

完全導體 스트립 回折格子에 의한 E-分極 反射係數의 急速한 收斂解

(The Fast Convergent Solution of E-Polarized Reflection
Coefficient by a Perfect Conductor Strip Grating)

尹 義 重*

(Uei-Joong Yoon*)

要 約

完全導體 스트립 回折格子에 의한 E-分極 散亂問題를 모멘트法을 이용하여 解析하였다. E-分極의 경우는 誘導되는 表面電流密度가 모서리 양 끝에서 매우 높을 것으로 豫測된다. 이때 스트립에 誘導되는 表面電流密度는 次數가 0인 Ultraspherical 多項式의 級數와 적절한 모서리 境界條件을 滿足하는 함수의 곱의 級數로 展開하였다. 電流密度와 反射係數에 대한 數值結果를 기존의 다른 函數들과 比較하였다. 본 논문의 수치결과가 기존의 다른 函數를 사용했을 때 보다 幾何光學的 反射係數의 收斂度가 매우 빠르게 向上됨을 보였다. 幾何光學的 反射係數에서의 急變點 위치는 入射角, 스트립 폭 및 스트립 週期를 변화시킴으로써 移動시킬 수 있었다.

Abstract

The E-polarized scattering problems by a perfect conductor strip grating are analyzed by the method of moments. For an E-polarization the induced surface current density is expected to blow up at the strip both edges. Then the induced surface current density on the strip is expanded in a series of multiplication of Ultraspherical polynomials with zeroth order and functions with appropriate edge boundary condition. The numerical results for current density and reflection coefficient are compared with other functions, it is shown that numerical results better improves the convergence of the moment method solutions with general incident angles than the existing several other functions. The sharp variation points in the magnitude of geometric-optical reflection coefficient can be moved by varying the incident angle, strip width, and strip spacing.

* 京畿專門大學 電子通信科 助教授(Dept. of Electronic Communication, Kyungki Jr. College)

I. 序 論

넓은 意味로 電磁波 散亂問題는 한 지점에서 다른 지점으로 情報 또는 에너지를 電磁波라는 매개 手段을 利用하여 運搬하는 것으로 이러한 情報 또는 에너지를 담은 入射波가 運搬 經路上에 놓인 媒質 分布에 따라 直進, 反射, 屈折 및 回折하면서 발생하는 여러 가지 현상을 취급한다[1]-[2].

散亂體(scatterer) 또는 周波數 選擇表面(FSS, frequency selective surface)의 格子構造는 일정한 간격마다 리액턴스 素子の 역할을 하는 不連續部를 裝荷한 것으로 공통적인 특징은 通過帶(pass band) 및 阻止帶(stop band)를 가진다. 또한 어떤 마이크로 周波數帶에서는 入射波가 거의 減衰됨이 없이 反射되지만 어떤 周波數帶에서는 극히 큰 減衰를 받고 反射되지 못하는 特徵을 가지며, 이러한 부분적인 勢力減衰(急變點)는 스트립의 相互結合(mutual coupling)에 의한 現象으로 알려져 있다.

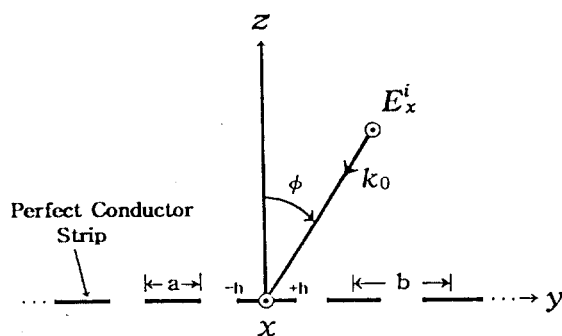
電波氣의인 모든 현상을 決算한 Maxwell 方程式에 기초하여 여러 가지 數學的인 解를 誘導할 수 있으나, 모서리 부근에서와 같이 構造的인 特異性(singularity)을 갖는 영역에서는 지금까지 인정해 왔던 Maxwell 方程式만으로는 해결되지 않는다. 따라서 이러한 형태의 구조에서는 모서리 境界條件(edge boundary condition)과 맥스웰 方程式을 동시에 滿足해야 唯一한 解(uniqueness of solution)를 구할 수 있다[1].

이에 本 論文에서는 3차원 좌표계에서 電磁波의 量이 한 방향으로는 변화가 없다는 가정하에서 2차원 電磁波 문제에 대해 고찰하고자 하며, 이러한 구조에 대해서는 많은 연구가 있어 왔다[3]-[12]. 무한한 길이와 미소두께를 가지는 주기적인 도체띠에 E-분극波(E-polarized plane wave)가 비스듬히 入射될 때 스트립에 誘導되는 電流密度의 分布와 幾何光學的 反射係數(geometric-optical reflection coefficient)를 구함에 있어 모멘트法(method of moments)[13]을 이용하여 數值計算을 행한다. 모멘트 法을 이용하여 구하고자 하는 解(solution)를 계산하는데 重要한 關鍵이 되는 것이 基底函數

(basis functions)를 어떠한 函數로 選擇하느냐에 따라서 解의 正確度 및 收斂度가 달라진다. 따라서 性能이 좋은 基底函數의 選定이 解의 正確度와 直結되고 數值計算時 매트릭스의 크기를 작게 할 수 있으며 그에 따른 收斂速度도 改善되므로 빠른 收斂問題에 대해 研究者들이 많은 關心을 가진다. 스트립은 完全導體띠이며, E-분극(polarization)의 경우 모서리 양끝에서 매우 높은 誘導電流가 豫測되므로 電流密度는 이런 特性을 갖는 函數와 차수가 0인 Ultraspherical(Gegenbauer) 多項式[14]의 곱의 級數로 展開하여 수치계산을 행한다. 그리고 時間函數는 $e^{j\omega t}$ 로 假定하며 앞으로 모든 식에서 省略하기로 한다.

II. 問題의 構造解析

問題의 構造는 [그림 1]과 같이 完全導體의 스트립 띠가 週期的으로 배열되어 있는 경우를 취급한다. 이러한 스트립 띠는 $x-y$ 平面上에 있으며, 各各의 스트립 띠가 配列되어 있는 位置는 y 축과 一致하



[그림 1] 스트립 格子構造에 비스듬히 入射하는 E-분극平面波

[Fig. 1] E-polarized plane wave with oblique incidence on a perfect conductor strip grating

고, 스트립의 폭 $a=2h$ 이며, h 는 스트립 폭의 반 즉, $a/2$ 이다. 그리고 b 는 스트립과 스트립 사이의 週期, ϕ 는 入射角을 表示하며 時間函數를 포함한 E-분극

平面波가 비스듬히 入射된다. 이때 한 방향으로는 전계의 벡터 성분이 변화가 없다는 가정하에서 入射되는 電界(electric field)의 세기는 다음과 같다.

$$\vec{E}^i = \hat{x}E_0 e^{jk_0 y \sin\phi} e^{jk_0 z \cos\phi} \quad (1)$$

그리고 스트립의 表面에서는 $z=0$ 이므로 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{E}^i = \hat{x}E_0 e^{jk_0 y \sin\phi}, z=0 \quad (2)$$

식(1)과 식(2)에서 $k_0 = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 는 매질의 傳播常數(propagation constant)이며, μ 와 ϵ 은 매질의 투자율 및 유전율이다. 그리고 週期的인 格子構造에서 각 n 에 대해 Floquet 모드(mode)라고 불리우는 空間 高調波의 位相定數로 전개하여 散亂電界(scattered field) \vec{E}^s 를 나타내면 다음과 같다[9].

$$\vec{E}^s = \hat{x}E_0 e^{jk_0 y \sin\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{(-\gamma_n |z|)} e^{j2n\pi y/b} \quad (3)$$

$$\vec{H}^s = -\hat{y} \frac{E_0 \text{sgn}(z)}{j\omega\mu} e^{jk_0 y \sin\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{(-\gamma_n |z|)} e^{j2n\pi y/b} \quad (4)$$

$$\gamma_n^2 = (k_0 \sin\phi + 2n\pi/b)^2 - k_0^2 \quad (5)$$

여기서 $z < 0$ 에서는 $\text{sgn}(z) = -1$ 이며, $z > 0$ 에서는 $\text{sgn}(z) = 1$ 이다. 그리고 a_n 은 未知의 係數이며 식(3)과 Maxwell 方程式($\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$)을 이용하여 y 축 方向의 磁界成分인 식(4)를 구한다. 이때 E-分極의 경우는 모서리 양끝에서 매우 높은 電流가 豫測되므로 電流密度는 이러한 形態를 包含한 函數와 次數가 0인 Ultraspherical 多項式의 곱의 級數로 展開하여 電流密度 $J_x(y)$ 을 나타내어 表示하면 다음과 같다.

$$J_x(y) = e^{jk_0 y \sin\phi} \sum_{l=0}^{\infty} b_l \left[\frac{2}{\pi} \frac{C_l^{(0)}(y/h)}{\sqrt{1-(y/h)^2}} \right], -h \leq y \leq h \quad (6)$$

식(6)에서 b_l 은 未知의 係數이며, $C_l^{(0)}(y/h)$ 는

차수 0인 Ultraspherical 多項式을 의미하며, 이를 사용한 이유는 기존의 지수함수를 사용한 경우는 $-\infty$ 에서 ∞ 까지의 매트릭스의 크기를 가지나, 차수 0인 Ultraspherical 多項式을 사용한 경우는 0에서 ∞ 까지의 매트릭스의 크기를 가지므로 本 論文의 경우가 반 정도의 매트릭스의 크기만 가지므로도 문제의 구조에 대한 解를 구할 수 있으며, 또한 다음에 나올 식(10)이 closed form으로 구해질 수 있기 때문이다. 그리고 磁界의 接線成分에 대해 境界條件을 適用하면 식(4)와 식(6)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n e^{j2n\pi y/b} = \begin{cases} -j0.5k_0\eta_0 \sum_{l=0}^{\infty} b_l \left[\frac{2}{\pi} \frac{C_l^{(0)}(y/h)}{\sqrt{1-(y/h)^2}} \right], & -h \leq y \leq h \\ 0, & \text{그외에서} \end{cases} \quad (7)$$

그리고 식(7)의 양변에 $e^{-j2n\pi y/b}$ 를 곱하고, $-b/2 \leq y \leq b/2$ 범위에서 積分을 행하면 다음과 같다 [15].

$$a_0 = \frac{-\eta_0 b_0 a}{2bE_0 \cos\phi} \quad (8)$$

$$a_n = \frac{-jk_0\eta_0}{2b\gamma_n E_0} \sum_{l=0}^{\infty} b_l F_{ln} \quad (9)$$

식(9)에서 F_{ln} 은 다음과 같다.

$$F_{ln} = \frac{2}{\pi} \int_{-h}^h \frac{C_l^{(0)}(y/h)}{\sqrt{1-(y/h)^2}} e^{-j2n\pi y/b} dy \quad (10)$$

그리고 完全導體의 스트립 表面에서 接線成分의 全體電界를 表示하면 다음과 같다[9]-[11].

$$\vec{E}_x^t = \vec{E}_x^i + \vec{E}_x^s \quad (11)$$

식(11)에서 윗 첨자 t 가 붙은 것은 스트립 表面에서의 全體電界, i 는 入射, s 는 散亂을 意味하며, 식(11)에서 完全導體의 경우이므로 入射電界와 散亂電界는 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{E}_x^s = -\bar{E}_x^i \quad (12)$$

完全導體의 境界條件(boundary condition)인 식(12)를 滿足해야 하므로 식(1)과 식(3)을 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2n\pi y/b} = -1, \quad -h \leq y \leq h \quad (13)$$

식(13)의 兩邊에 $\frac{2}{\pi} \frac{C_i^{(0)}(y/h)}{\sqrt{1-(y/h)^2}}$ 를 곱하

고

$-h \leq y \leq h$ 의 범위에서 積分을 행하면 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n F_{in}^* = \begin{cases} -a, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

식(14)에서 “*”는 공액복소수(complex conjugate)를 의미하며, F_{in} 은 식(10)에서 定義하였다. 그리고 식(14)에서의 a_n 을 식(8)과 식(9)의 a_n 으로 대치하면 다음과 같은 線形方程式(linear equation)이 된다.

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i Z_{ii} = V_i, \quad i=0, 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

식(15)에서 임피던스 정방형 매트릭스 Z_{ii} 은 다음과 같다.

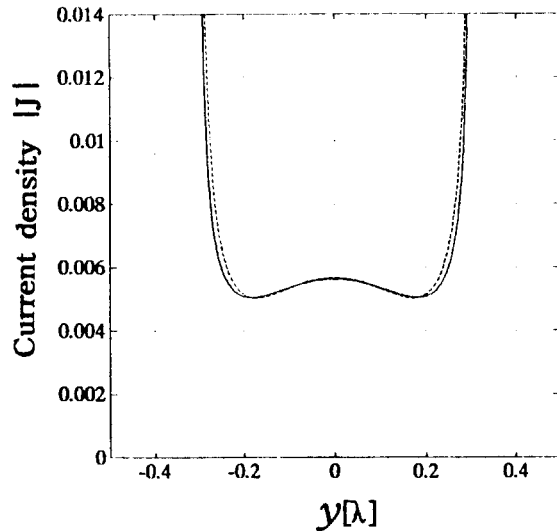
$$Z_{ii} = \frac{jk_0 \eta_0}{2ab} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_{in}^* F_{in}}{\gamma_n} \quad (16)$$

그리고 식(15)에서 電界벡터는 $V_0 = E_0$ 를 除外하고는 $V_i=0$ 이며, $n=0$ 인 幾何光學的 反射係數 Γ_0 는 식(8)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\Gamma_0 = \frac{-\eta_0 b_0 a}{2bE_0 \cos\phi} \quad (17)$$

III. 計算結果 및 檢討

문제의 구조 [그림 1]에 대한 수치계산을 위해서는 우선 식(10)의 매트릭스를 계산해야 하며, 이를 식(16)에 대입하여 임피던스 정방행렬을 구한 후 식(15)에 대입하여 b_i 을 구하고, 그 결과를 식(6)에 대입하여 중앙에 있는 스트립에 유도되는 전류밀도 $J_x(y)$ 와 식(17)에 대입하여 $n=0$ 인 幾何光學的 反射係數를 구한다. 이때 수치계산시 入射電界의 진폭 $E_0=1$ 로 하였으며, 편리상 $J_x(y)$ 를 J 로 표시하였다.



[그림 2] 垂直入射時 電流密度的 크기, |J|
 $(h=0.3[\lambda], a=2h, b=1.2a, 1.3a$ 및 $1.4a)$
 [Fig. 2] The magnitude of current density, |J| for normal incidence
 $(h=0.3[\lambda], a=2h, b=1.2a, 1.3a$ and $1.4a)$

[그림 2]는 수직입사시 중앙에 있는 스트립에 유도되는 電流密度를 계산한 결과로서 $h=0.3[\lambda]$, $a=2h$ 일 때 실선은 주기 $b=1.2a$, 일점쇄선은 $b=1.3a$ 및 점선은 $b=1.4a$ 인 경우에 대해 전류밀도를 계산한 결과로서 모서리 양 끝에서 매우 높은 전류가 유도됨을 알 수 있으며, 수직입사과의 경우이므로 좌우 대칭이며, 수치계산의 타당성이 입증된다.

3가지 함수에 대해 幾何光學的 反射係數의 收斂

도를 비교하였다. 각각의 基底函數는 식(6)의 전류 밀도를 급수의 형태로 전개가 되는데 이때 基底函數는 다음과 같은 3가지 함수로 하였다.

(a) 지수함수를 적용한 경우는 다음과 같다[4].

$$J_x(y) = e^{jk_0 y \sin\phi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l e^{jl\pi y/h}, \quad -h \leq y \leq h \quad (19)$$

(b) 차수 $\alpha=0.5$ 인 Ultraspherical 다항식을 적용한 경우는 다음과 같다[14].

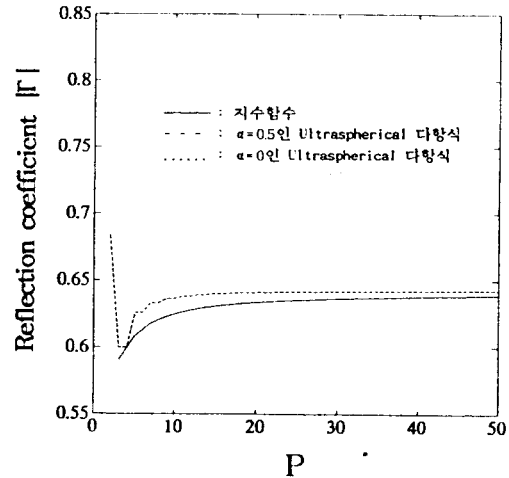
$$J_x(y) = e^{jk_0 y \sin\phi} \sum_{l=0}^{\infty} b_l C_l^{(\alpha)}(y/h), \quad -h \leq y \leq h \quad (20)$$

(c) 모서리에서 높은 전류밀도를 얻기 위한 차수 $\alpha=0$ 인 Ultraspherical 다항식을 적용한 본 논문의 경우는 식(6)이다[14].

수치계산시 정방형 매트릭스의 크기는 식(16)에서 결정되는데 이론적으로 매트릭스의 크기는 무한대이나 수치계산시 어느 정도로 한정(truncation operator)시켜야 한다. 또한 식(19)과 식(20)을 이용하여 II장과 동일한 과정으로 계산하면 스트립에 유도되는 電流密度 및 反射係數를 구할 수 있다. 또한 식(16)의 좌변에서 임피던스 정방형 매트릭스의 크기를 $P \times P$ 라고 할 때 식(19)의 지수함수를 적용한 경우는 $P=2 \times M+1$ 이나 Ultraspherical 다항식을 적용한 식(6)과 식(20)의 경우는 $P=M+1$ 의 매트릭스의 크기를 가진다. [그림 3]에서 횡축은 식(16)의 정방형 매트릭스의 행수 P 이며, $n=2 \times N+1$ 인 매트릭스의 크기를 가질 때 $N=200$ 으로 하여 수치계산을 하였다.

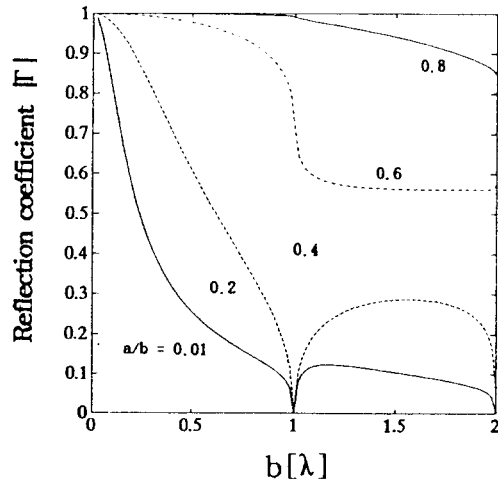
[그림 3]는 垂直으로 入射한 경우 3가지 基底函數에 대해 정방형 매트릭스의 행수 P 에 따른 幾何光學的 反射係數의 收斂曲線을 나타낸 것으로 이때 $h=0.5[\lambda]$, $a=2h$, $b=1.5a$ 인 경우로 수치계산한 결과로서 실선은 基底函數를 지수함수로 적용한 경우이며, 일점쇄선은 차수가 0.5인 Ultraspherical 多項式, 점선은 本 論文에서 제안한 차수가 0인 Ultraspherical 多項式을 적용한 경우로 점선의 경우가 다른 基底函數를 사용했을 때 보다 매트릭스의 크기가 작아도 빠르게 수렴함을 알 수 있다. 따라서 빠른 수렴문제를 취급하기 위해서는 적절한 基底函

數의 선정이 그 무엇보다도 重要하다고 할 수 있다.



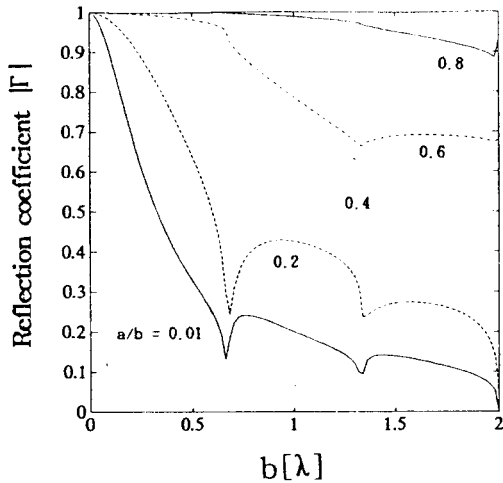
[그림 3] 수직입사시 정방형 매트릭스의 행수 P 에 따른 反射係數의 收斂曲線
($h=0.5[\lambda]$, $a=2h$, $b=1.5a$)

[Fig. 3] The convergent curve of reflection coefficient vs. column numbers P of square matrix for normal incidence
($h=0.5[\lambda]$, $a=2h$, $b=1.5a$)



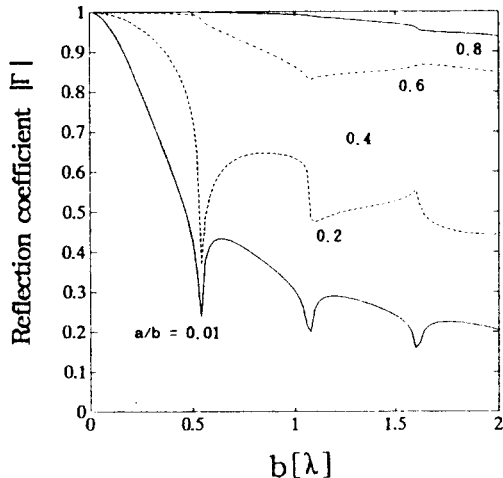
[그림 4] 수직입사시 반사계수
($a/b=0.01, 0.2, 0.4, 0.6$, 및 0.8)

[Fig. 4] The reflection coefficient of the normal incidence
($a/b=0.01, 0.2, 0.4, 0.6$, and 0.8)



[그림 5] 입사각 30도에서의 반사계수
($a/b=0.01, 0.2, 0.4, 0.6,$ 및 0.8)

[Fig. 5] The reflection coefficient of incident angle 30°
($a/b=0.01, 0.2, 0.4, 0.6,$ and 0.8)



[그림 6] 입사각 60도에서의 반사계수
($a/b=0.01, 0.2, 0.4, 0.6,$ 및 0.8)

[Fig. 5] The reflection coefficient of incident angle 60°
($a/b=0.01, 0.2, 0.4, 0.6,$ and 0.8)

[그림 4]는 수직 입사시 a/b 의 비가 0.01, 0.2, 0.4, 0.6 및 0.8일 때 스트립 주기 b 를 0에서 2波長까지 변화시켰을 때의 幾何光學的 反射係數이다. a/b 의 비가 작다는 의미는 큰 경우보다 스트립 폭이 상대적으로 작다는 결과가 되므로 전체적인 반사계수가 작게 나타남을 알 수 있다. 따라서 a/b 의 비가 0.01의 경우가 다른 경우보다 반사계수의 크기가 제일 작으므로 수치계산의 타당성이 입증되며, 반사계수의 急變點(sharp variation points)은 $b=1[\lambda]$ 일 때 발생하였다. 그리고 [그림 5]는 입사각이 30도인 경우로서 반사계수의 急變點은 $b=0.67[\lambda]$ 및 $1.34[\lambda]$ 부근에서 발생하였으며, [그림 6]은 입사각이 60도인 경우로서 반사계수의 急變點은 $b=0.54[\lambda]$, $1.07[\lambda]$ 및 $1.6[\lambda]$ 부근에서 발생함을 알 수 있다.

IV. 結 論

無限한 길이와 微小두께를 가지는 完全導體의 週期的인 스트립 회折格子에서의 電磁波散亂 문제를 취급함에 있어 E-分極平面波가 스트립 가장자리에 나란하게 入射하는 경우에 대해 고찰하였다. E-分極의 경우는 모서리 양끝에서 매우 높은 誘導電流가 예측되므로 電流密度는 이러한 형태의 함수와 次數가 0인 Ultraspherical 多項式의 곱의 級數로 전개하여 관심이 되는 電流密度와 反射係數를 구했다. 이때 모서리 境界條件을 포함하지 않은 기존의 몇가지 다른 基底函數를 適用했을 때 보다 解를 구함에 있어 훨씬 적은 매트릭스의 크기가 소요되므로 그만큼 빠른 收斂速度를 가진다. 그리고 幾何光學的 反射係數가 세력이 급격히 감쇠하는 急變點이 주기적으로 발생하는 것을 알 수 있는데 이러한 현상은 스트립 사이의 相互結合(mutual coupling)에 의한 현상으로 알려져 있으며, 이러한 急變點은 入射角, 스트립 幅 및 週期를 變化시킴으로써 急變點의 위치를 이동시킬 수 있었다. 다음 기회에 急變點에 영향을 미치는 高次모드(higher mode)의 反射係數에 대해 發表하고자 한다.

參 考 文 獻

- [1] R.Mittra and S.W.Lee, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Wave*, Macmillan Co., N.Y., 1971.
- [2] T.Itoh, *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Wave Passive Structure*, John Wiley & Sons, pp.133-213, 1988.
- [3] R.I.Primich, "Some Electromagnetic Transmission and Reflect Properties of a Strip Grating", *IEEE Trans. Antenna and Propagat.*, vol.AP-5, pp.176-182, April, 1957.
- [4] J.H.Richmond, "On the Edge Mode in the Theory of TM Scattering by a Strip or Strip Grating" *IEEE Trans. and propagat.*, vol.AP-28, pp.883-887, Nov., 1980.
- [5] R.Mittra, R.C.Hall and C.H.Tsao, "Spectral Domain Analysis of Circular Patch Frequency Selective Surfaces", *IEEE Trans. Antenna and Propagat.*, vol.AP-32, no.5, pp.533-536, May, 1984.
- [6] M.Ando and K.Takei, "Reflection and Transmission Coefficient of a Thin Strip Grating for Antenna Application", *IEEE Trans. Antenna and Propagat.*, vol.AP-35, No.4, pp.367-371, April, 1987.
- [7] R.L.Haupt and V.V.Liepa, "Synthesis of Tapered Resistive Strips", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-35, pp. 1217-1225, Nov., 1987.
- [8] R.C.Hall, R.Mittra, and K.M.Mitzner, "Analysis of Multilayered Periodic Structure Using Generalized Scattering Matrix Theory", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol.AP-36, pp.511-517, Apr., 1988.
- [9] 尹義重, 梁承仁, "스트립 회折格子에 의한 E-분極散亂", 大韓電子工學會, 秋季綜合學術大會 論文集, 第15卷 第2集, pp.99-102, 1992年 11月.
- [10] 尹義重, 梁承仁, "抵抗板 스트립 회折格子에 의한 E-분極散亂", 大韓電子工學會 論文誌, 第30卷 A편 第4集, pp.20-27, 1993年 4月.
- [11] 尹義重, 梁承仁, "抵抗띠의 양 끝에서 0으로變하는 抵抗率을 갖는 週期格子에 의한 E-분極 反射係數", 韓國通信學會 論文誌, 第19卷 第2號, pp.331-337, 1994年 2月.
- [12] 尹義重, 梁承仁, "抵抗띠의 양 끝에서 無限大 抵抗率을 갖는 格子構造에 의한 E-분極 反射係數", 韓國通信學會 論文誌, 第31卷 A編 第2號, pp.60-66, 1994年 2月.
- [13] R.F.Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan Co., New York, 1968.
- [14] M.Abramowitz and I.A.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, N.Y., 1972.
- [15] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1980.