

<연구논문>

형식에 따른 차분법을 이용한 축대칭 4:1 수축을 지나는 점탄성유동의 수치모사

송진호* · 유정열

서울대학교 공과대학 기계공학과, *한국원자력연구소
(1995년 3월 2일 접수)

Numerical Simulation of Viscoelastic Fluid Flow Through 4:1 Axi-symmetric Contraction Using Type-dependent Difference Method

Jin Ho Song* and Jung Yul Yoo

*Department of Mechanical Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
Systems Safety Analysis Department, Korea Atomic Energy Research Institute, P.O. Box 105,
Yusung Post Office, Daejeon 305-600, Korea
(Received March 2, 1995)

요 약

본 연구에서는 Upper Convected Maxwell 유체 및 Leonov-like-Giesekus 유체모형을 이용하여 축대칭 4:1 수축을 지나는 점탄성유체의 유동을 수치해석하였다. 이러한 점탄성유체의 유동에 대한 지배방정식이 타원형-쌍곡선형으로 형식변화되므로 이를 적절히 고려할 수 있는 형태의 와도방정식을 이용하여 수치해석을 수행하였다. 와도방정식의 수치해석에서는 형식에 따른 차분법을 도입하였다. 두 유체모형에 대해서 Weissenberg 수를 증가 시키면서 탄성의 효과가 모서리와류의 크기, 응력의 분포, 지배방정식의 형식변화에 미치는 영향을 살펴보았다. 수치해석결과 탄성의 효과가 증가할수록 모서리와류가 커지며, 평면유동의 경우보다 훨씬 큰 모서리와류가 관찰되어 기존의 실험결과와 잘 일치하는 것을 볼 수 있었다. 또한 수치해석 결과로부터 와도방정식의 형식변화를 확인할 수 있었다.

Abstract—In this paper numerical simulation of viscoelastic fluid flow through 4:1 axi-symmetric contraction is performed by using Upper Convected Maxwell fluid and Leonov-like-Giesekus fluid model. By considering the fact that the governing equations describing above viscoelastic fluid flow change type, a proper form of vorticity equation is introduced and used for the numerical simulation. A type-dependent difference scheme is employed for the numerical approximation of vorticity equation. Investigated is the effect of elasticity on the strength of corner vortex, distribution of stresses, and change of type by increasing Weissenberg number. The results show that the corner vortex gets bigger as the elasticity effect increases, and the strength and size of corner vortex is much bigger than those of planar flow, which are in the same trend with the results of existing experimental works. Also change of type of vorticity equation is clearly identified in the results of numerical simulation.

Keywords: Change of type, vorticity equation, leonov-like-Giesekus fluid, upper convected Maxwell fluid, corner vortex, type dependent difference scheme

1. 서 론

점탄성유동은 뉴턴유체에서의 Navier-Stokes 방정식으로 기술될 수 없어서 점탄성유동을 기술하고자 할 때에는 여러가지 어려움이 수반된다. 우선 다양한 유동특성을 일반적으로 표현할 수 있는 이론적 모형을 구성하는 어려움을 들 수 있으며, 또 다른 문제는 점탄성유체의 응용분야가 복잡한 기하형태를 가지는 유동장에서인데 비해 기존의 유체 모형들로서는 단순한 기하형상을 가진 유동장에 대해서만 해를 구할 수 있다는 점이다. 그러나 최근에는 고속의 컴퓨터가 등장하면서 수치해석을 통해서 점탄성유동의 여러가지 흥미로운 현상을 규명하려는 연구들이 많이 진행되고 있다[1]. 이러한 수치해석연구들은 유체모형의 개량, 수치해석방법의 개선등을 통해 실제 유동에서와 유사한 탄성수의 범위까지 수치해석이 가능해지도록 노력하고 있다.

Joseph, Renardy와 Saut[2]는 탄성을 가지는 점탄성유체의 유동을 기술하는 지배방정식이, 마치 압축성유체의 천음속유동에서 처럼 타원형-쌍곡선형으로 형식변화되는 것을 지적하였다. 유동의 속도와 탄성에 의한 전단파의 전파속도와의 비로 정의되는 점탄성 마하수 (Viscoelastic Mach number)가 일정한 값 이상이 되면 와도방정식이 유동장내부에서 타원형-쌍곡선형 방정식이 된다는 것이다. 이러한 개념으로부터 Yoo, Ahrens와 Joseph[3], Yoo와 Joseph[4]은 선형화된 문제에 대한 해석을 통하여 와도방정식에 대한 특성곡선이 존재하는 것을 보였다.

종래의 점탄성 유동에 대한 수치해석에서는 이러한 와도방정식에 대한 특성곡선의 존재가 고려되지 않았으며 최근 이에 대한 관심이 기울여지고 있다. Song과 Yoo[5]는 평면 4:1 수축을 지나는 Upper Convected Maxwell 유체 (이하 UCM 유체라 칭하자)의 유동을 Murman과 Cole[6]의 형식에 따른 차분법 (Type dependent difference Scheme)을 적용하여 종래의 수치해석보다 개선된 결과를 보이고 수치해석의 수렴성 파괴에 대한 원인을 제시하고 있다. 이후 Choi, Song과 Yoo[7]는 위의 수치해석 방법을 Giesekus유체[8]의 일종인 Leonov-like Giesekus유체의 (이하 LEL유체라 칭하자) 유동에 확장 적용하였다. 그러나 많은 실험들이 축대칭 조건에 대해 수행되었으며 실제 응용에서도 축대칭 형상이 많으므로 위의 연구결과

들을 축대칭 유동의 경우로 확장하는 것은 아주 흥미로운 일이다. 따라서 본 연구에서는 축대칭 4:1 수축을 지나는 UCM유체 및 LEL 유체의 유동에 대해 와도방정식의 형식변화를 고려한 수치해석을 수행하고 그 결과에 대하여 논의하고자 한다.

2. 원관내의 LEL 유체의 Poiseuille 유동

Giesekus유체[8]의 유동을 $L, U, U/L$ 을 각각 길이, 속도, 응력 및 압력의 기준량으로 하여 물리량들을 무차원화하여 기술하면 그 지배방정식은 다음과 같아진다.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \tag{1}$$

$$R\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{\tau} + W(\underline{u} \cdot \nabla \underline{\tau} - \nabla \underline{u} \cdot \underline{\tau} - \underline{\tau} \cdot \nabla \underline{u}) \\ = \nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T - \alpha W \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} \end{aligned} \tag{3}$$

여기에서 $R = \rho UL/\eta$ 은 Reynolds수, $W = U/L$ 은 Weissenberg수로서 관성 및 탄성의 효과를 나타내는 무차원 수이며, η 는 영전단율(zero shear rate) 점성계수, λ 는 이완시간 (relaxation time), α 는 활성도 (mobility parameter)이다. 식 (3)은 $\alpha=0$ 일 경우에는 UCM유체 $\alpha=0.5$ 일 경우에는 LEL 유체에 대한 구성방정식에 해당하게 된다. UCM유체는 전단점성계수가 전단율에 관계없이 일정하며 제 2 법선응력차이가 존재하지 않는 제한성이 있다. 반면 LEL유체의 경우에는 점성계수가 전단율에 의존하여 전단박화 (Shear thinning) 현상을 기술할 수 있으며, 제 1 및 제 2 법선응력차이가 모두 존재하는 모형이다. 대부분의 고분자용융물 및 고분자 수용액의 유동에서는 이러한 전단박화 현상 및 제 1, 제 2 법선응력차이가 관찰되므로 LEL유체가 UCM유체 보다 더 실제적인 모형이라 할 수 있다.

2차원 유동의 문제에 대한 수치해석을 위해서는 속도장을 직접 풀기보다는 식 (1), (2)를 유동함수 및 와도에 대한 방정식의 형태로 변화시키는 것이 편리하다. 종래에는 유동함수 ψ 와 ω 와도를 도입하고 운동량방정식 (2)를 아래와 같이 타원형방정식으로 표현하여 이를 수치근사하였다[9].

$$\nabla^2 \omega + R \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (S^x - S^y) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) S^{xy}, \quad (4)$$

여기에서 $\tilde{S} = \tilde{\tau} - (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$ 이다. 그러나 Joseph, Renardy와 Saut[2]는 (1)-(3)의 점탄성유동에 대한 지배방정식이 형식변화되며 그때 와도가 형식 변화되는 변수임을 보였다. 이런 개념으로부터 Yoo와 Joseph[4]은 UCM 유체의 경우 $\nabla x \nabla \cdot (3) - W \underline{u} \cdot \nabla (\nabla x(2))$ 의 변환을 하여, 보다 적절한 형태의 와도 방정식을 유도하였다. 이 방법을 따라 식(1)-(3)의 지배방정식을 변환하면 아래와 같다. 일반성을 유지하기 위하여 평면유동 및 축대칭유동의 경우에 모두 적용이 되는 표현을 사용하고자 한다. 평면유동의 x,y 좌표계를 축대칭유동의 z,r 좌표계와 일치시키고 각 방향의 속도를 u, v라 하자.

$$y^{-a} \psi_{xx} + (y^{-a} \psi_y)_y = -\omega, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (A\omega_x + B\omega_y)_x + (B\omega_x + C\omega_y)_y - R(u\omega)_x - R(v\omega)_y = \\ & + W(u_x - v_y)(\sigma_{xy} + \gamma_{xy} + \tau_{xx} + \tau_{yy}) + W(u_y + v_x) \\ & (\gamma_{yy} - \sigma_{xx}) + W(-\sigma_x v_{xx} + \sigma_y u_{xx} - \gamma_x v_{yy} + \gamma_y u_{yy} \\ & - 2\tau_x v_{xy} - 2\tau_y u_{xy}) \\ & + a \left\{ -M^2 u \omega \left(\frac{v}{y} \right)_x - M^2 v \omega \left(\frac{v}{y} \right)_y - W \frac{\tau}{y} \omega_x \right. \\ & \left. - ((W\gamma + 1) \frac{\omega}{y})_y \right\} + aW \left\{ (u_x - v_y) \left(\frac{\tau}{y} \right)_y - (u_y + v_x) \right. \\ & \left. \left(\frac{\tau}{y} \right)_x + \gamma_y \left(\frac{v}{y} \right)_x - \gamma_x \left(\frac{v}{y} \right)_y - \frac{v}{y^2} (\gamma - \delta)_x + \left(\frac{u}{y} \right)_x \right. \\ & \left. (\gamma - \delta)_x + \left(\frac{v}{y} \right)_x (\gamma - \delta)_y - \frac{2}{y^2} v_x (\gamma - \delta) \right\} \\ & + \alpha W \{ (\gamma^2 - \sigma^2)_{xy} + (\tau(\sigma + \gamma))_{xx} - (\tau(\sigma + \gamma))_{yy} \} \\ & + a \left\{ \frac{1}{y} (\gamma^2 + \tau^2 - \delta^2) \right\}_x - a \left\{ \frac{\tau}{y} (\sigma + \delta) \right\}_y, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W(u\sigma_x + v\sigma_y) - 2(W\sigma + 1)u_x - 2W\tau u_y \\ & = -\sigma - \alpha W(\sigma^2 + \tau^2), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W(ut_x + vt_y) - (W\sigma + 1)v_x - (W\gamma + 1)u_y \\ & = -\tau(1 + aW \frac{u}{y}) - \alpha W\tau(\sigma + \gamma), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W(u\gamma_x + v\gamma_y) - 2W\tau v_x - 2(W\gamma + 1)v_y \\ & = -\gamma - \alpha W(\gamma^2 + \tau^2), \quad (9) \end{aligned}$$

$$a \{ W(u\delta_x + v\delta_y) = -\delta + \frac{v}{y} (W\delta + 1) \} \quad (10)$$

여기에서 a=0 는 평면유동, a=1 은 축대칭 유동을 나타낸다. M=(RW)^{1/2}로 정의되고 점탄성마하수 (Viscoelastic Mach Number)로서 유동의 평균속도와 미끄럼면 (slip surface)의 전파속도 $\sqrt{\eta/\rho\lambda}$ 의 비이며, A=1+Wσ-M²u², B=Wτ-M²uv, C=1+Wγ-M²v²이다.

위의 방정식은 LEL유체 및 UCM 유체의 2차원 (평면 및 축대칭) 유동을 기술하는 지배방정식이 된다. 식 (6)으로 부터 와도방정식은 판별식

$$\begin{aligned} \sum & = B^2 - AC \\ & = W^2\tau^2 - 2M^2W\tau uv - (1+W\gamma)(1+W\sigma) + M^2v^2 \\ & (1+W\sigma) + M^2u^2(1+W\gamma) > 0 \end{aligned}$$

을 만족하면 쌍곡선형, 그렇지 않으면 타원형이 되는 것을 용이하게 알 수 있다. 우선 Yoo 와 Joseph[4]에서 처럼 원관내의 Poiseuille 유동의 교란양에 대한 ∑의 변화, 즉 와도방정식의 형식을 살펴보고 이를 축대칭 4:1 수축의 경우로 확장하여 보기로 하자.

2.1 원관내의 Poiseuille 유동

기준길이를 반지름, 기준속도를 평균속도로 택하여 무차원화를 수행한 후 LEL 유체 및 UCM 유체에 대한 유동의 해를 구하면 다음과 같다.

UCM 유체

$$\begin{aligned} u & = 2(1-y^2), \tau = u_y = 4y, \sigma = 2W\tau u_y = 32Wy^2, \\ \gamma & = \delta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

LEL 유체

$$u = -\frac{1}{cW^2} \{ \ln(1-\phi^2 y^2) - \ln(1-\phi^2 r_0^2) \},$$

$$\begin{aligned} \psi & = \frac{1}{2W^2c} \left\{ \frac{1}{\phi^2} [(1-\phi^2 y^2) \ln(1-\phi^2 y^2) + \phi^2 y^2] \right. \\ & \left. + y^2 \ln(1-\phi^2 r_0^2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\omega = -u_y = -\frac{2}{W^2c} \phi^2 \frac{y}{1-\phi^2 y^2},$$

$$\tau = -2 \frac{\omega}{1 + \sqrt{1 + 4W^2 \omega^2}}, \gamma = \frac{-1 + \sqrt{1 - W^2 \tau^2}}{W},$$

$$\sigma = \frac{-1 + \sqrt{1 - W^2 \tau^2 - 4W^2 \tau \omega}}{W}, \delta = 0.$$

Table 1. Location for Sonic condition and pressure gradient for UCM and LEL fluid flow in pipe ($R = .84$)

W	Sonic point UCM fluid	dp/dx UCM fluid	Sonic point LEL fluid	dp/dx LEL fluid
0.1	absent	-8.	absent	-7.28
0.2	absent	-8.	absent	-6.00
0.3	0.0481	-8.	absent	-4.91
0.4	0.2582	-8.	absent	-4.09
0.5	0.3073	-8.	0.2142	-3.48
0.6	0.3257	-8.	0.3234	-3.02
0.7	0.3317	-8.	0.4023	-2.65
0.8	0.3319	-8.	0.4664	-2.36
0.9	0.3292	-8.	0.5210	-2.13
1.0	0.3248	-8.	0.5690	-1.93

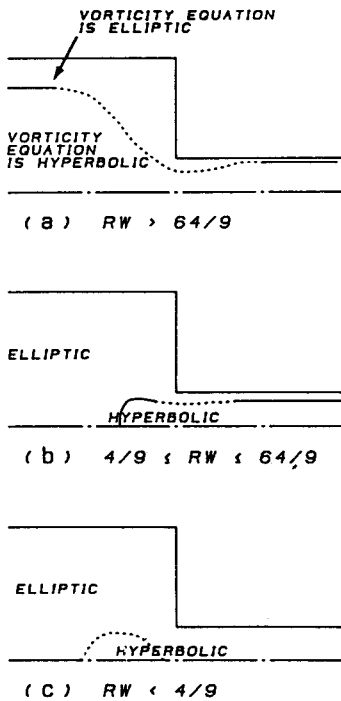


Fig. 1. Planar 4 : 1 contraction flows : (a) $RW > 64/9$; (b) $4/9 < RW < 64/9$; (c) $RW < 4/9$. (taken from Yoo & Song[5])

$$c \in \left\{ c \mid \text{s.t. } \frac{1}{cW^2} \left[\frac{1}{\phi^2 r_d^2} \ln(1 - \phi^2 r_d^2) + 1 \right] = V_{avg} \right\} \quad (13)$$

where, $\phi^2 = .25W^2 c^2$, $V_{avg} = \frac{1}{r_d^2}$,

r_d : pipe radius, V_{avg} : exit average velocity, $c = dp/dx$; pressure gradient

관의 무차원 반지름을 1로, 관의 무차원 평균속도를 1로 택해서 위의 식을 만족하는 압력구배를 구하면 표 1과 같다. UCM유체의 경우에는 탄성수가 변하더라도 필요한 압력구배가 변화하지 않으나 LEL유체의 경우에는 W수가 커질 수록 전단박화 현상도 따라서 커짐으로서 필요한 압력구배가 감소하는 것을 알 수 있다. 즉 LEL유체의 경우에는 W수가 커질수록 관을 통과할 때 압력구배가 적게 필요한 것을 알 수 있다.

한편 위 식들로부터 \sum 의 부호를 계산할 수 있는데, $\sum = 0$ 를 만족하는 y^* 를 기준으로 속도가 큰 중심선까지는 쌍곡선형 구역이 되며, y^* 에서 벽까지는 타원형 구역이 된다. 참고로 $R=0.84$ 일 경우 W의 변화에 따른 y^* 의 분포를 살펴보면 아래의 표와 같다. 이 표로부터 주목할 만한 것은 UCM 유체의 경우 W의 변화에 따라 y^* 가 증가, 감소하는 반면 LEL유체의 경우에는 단조 증가하는 것을 볼 수 있다. 이런 점에서 볼때 LEL 유체가 UCM유체보다 합리적인 모형이라 할 수 있겠다.

2.2 4:1 수축을 지나는 유동

출구에서의 조건을 기준으로한 무차원 변수들을 도입하고 4:1 수축을 지나는 유동을 개략적으로 살펴보자. 수축부로부터 먼 입구와 출구의 유동은 Poiseuille 유동으로 근사될 수 있으므로, 앞절의 논의로부터 입, 출구에서의 y^* 의 위치를 파악할 수 있다. 우선, UCM 유체의 경우를 살펴보자. 그 형태는 Song과 Yoo[5]에서 기술된 평면유동의 경우와 유사하게 되며 축대칭 유동의 경우에는 RW의 범위만이 다르게 된다. Song과 Yoo[5]의 Fig. 1을 인용하여 보자. $RW > 64$ 인 경우에는 입, 출구 모두 $\sum = 0$ 인 구역이 존재하므로 유동장에서 $\sum = 0$ 인 경계가 Fig.1a 처럼 입출구를 연결하는 모양으로 될 것이다. $1/4 < RW < 64$ 인 경우에는 $\sum = 0$ 인 경계가 유동장 내부에서 시작해서 출구쪽으로 발달할 것이다 (Fig. 1b). $RW < 1/4$ 인 경우에는 입, 출구에서 $\sum > 0$ 가 되므로 유동장내부에 $\sum > 0$ 인 구역이 없거나 있다면 내부에 갇혀 있을 것이다 (Fig. 1c). LEL유체의 경우에도 위와 같은 논의가 확장 적용될 수 있다.

대부분의 점탄성유동에서는 R수 및 W수가 와도방정식의 형식변화가 발생하는 범위내에 있게된다. 따라서 본 연구에서는 이러한 와도방정식의 형식변화를 고려하여 점탄성유체의 2차원 축대칭 유동에 대한 수치해석 알고리즘을 개발하고, 개발된 수치해석알고리

즘을 이용하여 축대칭 4:1 수축을 지나는 유동을 해석하고 그 결과에 대하여 분석·논의하고자 한다.

3. 수치해석 방법

식 (5)-(10)으로 표현되는 지배방정식을 차분근사하고 적절한 경계조건을 이용하여 수치해석을 수행한다. 격자계 및 경계의 표시는 Fig. 2와 같다.

3.1 차분근사

유동함수방정식(5)는 Poisson방정식이므로 전형적인 5점차분법으로 근사하였다. 와도방정식(6)의 형식은 주로 유동방향을 따라 변화되므로, 아래와 같이 식을 재배치한 후 Song과 Yoo[5]에 따라 형식에 따른 차분법으로 근사하였다.

$$(A\omega_x)_x + (C\omega_y)_y - R(u\omega)_x - R(v\omega)_y = -(B\omega_y)_x - (B\omega_x)_y + F \tag{14}$$

$$[(A\omega_x)_x + (C\omega_y)_y](x_i, y_j) = (1-\mu)\frac{1}{h^2}[A_{i+1/2,j}\omega_{i+1,j} - (A_{i+1/2,j} + A_{i-1/2,j})\omega_{i,j} + A_{i-1/2,j}\omega_{i,j}] + \mu\frac{1}{h^2}[A_{i-1/2,j}\omega_{i,j} - (A_{i-1/2,j} + A_{i-3/2,j})\omega_{i-1,j}] + \frac{1}{h^2}[C_{ij+1/2}\omega_{ij+1} - (C_{ij+1/2} + C_{ij-1/2})\omega_{ij} + C_{ij-1/2}\omega_{ij-1}]$$

where, $\mu=0$; $AC>0$ or $AC=0$, $\mu=1$; $AC<0$
 F : lower order terms (15)

쌍곡선형 구역에서는 후진차분근사를 타원형 구역에

서는 중심차분근사를 사용하는 것이다. 관성항은 상류차분근사를 우변의 생성항은 중심차분근사를 하였다. 응력방정식의 차분근사는 Crochet, Davies와 Walters[7] 및 Song과 Yoo[5]의 방법을 응용하였다.

3.2 경계조건

방정식의 해를 적절하게 구하려면 그 방정식의 성격에 부합되는 경계조건을 주어야 한다. UCM유체에 대한 경계조건은 Table 2와 같다. 입구 및 출구에서는 충분히 발달된 유동의 해로부터 유동함수, 와도, 응력 등에 대한 경계조건을 구하였다. 벽에서는 벽 자체가 유선이 되는 조건과 벽에서의 점착조건 (no-slip condition)을 이용하여 와도 및 응력에 대한 해를 구할 수 있었다. 한편 재돌입모서리(re-entrant corner)에서는 점착조건 및 Kawaguti[10]의 방법을 따라 와도 및 속도도구배를 근사하고 그로 부터 응력을 구하여 경계조건을 부여하였다.

LEL유체의 경우에도 역시 입, 출구에서는 충분히 발달된 유동의 해로부터 유동함수, 와도 및 응력의 경계조건을 구할 수 있다. 그러나 식(13)에서 보여지듯이 응력방정식이 비선형적이므로 물리적으로 의미가 있는 해만을 수치해석을 이용하여 구하게 된다. 고체벽에서는 점착조건을 이용해서 해석적인 해를 구할 수 있다. 한편 재돌입 모서리에서는 Kawaguti[10]의 방법을 따른 속도도구배들에 대한 근사식으로부터 응력을 해석적으로 구할 수 있다. 사용된 경계조건들은 다음과 같다.

입구 및 출구: 식 (13), 입구에서 $r_d=4$, 출구에서 $r_d=1$
 x 축과 평행한 고체벽: $\chi = Wu_v$, $x = W\tau$, $D_r = 1 - x^2$, $D_o = D_r + 4x\chi$ 의 표현으로 부터

$$x = W\tau = \frac{1}{2\chi}(-1 + \sqrt{1 + 4\chi^2}), \quad \gamma = \frac{1}{W}(-1 + \sqrt{D_r}),$$

Table 2. Boundary conditions for Upper Convected Maxwell fluid flow through axi-symmetric 4:1 contraction

	Γ_{in}	$\Gamma_1 \& \Gamma_2, \Gamma_3$		Γ_{sym}	Γ_{ex}	Re-entrant corner
ψ	$1/16(y^2 - 1/32y^4)$	0.5		0	$\psi_x = 0$	0.5
ω	$1/64y$	first-order approximation in terms of ψ		0	$\omega_x = 0$	Kawaguti's Method
σ	$2W\omega^2$	$2W\omega^2$	0	Forward Euler Method	Determined by Constitutive Equation	Use of ψ_{xx} , ψ_{xy} & ψ_{yy} obtained by Kawaguti's Method
γ	0	0	$2W\omega^2$			
τ	$-\omega$	$-\omega$	ω	0		
δ	0	0		$\gamma = \delta$		

$$\sigma = \frac{1}{W}(-1 + \sqrt{D_\sigma}), \delta = 0 \quad (14)$$

한편 벽에서의 와도는 유동함수를 1차 근사하여 계산한다.

y 축과 평행인 고체벽 : x축과 평행한 벽에서 사용된 위의 식들에 $\chi = Wv_x$ 를 대입하면 y축과 평행한 면에서의 응력을 구할 수 있다.

재돌입모서리: 재돌입 모서리에서의 속도 구배는 Kawaguti[10]의 방법을 따라 근사한다. 한편 재돌입 모서리에서의 응력은 다음의 식들로부터 해석적으로 구할 수 있다.

$$aa = 1 + 4W^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4W^2 \tau \frac{\partial v}{\partial y} - W^2 \tau^2, \quad bb = 1 +$$

$$4W^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 4W^2 \tau \frac{\partial v}{\partial x} - W^2 \tau^2 \text{의 표현을 이용}$$

하면

$$\sigma = \frac{1}{W} \{-1 + 2W \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{aa}\}, \quad \gamma = \frac{1}{W} \{-1 + 2W \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+ \sqrt{bb}\}, \delta = 0$$

$$\tau(\sqrt{aa} + \sqrt{bb}) = 2(2W \frac{\partial v}{\partial y} + \sqrt{bb}) \frac{\partial u}{\partial y} + 2(2W \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ \sqrt{aa}) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (15)$$

로 구해진다. 그러나 aa, bb 등이 τ 의 함수 이므로 τ 에 대한 표현은 비선형적이다. aa, bb는 양의 값을 가져야 하는 조건으로부터 τ 를 수치해석을 통해 구할 수 있다. 그러나 W수가 커지면서 Kawaguti[10]방법으로 근사된 속도구배를 이용하여 τ 를 구한 결과 물리적으로 의미있는 (aa, bb가 양수, 응력이 음수) 해를 수치적으로 구하기 어려워져 W수가 큰 경우에는 τ 를 인접 고체벽에서의 값의 평균으로 취하고 그 해를 위의 표현에 대입하여 나머지 응력을 구하였다.

4. 해석결과 및 검토

Walters와 Webster[11], Walters와 Rawlinson[12]의 실험에 의하면, UCM유체라 간주될 수 있는 Boger유체의 4:1 수축을 지나는 유동에서는 평면유동의

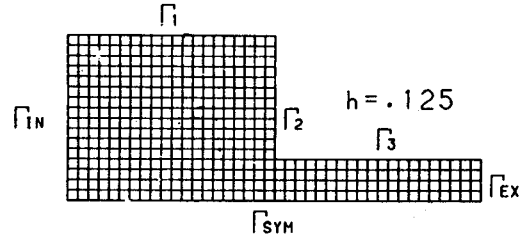


Fig. 2. Square grid system and boundaries of the flow field.

Table 3. Maximum Value of Stream Function

W	R	$\psi_{max} : \text{UCM fluid}$		$\psi_{max} : \text{LEL fluid}$	
		FD2	FD4	FD2	FD4
0.0	0.0	0.50210	0.50210	0.50210	0.50210
0.2	0.0	0.50285	0.50285	0.50218	0.50218
0.4	0.0	0.50691	0.50691	0.50302	0.50302
0.6	0.0	0.51300	0.51300	0.50393	0.50354
0.8	0.0	0.52089	0.52089	0.50497	0.50425
1.0	0.0	0.52690	0.52689	0.50526	0.50527
1.2	0.0	0.53540	0.53540	0.50657	0.50657
1.4	0.0	0.53991	0.53990	No	No
1.6	0.0	0.52984	0.52982	Convergence	Convergence
0.6	0.84	0.51062	0.51062	0.50180	0.50180
1.0	0.84	0.52096	0.52096	0.50168	0.50168

경우 모서리 와류(corner vortex)가 발생하지 않으나, 축대칭유동의 경우에는 모서리와류가 발생하며, 전단 박화유체의 경우에는 평면, 축대칭유동 어느경우에나 강도는 작으나 크기가 큰 모서리 와류가 발생하는 것으로 보고되어 있다.

본 연구에서는, 평면유동의 경우 종래보다 개선된 결과를 보여주는 Song과 Yoo[5]의 방법을 축대칭유동의 경우로 확장하고 UCM유체 및 LEL유체의 경우에 대한 수치해석을 수행하여 종래의 수치해석 및 실험의 결과와 비교하고자 하였다. R=0.0, 0.84로 택하고 W의 변화에 따른 유동함수 및 유동변수들의 분포를 살펴보고 모서리와류의 형태, 형식에 따른 차분법 수치 알고리즘의 타당성, 수치해석의 수렴성 파괴등에 대하여 검토하고자 한다.

4.1 유동함수의 분포

Table 3에 LEL유체 및 UCM유체의 경우에 대해서 수치해석결과로부터 얻어진 유동함수의 최대값이 수

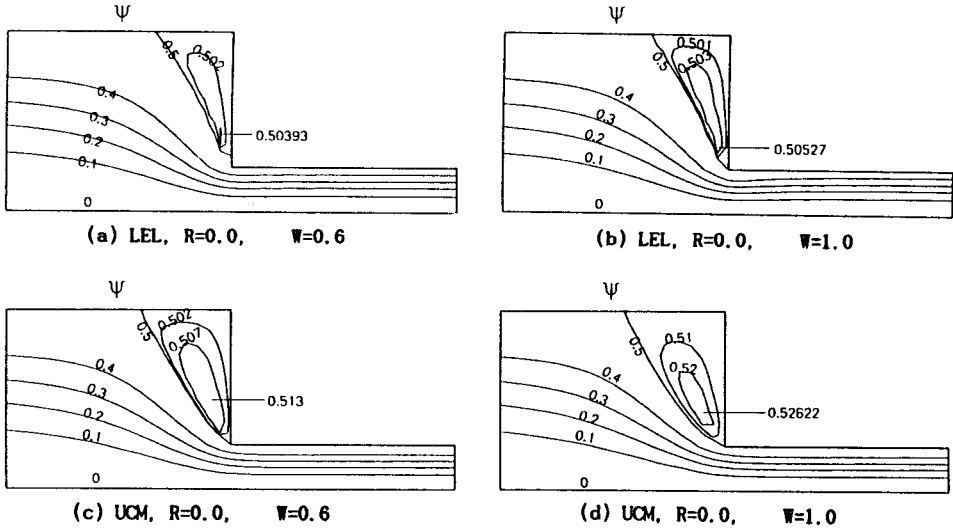


Fig. 3. Distribution of stream function ($R=0.0$).

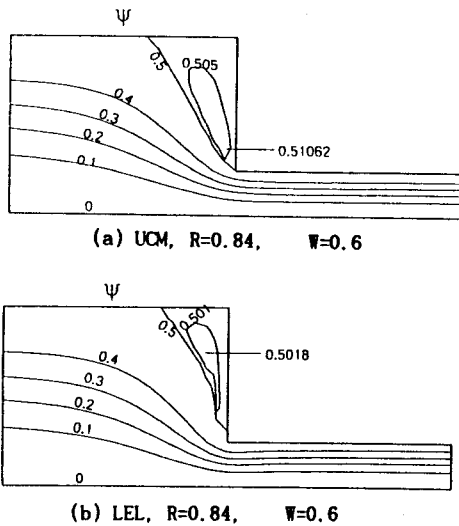


Fig. 4. Distribution of stream function ($R=0.84$).

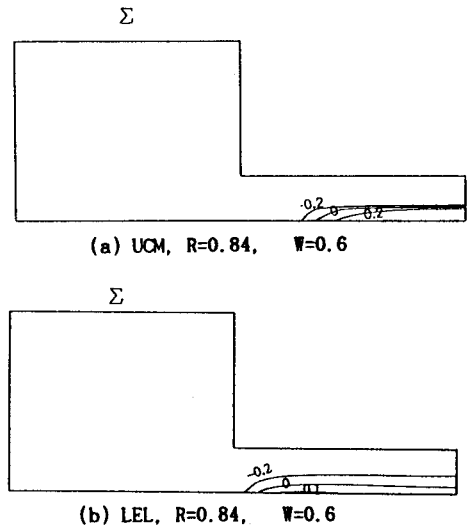


Fig. 5. Distribution of Sonic Line ($R=0.84, W=0.6$).

록되어 있다. 그림 2의 격자계를 FD2, 다음질에 언급될 격자계를 FD4라 하자.

유동함수의 최대값이 0.5보다 크다는 것의 의미는 모서리 와류가 존재한다는 뜻이며, 그 값이 커질수록 모서리 와류의 강도가 커진다. Table 3의 결과를 따르면, LEL 유체, UCM 유체 어느 경우이나 W수의 증가에 따라 모서리 와류가 커지는 경향을 보이며 그 크기가 평면유동의 경우인 참고문헌 5와 7의 결과와 비교하여

볼때 커진 것을 알 수 있다. 특히 UCM 유체는 평면 유동의 경우보다 현저하게 모서리 와류가 커지는 경향을 보이는데, 이것은 Walters와 Webster[11]의 실험결과와도 잘 일치한다. LEL 유체의 경우에는 모서리 와류가 UCM 유체의 경우 및 전단박화유체에 대한 실험결과[11]보다 작게 예측되었다. 이에 대한 이유는 LEL 유체모형의 한계 혹은 실험조건에서의 W수보다 훨씬 작은 W수의 범위에서 수치해석의 수렴성이 파

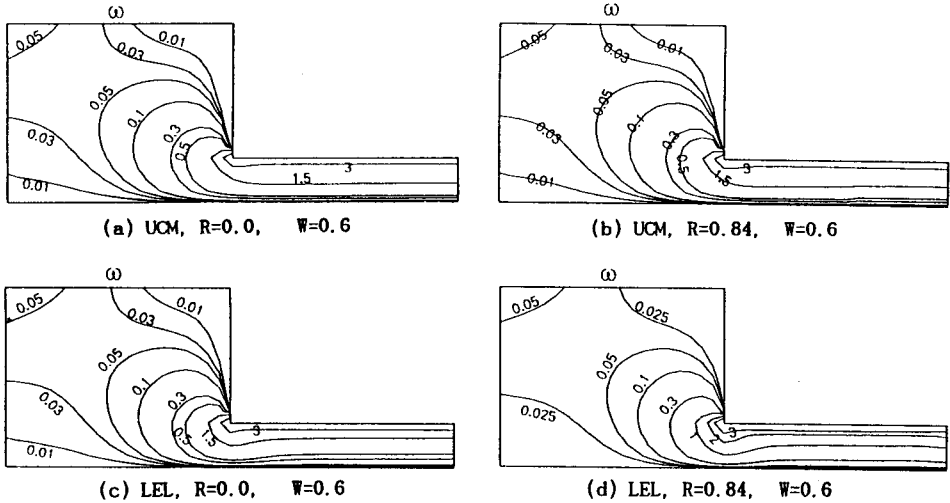


Fig. 6. Distribution of Vorticity.

괴되기 때문이라고 여겨진다.

R수가 0.84인 경우에는 두 유체모형 모두의 경우에서 R=0.0인 경우보다 모서리와류가 작아지는 것을 볼 수 있다. 또한 UCM유체보다 LEL유체가 R의 영향에 더욱 민감하게 모서리와류가 줄어드는 것을 볼 수 있다. 그림 3 에는 UCM유체 및 LEL유체에 대해서 (R=0, W=0.6), (R=0.0, W=1.0) 경우들에 대해서, 그림 4에는 (R=0.84, W=0.6) 경우들에 대한 유동함수가 도시되어 있다.

4.2 격자계의 영향

입구길이 및 출구길이의 영향이 수치해석의 수렴성 및 유동변수들의 분포에 미치는 영향을 파악하고자 입구 및 출구의 길이가 FD2 격자계(41×17)보다 두 배가 긴 FD4 격자계(81×17의 크기) 를 이용하여 수치해석을 수행하고 그 결과를 Table 3에 비교 수록하였다. 격자계가 변화하여도 수치해석의 수렴성과괴는 거의 동일한 W수의 범위에서 발견되었다. 또한 격자계의 변화에 따른 유동함수 및 응력의 변화가 거의 없는 것을 확인할 수 있다. 전단박화유체인 LEL유체의 경우에는 Walters와 Webster[11]의 실험을 모사하기 위해서는 입구 및 출구길이가 FD2보다 길어야 할 것으로 예측되었으나 입구 및 출구길이의 영향이 거의 없는 것으로 나타났다. 따라서 실험결과와 수치해석 결과의 차이는 격자계의 영향보다는 유체모형 및 수

치해석방법론에 기인하는 것으로 판단된다.

4.3. 형식변화

(R=0.84, W=.6) 일때, UCM유체 및 LEL유체에 대해서 $\sum = B^2 - AC$ 의 분포가 그림 5에 도시되어 있다. 두 경우 모두 유동장내부에서 음속선이 시작되어 출구로 향하고 있는 것을 볼 수 있어 2.2절의 예측과 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

4.4. 와도의 분포

그림 6에 (R=0.0, W=.6), (R=0.84, W=.6) 인 경우 UCM유체 및 LEL유체에 대한 와도의 분포가 도시되어 있다.

4.5 응력의 분포 및 수렴성파괴

그림 7에는 UCM유체 및 LEL유체에 대하여 R=0.0, W=0.6에 해당하는 응력분포가 도시되어 있다. LEL 유체의 경우에는 W수의 증가에 따라 전단박화 현상에 의해서 고체 벽에서의 전단응력이 작아지고 또한 속도구배가 축 부근에서보다 벽 가까이에서 급해지게 된다.

LEL유체의 경우에는 W수가 0.4 이상이 되면 식 (15)로 표현되는 해석적인 전단응력이 용이하게 구해지지 않아서 재돌입 모서리에서의 전단응력을 인접 고체벽에서의 전단응력의 평균으로 근사하여 수치해

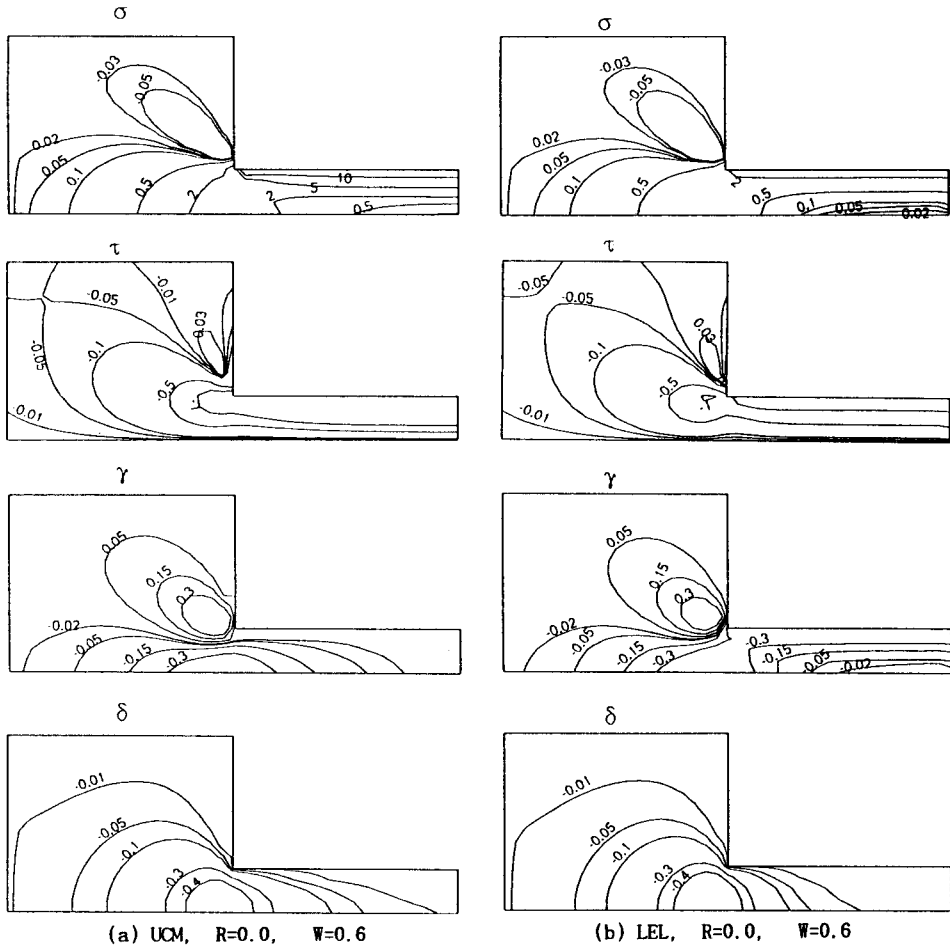


Fig. 7. Distribution of Stresses.

석을 수행 하였다. 이같은 근사방법의 타당성을 확인 하기 위하여 W수에 따른 재돌입 모서리에서의 응력을 Table 4에 수록하였다. Table 4에 수록된 값은 FD2 격자계에 의한 해인데, FD4격자계에 의한 응력도 유 동함수의 경우처럼 거의 동일하였다. 이표를 보면 W수 0.4부근까지 응력이 연속적으로 변화하다가 W수 0.4-0.5 범위에서 불연속성을 보이고, 그 이후에는 다시 연속적으로 변화하는 것을 볼 수 있다.

UCM유체의 경우에는 재돌입모서리에서의 응력은 유동함수의 2차 미분값을 이용하여 해석적으로 구할 수 있다. W수의 변화에 따른 응력의 변화를 Table 5에 수록하였다. UCM유체의 경우도 FD2격자계에 의한 값과 FD4격자계에 의한 값이 거의 동일하였다. 이표를 보면 벽에서의 전단응력은 일관성있게 변화하고 있

Table 4. Stresses at the re-entrant corner for LEL fluid

W number	σ	γ	τ	δ
0.2	1.058	-0.0252	-2.267	0.0
0.3	1.385	-0.3095	-1.777	0.0
0.4	1.460	-0.4063	-1.429	0.0
0.5	0.6995	1.229	-0.8323	0.0
0.6	0.6749	1.355	-0.7312	0.0
0.7	0.6561	1.481	-0.6568	0.0
0.8	0.6310	1.596	-0.5986	0.0
0.9	0.6043	1.698	-0.5519	0.0
1.0	0.5780	1.789	-0.5139	0.0

으나 법선응력들이 W수가 1.0보다 큰 경우에 다소 불 규칙하게 변화되는 것을 볼 수 있다. 한편 W수 1.2~1.6범위에서는 수렴되는 해를 용이하게 구할 수 있었

Table 5. Stresses at the re-entrant corner for UCM fluid

W number	σ	γ	τ	δ
0.2	1.828	0.5427	-2.967	0.0
0.4	2.705	0.0834	-1.926	0.0
0.6	3.103	0.0095	-1.620	0.0
0.8	3.427	0.0274	-1.501	0.0
1.0	3.507	0.0567	-1.407	0.0
1.2	3.831	0.0095	-1.416	0.0
1.4	3.737	1.014	-1.323	0.0
1.6	2.454	0.0597	-0.9654	0.0

으나, W수가 1.1인 경우에는 수렴되는 해를 구할 수 없으며, W수가 1.6이상인 경우에는 역시 수렴되는 해를 구할 수 없었다.

이러한 수치해석의 수렴성과괴를 해결하기 위해서는 보다 개선된 유체모형의 개발, 수치해석방법론의 개선등에 지속적인 연구가 필요하다고 여겨진다.

5. 결 론

Upper Convected Maxwell 유체 및 Leonov-like-Giesekus 유체모형을 이용하여 축대칭 4:1 수축을 지나는 유동을 수치해석하는데 있어서, 지배방정식의 형식변화를 고려할 수 있는 적절한 형태의 와도방정식을 도입하였다. 해석결과 모서리와류가 Weissenberg수가 증가함에 따라 커지고, 평면유동의 경우보다 훨씬 크게 예측되어서 기존의 실험결과와 잘 일치하였다. 또한 해석결과로부터 와도방정식의 형식변화가 명백하게 관찰되었다.

기 호

- \underline{u} : 속도벡터
- z, x : 원통좌표계에서의 축 방향
- r, y : 원통좌표계에서의 반경방향
- u, v : 속도벡터의 z, r 방향 성분
- U : 속도의 기준량
- L : 길이의 기준량

- R : 레이놀즈 수 (Reynolds number)
- W : 와이센버그 수 (Weissenberg number)
- M : 점탄성 마하 수 (Viscoelastic Mach number)
- η : 영전단율 (zero shear rate)
- λ : 이완시간 (relaxation time)
- ψ : 유동함수 (stream function)
- ω : 와도 (vorticity)
- τ : 전단응력
- σ : 축방향 법선응력
- γ : 반경방향 법선응력
- δ : 원주방향 법선응력
- ζ : 응력텐서
- ρ : 밀도

참고문헌

1. A.R. Davis, S.J. Lee and M.F. Webster, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **16**, 117 (1984).
2. D.D. Joseph, M. Renardy and Saut, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **87**, No. 3, 213 (1984).
3. J.Y. Yoo, M. Ahrens and D.D. Joseph, *J. Fluid Mech.*, **153**, 203, (1985).
4. J.Y. Yoo and D.D. Joseph, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **19**, 15, (1985).
5. J.H. Song and J.Y. Yoo, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, **24**, 221, (1987).
6. E.M. Murman and J.D. Cole, *AIAA J.*, **9**, 114 (1971).
7. H.C. Choi, J.H. Song and J.Y. Yoo, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, **29**, 347, (1988).
8. H. Giesekus, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **11**, 69 (1982).
9. M.J. Crochet, A.R. Davies and K. Walters, Numerical simulation of Non-Newtonian Flow, Elsevier, Amsterdam, 1984.
10. M. Kawaguti, *Phys. Fluids*, **2**, 101 (1964).
11. K. Walters and M. F. Webster, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A308**, 199 (1982).
12. K. Walters and D.M. Rawlinson, *Rheol. Acta.*, **21**, 547, (1982).