에 관해 많은 연구가 진행되어왔다. Rice, Argyris, Hughes 등은 비압축성 조건이 요소의 변형에 미치는 영향에 대해 연구하였고,<sup>(1,2)</sup> Zienkiewicz 등은 혼합된 유한요소해석(mixed finite element method)을 수식화하여 비압축성 구속조건을 적용하였으며,<sup>(3,4)</sup> Hughes 등은 선택적 저감적분법을 사용하여 비압축성 구속조건시의 요소잠금(element locking) 현상을 방지하는 방법을 제안하였다.<sup>(5,6)</sup> 또 Clough, Taylor, Hughes 등은 전단변형이 지배적인 문제에서 발생하는 전단잠금(shear locking)현상에 관해 연구하였다.<sup>(7-9)</sup> 또한 Belytschko 등은 저감적분법 수행시 발생하는 무에너지모드 및 이를 제어하기 위한 연구를 진행하였고,<sup>(10)</sup> Jacquotte 등은 이의 수렴성을 수학적으로 증명하였으며,<sup>(11-13)</sup> Kikuchi 등은 선택적 저감적분법을 사용하여 전단잠금 및 무에너지모드를 함께 방지하는 방법을 제안하였다.<sup>(14)</sup>

본 연구에서는 소성가공 공정의 유한요소해석을 보다 안정화 및 체계화시키기 위해 소성변형 해석시에 발생하게 되는 요소의 불안정성에 대해 이론적으로 검토해보고 실제 소성 문제에서 요소의 종류와 수치적분 방법을 변화시켜가며 해석을 진행하여 그 결과를 비교해 봄으로써 소성가공 공정 해석시에 적합한 요소 및 이에 해당되는 수치적분 방법을 체계화시키고자 한다. 해석은 가공경화 효과를 고려한 2차원 강소성 유한요소 해석을 사용하도록 한다.<sup>(15)</sup>

## 2. 유한요소 해석에서의 수치적 불안정성

본 장에서는 수치적 불안정성중 특히 수치적분법에 관련된 요소잠금, 무에너지모드, 전단잠금에 관해 검토해 보기로 하겠다. 우선 여러가지 수치적분법에 대해 고찰해보고 이에 따르는 불안정성 및 해결 방안에 대해 알아보겠다.

### 2.1 수치적분법(Numerical Integration Schemes)

#### 2.1.1 완전 적분법(Full Integration;FI)

FI는 요소의 형상함수의 최고 차수를 정확하게 적분할 수 있는 갯수의 점에서 수치적분을 행하는 방법으로 보통 가우스 적분법(Gaussian quadrature rule)에 따른다. FI는 가장 널리 사용되는 방법으로서 수렴성 및 안정성이 좋으나 비압축성 조건 및 기하학적 구속조건이 많을 경우 요소잠금(element locking)이 발생할 가능성이 있다.

#### 2.1.2 저감적분법(Reduced Integration;RI)

RI는 FI에서 필요로 하는 적분점보다 한단계 적은, 즉 각 방향으로 1개씩 줄인 갯수의 적분점을 사용하는 방법이다. 결과적으로 FI에 비해 계산시간도 감소되고 요소가 유연해져 요소잠금을 방지할 수 있으나 구속조건이 너무 적은 이유로 문제에 따라 무에너지모드 발생 가능성이 있다.

#### 2.1.3 선택적 저감적분법(Selective Reduced Integration;SRI)

SRI는 FI와 RI를 적절히 혼용하여 사용하는 방법이다. 구속조건이 많은 부분은 RI를 사용하여 요소의 유연성을 높이고 구속조건이 적은 부분은 FI를 수행하여 정확하게 적분하여 결과적으로 전술한 2가지의 수치적분법보다 해의 정확성이 향상된다. 실제로 소성 변형의 유한요소 해석에 있어서 비압축성 조건항은 RI를, 나머지 항은 FI를 사용하는 것이 바람직하다. 또한 전단 변형이 과하게 평가되는 전단잠금을 방지하기 위해 전단 변형 항에 대해서, 선택적으로 RI를 수행해줄 수 있다.<sup>(5)</sup>

SRI는 요소잠금과 무에너지모드 모두를 방지할 수 있으며 좌표축 회전이 없는 경우에 한해 전단 잠금을 방지할 수 있다. 그러나 좌표축이 회전되었을 경우에는 이러한 선택적 저감적분법에 문제점이 발생된다.<sup>(14)</sup> 예를 들어 재료의 방향이  $\theta$ 만큼 회전된 경우에는 r-s 좌표축과 x-y 좌표축이 달라지게 되므로 전단 변형률이 다음과 같이 나타내어진다.

$$\gamma_{rs} = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (1)$$

즉  $\gamma_{rs}$ 는  $\gamma_{xy}$ 뿐만 아닌  $\epsilon_{xx}$ 와  $\epsilon_{yy}$ 의 함수로 결국 전단 변형을  $\gamma_{rs}$ 를 저감적분하는 것이 실제적으로 그러한 효과를 갖지 못하게 된다.

2.1.4 선형적 저감적분법 (Directional Reduced Integration; DRI)

DRI는 요소의 적분점을 한 방향에 대해 감소시켜 적분을 수행하는 방법이다. 즉 사각형 요소의 경우 FI는 2×2 점에서 적분을 수행하는 반면 DRI에서는 r방향으로 감소시켜 1×2점에서 하든지 아니면 s방향으로 감소시켜 2×1점에서 적분을 수행한다. 즉 한 방향에 대한 적분점을 감소시켜 그 방향에 대한 요소의 강성을 약화시킴으로써 모든 변형을 성분에 대해 동일하게 전단변형항을 저감적분하는 효과를 갖게 되어 좌표축 회전에 관계없이 전단 잠금을 완화시키며 동시에 무에너지모드도 방지해 준다.

DRI 적용시 한가지 주의할점은 과연 어느 방향으로 적분점을 감소시켜 주는가 하는 문제이다. 여기서 적분점의 감소 방향으로 구속조건이 감소되게 되므로 요소의 안정성 측면에서 생각해 볼 때 요소의 변형 행상을 고려하여 적분점의 감소 방향을 선정해 주어야 할 것이라 생각된다. 이와 관련된 구체적인 예제는 뒷장에서 다루도록 하겠다.

2.2 요소에 따른 수치적 불안정성

2.2.1 사각형 요소에서의 수치적 불안정성

4절점 사각형(Q4) 요소의 형상함수는 다음과 같이 r과 s의 일차항의 곱으로 표현된다.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + r_r)(1 + s_s) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

따라서 사각형 요소에 완전적분법(FI)을 적용하기 위해서는 r, s 방향으로 각각 2개씩 총 4개의 점에서 적분을 수행해 주어야 하나 요소잠금의 가능성이 있고 또 이러한 현상을 방지해 주기 위해 적분점을 1개로 감소시켜 저감적분법(RI)을 수행해 주면 요소가 과도하게 유연해져 자유도가 많아지기 무에너지모드가 발생할 가능성이 있다. 이러한 요소잠금과 무에너지모드 모두를 방지하기 위해 선택적 저감적분법(SRI)을 사용해 비압축성 항에 대해 적분점을 감소시킬 수 있다.

또한 사각형 요소를 사용하여 완전적분법을 수행할 때 굽힘 모드가 지배적일 경우 전단 변형에 의한 구속조건이 과도하게 작용하여 상대적으로 다른 변형 성분이 실제보다 작게 일어나는 전단잠금 현상이 일어난다. 이에 관해 살펴보면 다음과 같다.

각 절점의 r, s 방향 속도 u, v는 다음과 같이 표시

된다.

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (3)$$

(2) 식과 (3) 식을 사용하면 각 변형을 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} u_i \right) = A_0 + A_1 s \\ \epsilon_s &= \frac{\partial v}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial s} v_i \right) = A_2 + A_3 r \\ \gamma_{rs} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial s} u_i \right) = A_4 + A_5 r + A_6 s \end{aligned} \quad (4)$$

(A<sub>0</sub> ~ A<sub>6</sub>: 임의의 상수)

여기서 ε<sub>r</sub>과 ε<sub>s</sub>는 각각 s와 r만의 함수인데 비해 γ<sub>rs</sub>는 r, s의 함수이다. 즉 ε<sub>r</sub>과 ε<sub>s</sub>는 γ<sub>rs</sub>에 비해 자유도가 낮다. 그러나 γ<sub>rs</sub>를 정확하게 적분하기 위해 모든 변형을 성분에 대해 동일하게 수치적분을 수행해 준다면 ε<sub>r</sub>과 ε<sub>s</sub>는 필요 이상으로 과도하게 구속되게 된다. 이러한 현상은 특히 전단변형이 지배적인 경우에 두드러지게 나타나 상대적으로 수치변형을 ε<sub>r</sub>, ε<sub>s</sub>가 실제보다 작게 일어나는 전단잠금이 발생하게 되는 것이다. 이러한 현상은 전술한 SRI 또는 선형적 저감적분법(DRI)을 적용하여 방지될 수 있다.

2.2.2 삼각형 요소에서의 수치적 불안정성

3절점 삼각형(T3) 요소는 2차원 요소중 절점수가 가장 적은 요소로써 계산 시간이 적게 걸린다는 장점이 있으나 요소의 자유도가 낮아 비압축성 조건이나 기하학적 구속 조건이 과도하게 적용될 경우에는 요소잠금이 일어날 가능성이 높다. 따라서 T3 요소는 비압축성 조건이 전제되는 소성 변형의 해석에는 적합하지 못하다.

6절점 삼각형(T6) 요소는 2차요소로 요소잠금이 일어나지 않고 접촉처리시 선형요소와 비교 임의의 금형 형상을 보다 정확하게 묘사할 수 있다는 장점이 있는 반면 밴드폭이 커져서 상대적으로 계산시간이 오래 걸린다는 단점이 있다. T6 요소의 또 하나의 장점은 전단잠금이 일어나지 않는다는 점인데 그 이유는 다음과 같다.

앞에서와 같이 T6 요소의 형상함수를 미분해주면 변형을 성분은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= B_0 + B_1r + B_2s & (5) \\ \epsilon_s &= B_3 + B_4r + B_5s \\ \gamma_{rs} &= B_6 + B_7r + B_8s \end{aligned}$$

( $B_0 \sim B_8$ : 임의의 상수)

윗식에서 모든 변형을 성분이 r, s의 함수임을 알 수 있는데 이는 모든 변형을 성분의 자유도가 같음을 의미한다. 따라서 T6 요소의 경우에는 전단잠금이 일어나지 않는다. 다음 장에서는 예제 해석을 통해 이러한 현상을 확인해보도록 하겠다.

### 3. 요소 및 적분법에 따른 강소성 유한요소해석

본 장에서는 요소의 종류와 수치적분법을 변화시켜 가며 실제 소성가공 공정을 해석하여 그 결과를 비교하여 2차원 강소성 유한요소해석에 적합한 요소의 종류 및 수치적분법에 관해 고찰해보도록 하겠다.

#### 3.1 업셋팅 (upsetting) 해석

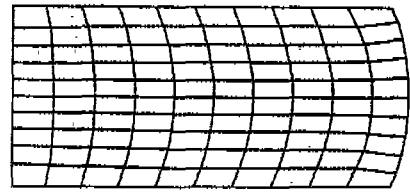
해석은 축대칭 업셋팅 문제를 40 %까지 진행하도록 한다. 마찰계수는 0.12로 가정하였고 소재의 재질은 SCr420H로 설정하였다. 유효응력과 유효변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = 510 + 863\bar{\epsilon}^{0.15} \quad (6)$$

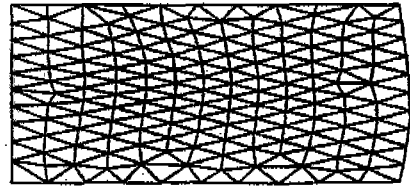
##### 3.1.1 여러가지 요소를 사용한 유한요소해석 결과

본 절에서는 앞에서 언급한 여러가지 요소들을 사용하여 동일한 문제를 해석함으로써 각 요소들의 특징을 비교해 보겠다.

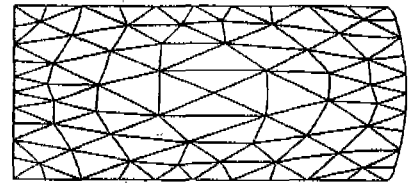
Fig. 1의 (a), (b), (c)는 각각 Q4, T3, T6 요소를 사용하였을 때의 해석 결과를 나타낸다. 여기서 Q4 요소의 경우에는 비압축성 조건항에 대하여 저감적분을 수행하였다. (b)를 보면 변형 형상이 위 아래로 대칭이 아님을 알 수 있는데 이는 T3요소의 경우 요소잠금 현상이 발생될 가능성이 높는데다 초기 격자 형상의 비대칭성도 영향을 미쳤으리라 생각된다. 따라서 비압축성 조건이 적용되는 소성 문제에서 T3요소로 해석한다는 것이 바람직하지 않음을 알 수 있다. 반면에 T6 요소를 사용한 (c)의 경우에는 변형 형상이 대칭인 점에서 볼 때 비압축성인 소성문제에서 삼각형 요소를 사용하려면 반드시 2차 이상의 요소를 사용해야 함을 알 수 있다.



(a) using Q4 element



(b) using T3 element



(c) using T6 element

Fig. 1 Deformed shape for upsetting

한편, 각 경우의 결과에 정확성을 검토해보기 위해 40% 압축시의 하중 및 벌짐량을 비교해 보았다. 이때 벌짐량은 최종 형상에서 오른쪽 상부 끝부분과 오른쪽 중앙부에 해당하는 x좌표의 편차로 나타내었다. 여기서 벌짐은 마찰에 의한 전단 변형에 의한 현상임에 착안하여 이 양을 비교함으로써 각 경우에 대한 전단변형 계산의 정확도를 비교해 보기 위함이다. Table 1에 각 경우에 해당하는 하중 및 벌짐량을 수치적으로 나타내었다.

하중의 경우 수치적인 편차는 그리 크지 않으나 (1% 내외) 그 순서를 따져보면 T6, Q4, T3의 순서로 하중이 작음을 알 수 있다. 반면에 벌짐량은 비교적 편차가

Table 1 Comparison of results for each element

Element	Load (ton)	Bulging (mm)
Q4	2648	1.211
T3	2688	0.644
T6	2641	1.292

크다. Q4 요소를 기준으로 할 때 T3 요소를 사용한 경우가 요소잠금이 발생해 벌정량이 상대적으로 작았고, T6의 경우가 컸다. 여기서 T3 요소의 경우는 요소잠금이 발생되었기 때문이고 Q4 요소에 SRI를 적용하여 해석하였을 경우 전단잠금이 일어나 실제보다 벌정량이 줄어들었음을 의미한다.

이러한 현상을 보다 깊게 고찰하기 위해 요소의 수를 증가시켜가며 벌정량을 계산해 보았다. (Table 2) Fig. 2는 요소의 수에 따른 벌정량을 그래프로 나타낸 것이다. 그래프를 보면 요소의 수가 3600개일 때도 벌정량은 완만한 기울기로 증가하려는 추세인 것을 알 수 있는데 이는 요소의 갯수가 증가해도 전단잠금은 비록 그 양은 줄어들지언정 여전히 존재한다는 점을 의미한다. 또 T6 요소의 경우(120개) 수천개의 Q4 요소의 해석 결과와 비슷하다는 점을 볼 때 전단잠금이 일어나지 않았음을 확인할 수 있었다.

Table 2 Comparison of bulging with respect to no. of element

No. of element	Bulging (mm)
100	1.211
400	1.238
900	1.253
1600	1.264
2500	1.272
3600	1.277

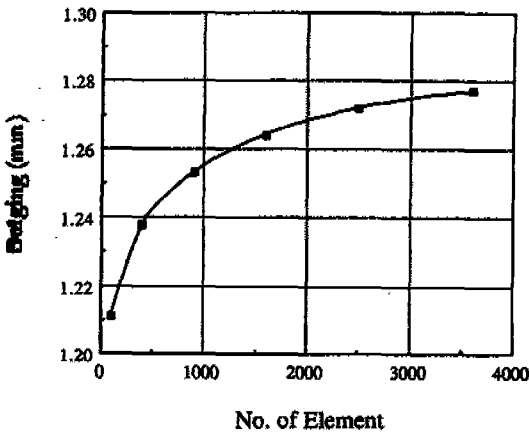


Fig. 2 Magnitude of bulging with respect to no. of element

### 3.1.2 선형적 저감 적분법을 사용한 해석

본 절에서는 앞장에서 언급한 선형적 저감 적분법을 사용하여 전단잠금에 관한 결과를 비교해 보겠다. 여기서는 적분점 감소 방향의 영향을 살펴보기 위해 각각 r, s 방향으로 적분점을 감소해서 해석해 보았다. (Fig. 3) r방향으로 적분점을 감소했을 때는 오른쪽 끝부분에서 약간의 무에너지 모드가 발생했고 반면에 s방향으로 감소했을 때는 발생하지 않았다. 이러한 결과로부터 요소의 짧은 쪽의 적분점을 감소시켜야 함을 알 수 있다.

이때 무에너지모드가 일어나지 않은 s방향의 DRI 수행시는 벌정량이 1.255 mm 로 Fig. 2의 그래프를 보면 SRI를 수행했을 경우 약 1000개의 요소를 사용했을 경우에 해당하는데 이것은 DRI에 의한 전단잠금 완화가 SRI로는 1000개 요소의 수준으로 전단 오차를 줄여 줌을 의미한다. 한편 r방향으로의 적분점 감소시에는 벌정량은 1.277 mm이나 이는 무에너지모드가 발생한 사실을 볼 때 구속조건이 부족하기 때문으로 생각된다.

그러나 업셋팅 문제에서는 모든 요소가 같은 방향, 즉 r 방향으로 늘어나고 s 방향으로 줄어드는 경향을 보여 일괄적으로 s 방향으로 적분점을 감소시켜 주었지만 대부분의 경우 위치에 따라 요소들의 변형 방향이 달라지게 된다. 다음 절에서는 이러한 점을 살펴보기 위해 여러 방향으로 변형이 일어나는 후방압출을 해석해 보겠다.

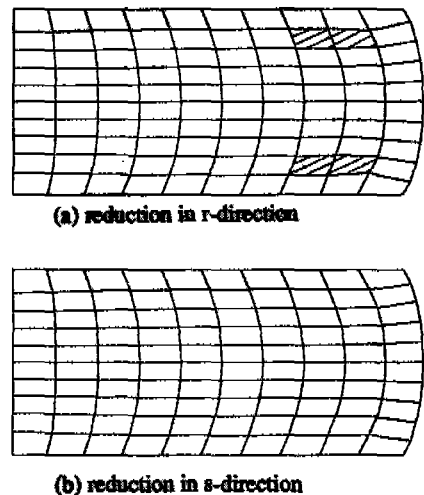


Fig. 3 Deformed shape using DRI

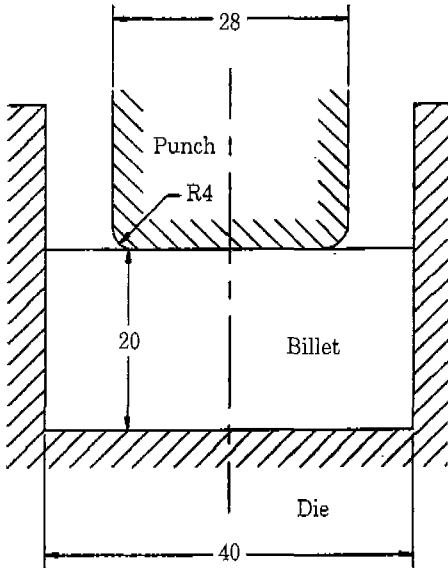


Fig. 4 Schematic diagram of backward extrusion

### 3.2 후방압출 (backward extrusion) 해석

후방압출은 크게 두 방향으로의 변형이 일어난다. 또한 펀치의 코너부위에서 전단변형이 커지게 되므로 전단잠금이 발생할 가능성이 높다. 본 절에서는 이러한 관점에서 DRI의 적분 감소 방향 및 요소의 종류를 변화시켜가며 해석하여 그 결과를 비교해 보도록 하겠다. 소재의 재질 및 마찰계수는 업셋팅 해석시와 동일하게 가정하였고 해석은 20% 까지 진행하도록 하겠다. Fig. 4에 초기상태에서의 소재, 펀치 및 다이의 구조를 나타내었다.

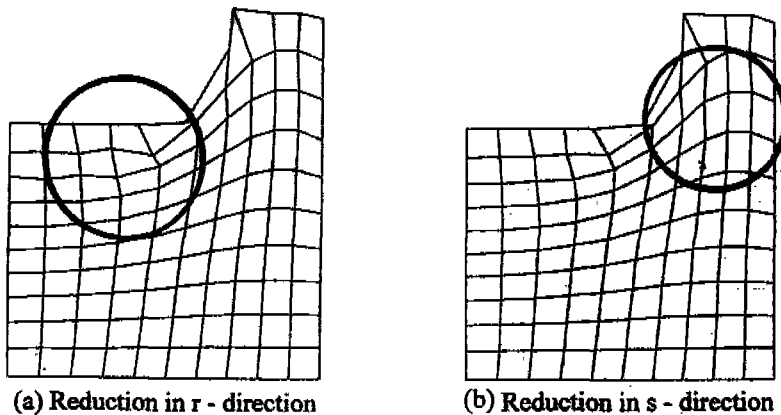


Fig. 5 Deformed shape for backward extrusion

#### 3.2.1 DRI에서 적분점 감소방향을 변화시켰을 때의 결과

앞에서 언급한 요소의 변형에 따른 적분점 감소방향의 영향을 고찰하기 위해 각각 r, s 방향으로 적분점을 감소시켜 해석하여 Fig. 5의 (a), (b)에 각각의 변형 형상을 나타내었다. (a)를 보면 펀치 아랫부분, 즉 r 방향으로 늘어난 요소들간에 무에너지모드가 발생되었고 반면에 (b)의 경우는 s 방향으로 늘어난 요소들간에 무에너지모드가 발생되었음을 알 수 있다. 즉 요소가 길어지는 방향으로 적분점을 감소하게 되면 그 방향으로의 구속력이 약해져 무에너지모드가 발생하게 된다.

이러한 점을 감안하여 본 논문에서는 요소의 변형 방향에 따라 적분점의 감소 방향을 정해주는 적응성 선형적분점법 (adaptive DRI)을 제안하였다. 이것은 초기 상태에서는 펀치의 이동 방향으로 요소가 줄어들다는 가정하에 펀치의 이동방향으로 적분점을 감소시켜 계산하고 이후로는 매 단계마다 전단계의 r, s 방향으로의 변형율의 크기를 비교하여 변형율이 작은 쪽으로 적분점을 감소시키는 방법이다. Fig. 6(a)에 이러한 과정을 도식화하여 나타내었고 Fig. 6(b)에 이러한 과정을 거쳐 해석한 변형 형상을 나타내었다. (b)를 보면 어느 부분에도 무에너지모드가 발생되지 않아 결과적으로 적응성 DRI가 요소의 변형에 알맞게 적분점을 감소시켜 준다고 판단된다.

#### 3.2.2 여러가지 요소를 사용한 해석 결과

그러면 이러한 적응성 DRI로 해석한 결과의 정확성 여부와 해석의 효율성을 검토해 보기 위해 여러가지 요

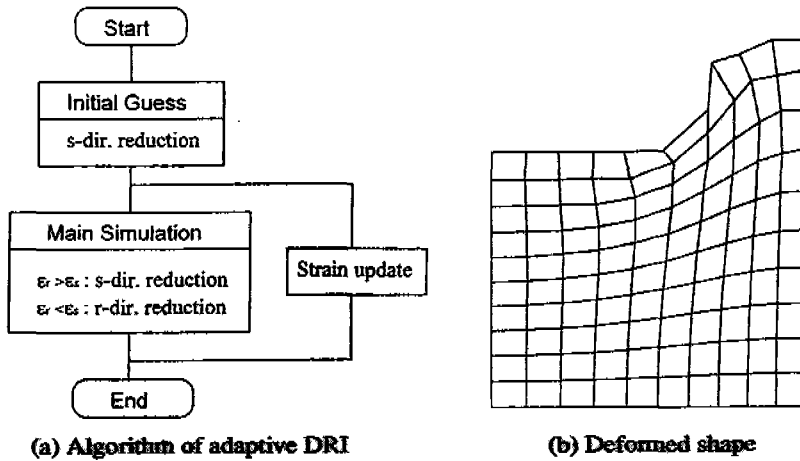


Fig. 6 Deformed shape using adaptive DRI

소를 사용하여 해석한 결과와 비교해 보겠다. 해석은 Q4 요소에 대해 각각 SRI와 적응성 DRI를 적용하였고 T6 요소를 사용한 경우에 대해 수행하였다.

Fig. 7부터 Fig. 9까지는 각각의 경우에 대해 변형 형상 및 전단변형율의 분포를 나타낸 것이다. 여기서 SRI는 비압축성 조건에 대해서만 RI를 수행하였다. 각 경우의 전단변형율의 분포를 비교해 보면 편치의 코너 근처에서 전단 변형율이 크게 나타났고 특히 Q4 요소에 SRI를 수행한 경우에 다른 경우보다 크음을 알 수 있는데 이는 전단잠금이 발생되었음을 의미한다. 반면에 적응성 DRI를 수행했을 때는 전단잠금이 일어나지 않는

T6 요소의 해석 결과와 비슷하여 역시 전단잠금이 방지됨을 알 수 있다.

또한 각 경우의 계산의 효율성을 비교해 보기 위해 해석 시간, 수렴성, 요소퇴화 현상 등을 비교해 보았다. 해석 시간은 매 20단계 (20%)까지의 시간을 비교하였고 수렴성은 그때까지의 축차(iteration) 횟수로 판단하였다. 여기서 매 단계에서 속도 norm이 일정치 (0.00001) 이하로 감소할 때까지 축차를 계속하였다. 또한 요소 퇴화 현상은 요소 강성 행렬의 Jacobian 값이 음수가 되어 더이상 해석이 불가능할 때까지의 해석 단계(step)수로 판단하였다. Table 3에 이들 값을 중

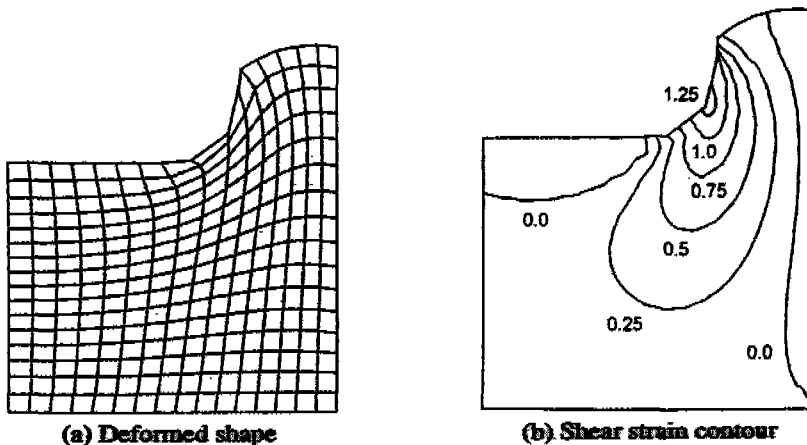


Fig. 7 Deformed shape and contour for Q4 element(SRI)

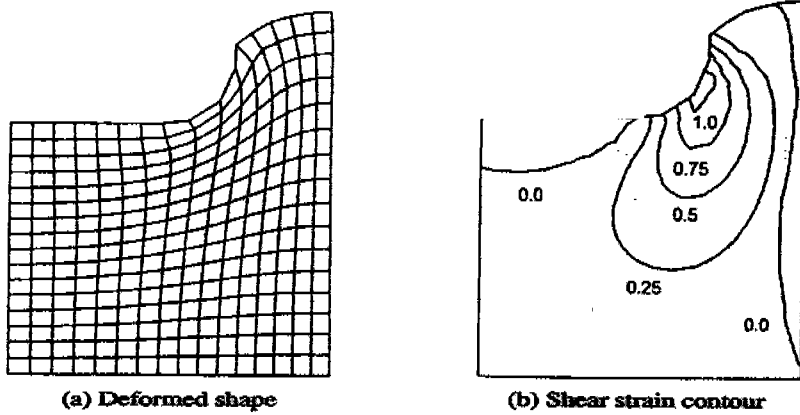


Fig. 8 Deformed shape and contour for Q4 element(adaptive DRI)

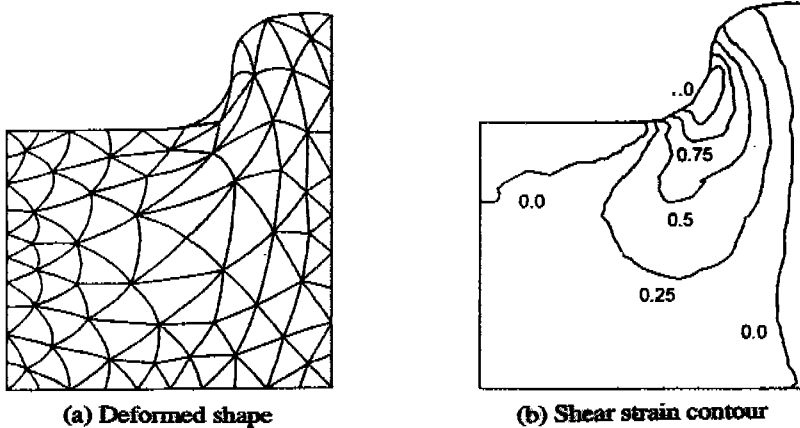


Fig. 9 Deformed shape and contour for T6 element

합하여 나타내었다. 결과적으로 볼 때 Q4 요소에 적응성 DRI를 적용했을 때의 결과가 모든 면에서 가장 바람직함을 알 수 있다. 한편 T6 요소를 사용한 경우는 Q4 요소에 SRI를 적용한 경우에 비해 수렴성은 좋으나

밴드폭이 커져 해석 시간은 길어졌음을 알 수 있다. 또한 전단잠금이 발생하는 Q4 요소에 SRI를 적용한 경우는 다른 경우보다 요소퇴화 현상이 심하게 일어났는데 요소퇴화 역시 전단변형의 영향을 받음을 감안할때 전단잠금이 요소퇴화에도 좋지 않은 영향을 미침을 알 수 있다.

Table 3 Analysis condition and performance

Type of Element	Q4 (SRI)	Q4 (DRI)	T6
No. of Node	289	289	281
No. of Element	256	256	120
Half Bandwidth	26	26	120
Time (sec)	2120	380	2689
Total iteration no.	690	141	297
Degeneration	32	49	35

#### 4. 결 론

본 연구에서는 2차원 강소성 유한요소해석에서의 안정성 및 효율성을 향상시키기 위해 주로 요소의 불안정성에 관한 측면에서 연구를 수행하였다. 본 연구에서 얻어진 결과를 종합해보면 다음과 같다.



(1) 유한요소해석시 발생하는 요소잠금, 무에너지 모드, 전단잠금 등의 수치적 불안정성에 관해 검토하고 실제 예제를 통해 확인하였으며 여러가지 수치적분법을 적용하여 해결 방안을 제시하였다.

(2) 실제 소성 변형 문제에서 여러가지 요소의 종류와 수치적분법을 변화시켜가며 강소성 유한요소해석을 수행한 뒤 해석 결과를 여러 각도에서 비교하였다.

(3) 요소의 변형 형상에 따라 적응성있게 적분점을 감소시키는 수치적분법을 제안하였고 이를 통해 강소성 유한요소해석 결과의 안정성 및 계산의 효율성을 향상시킬 수 있었다.

본 논문에서 수행한 여러가지 요소 및 수치적분법에 대한 해석 결과들을 비교하여 2차원 강소성 유한요소해석에 대해 체계화시킬 수 있었으며 차후에는 이를 토대로 보다 정확하고 효율적인 해석이 이루어질 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

1. J. C. Nagtegaal, D. M. Parks and J. R. Rice, "On Numerically Accurate Finite Element Solution in the Fully Plastic Range", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 4, pp.153-178, 1974.
2. J. H. Argyris, P. C. Dunne, T. Angelopoulos and B. Bichat, "Large Natural Strain and Some Special Difficulties due to Nonlinearity and Incompressibility in Finite Elements", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 4, pp.219-278, 1974
3. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, S. Nakazawa, "The Patch Test for Mixed Formulation", *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol.23, pp.1873-1883, 1986.
4. O. C. Zienkiewicz, Y. C. Liu, G. C. Haung, "Error Estimates and Convergence Rates for Various Incompressible Elements", *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol.28, pp.2191-2202, 1989
5. D. S. Malkus and T. J. R. Hughes, "Mixed Finite Element Methods-Reduced

- and Selective Integration Techniques:A Unification of Concepts", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol.15, No.1, pp.68-81, 1978
6. T. J. R. Hughes, "Equivalence of Finite Elements for Nearly Incompressible Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.44, pp.181-183, 1977.
7. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol.8, pp.443-460, 1974.
8. S. T. Pawsey and R. W. Clough, "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements", *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol.3, pp.565-586, 1971.
9. T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, and W. Kanoknukulchai, "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending", *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol.11, pp.1529-1543, 1977.
10. T. Belytschko, J. S. Ong, W. K. Liu and J. D. Kennedy, "Hourglass control in linear and nonlinear problems", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* Vol.43, pp.251-276, 1984.
11. O. P. Jacquotte and J. T. Oden, "Analysis of hourglass instabilities and control in underintegrated finite element methods", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* Vol.44, pp.339-363, 1984.
12. O. P. Jacquotte, "Stability, accuracy and efficiency of some underintegrated methods in finite element computations", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* Vol.50, pp.275-293, 1985.
13. O. P. Jacquotte, J. T. Oden and E. B. Becker, "Numerical control of the hourglass instability", *Int. J. Numer. Meths. Engng.* Vol.22, pp.219-228, 1986.
14. B. C. Koh, and N. Kikuchi, "New improved

- hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity", *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol.65, pp.1-46, 1987.
15. Y.J. Kim and D.Y. Yang, "A formulation for rigid-plastic finite element method considering work-hardening effect", *Int. J. Mech. Sci.* Vol.27, pp.487-495, 1985.
16. 박 근, 양 동열, "2차원 강소성 유한요소해석에서의 안정성 및 효율성 향상에 관한 연구", 한국정밀공학회 '94년도 추계학술대회 논문집, pp.195-199, 1994.