

압축성 유동장에서의 원형 실린더 주위의 강제 및 혼합대류에 대한 수치 해석

최윤호 · 이현찬 · 유재석 · 김기현

아주대학교 기계공학과

Numerical Analysis of Forced and Mixed Convection around the Circular Cylinder for Compressible Flow

Yun Ho Choik, Hyun Chan Lee, Jae Suk Yoo and Ki Hyun Kim

Department of Mechanical Engineering, Ajou University

요 약

저속의 압축성 유동장에서의 원형 실린더 주위의 유동 및 열전달특성을 해석하였다. 비압축성 유동장에서의 실린더 주위의 유동 및 열전달현상에 대하여는 실험과 수치해석을 포함한 광범위한 연구가 진행되어 왔으며 매우 잘 알려져 있다. 실린더 벽면과 주위 유동장의 온도차가 큰 경우, 밀도의 변화가 커지므로 유동장은 압축성 유체가 되나 지배 방정식의 복잡함과 적절한 수치해석 방법의 부족으로 실린더 주위의 유동장을 압축성 유체로 해석한 경우는 매우 드물다. 현재 압축성 유동 해석에 널리 사용되는 time marching algorithm은 저속의 유동장 해석시 지배방정식에 나타나는 eigenvalue들의 피리에 의하여 수렴속도가 현저히 떨어지게 된다. 본 연구에서는 이와 같은 난점을 극복할 수 있는 time-derivative preconditioning 방법을 사용하여 온도차가 큰 유동장에서의 강제 및 혼합대류에 대한 계산을 수행하였고 이들의 열전달특성을 비교하였다. 강제대류의 경우 실린더 벽면 온도의 증가에 따른 밀도 감소의 영향은 유동장의 Re수를 감소시켜 확산의 영향을 증가시키며, 혼합대류의 경우 부력의 영향은 가열되는 유동장의 범위와 재순환 영역을 강제대류에 비해 현저히 감소시킨다.

Abstract—Numerical studies are made to investigate the flow and heat transfer characteristics around the circular cylinder for low speed compressible flow. For incompressible flow, extensive studies have been made and heat transfer characteristics around the circular cylinder are well known. When there is a strong heat source or a large temperature difference, flow becomes compressible because of large density changes. For compressible flow, however, studies do rarely exist probably due to the lack of proper numerical algorithm and equation complexities. Conventional time marching algorithms for compressible flow have convergence difficulties at low speed flows due to stiff eigenvalues of system of equations. Time-derivative preconditioning method which overcomes the difficulty is used for the present study. Computations are performed for forced and mixed convection flowfield with large temperature difference and comparison of their flow and heat transfer characteristics are made. For forced convection the increase of surface temperature makes effective Reynolds number larger by reducing density and thus diffusion effects become dominant. For mixed convection, buoyant acceleration diminishes heating and recirculating zone significantly compared with those of forced convection.

1. 서 론

본 연구에서는 수치해석을 통한 압축성 유동장에서의 2차원 원형 실린더 주위의 유동 및 열전달특성을 고려

하였다. 균일한 유동장중에 있는 원형 실린더 주위의 유동 및 열전달에 대한 정확한 예측은 열선풍속계, 전자장비, 열교환기, 원자로 설계 등, 다양한 분야에 적용되므로 공학적으로 매우 중요하다. 비압축성 유동장에

서의 실린더 주위의 유동 현상에 대하여는 매우 잘 알려져 있으며 이에 대한 연구는 실험과 수치해석을 포함하여 매우 광범위하다. 그 중 Grove 등¹⁾은 Reynolds수 변화에 따른 실린더 주위의 유동특성(항력, separation bubble 크기 등)을 실험적으로 측정하였으며, Fornberg²⁾는 $Re < 300$ 영역에서 Stream Function-Vorticity Formulation을 사용하여 정상 상태의 유동특성을 수치적으로 계산하였으며, 이들은 위 실험결과와 잘 일치하였다. 최근에 Braza 등³⁾, Rosenfeld 등⁴⁾은 $100 < Re < 1000$ 영역에서의 비정상 유동특성을 계산하였다. 실린더 주위의 강제, 혼합 및 자연대류 등의 열전달특성에 대하여도 많은 연구가 있어 왔다. 그 중 Collis와 Williams⁵⁾은 $0.01 < Re < 140$ 범위에서 열선 주위의 강제대류에 대하여 실험을 수행하였으며, Dennis 등⁶⁾은 유사한 Reynolds수 범위에서 강제대류 특성을 수치적으로 해석하였다. Chang 등^{7,8)}은 강제대류 특성을 물성치가 일정할 경우와 온도에 따라 변화할 경우에 대하여 $Re < 150$ 범위에서 실험과 계산을 수행하였다. 또한 Badr⁹⁾는 저 Re수 유동장에서 유동방향이 혼합대류 현상에 미치는 영향을 조사하였다. 이 외의 실린더 주위의 유동 및 열전달 특성들에 대한 연구는 최근에 Ahmad¹⁰⁾에 의하여 잘 요약되어 있다.

위에 언급한 연구는 대부분의 경우 실린더 주위의 유체를 비압축성 유체로 설정하여 해석하였다. 그러나 열교환기 등 공학적으로 접하는 실린더 주위의 유동장은 많은 경우 기체이며, 따라서 압축성 유체이다. 실린더 벽면과 유동장의 온도차가 작은 경우, 이를 비압축성 유체로 가정하여도 무방하지만, 온도차가 큰 경우, 밀도의 변화가 커지므로 더 이상 비압축성 유체로 가정할 수 없으며, 특히 부력의 영향을 받는 혼합 및 자연대류 유동장의 해석시 Boussinesq 가정을 사용할 수 없다. 따라서 온도차가 큰 경우 반드시 압축성 유체로 고려하여야 하나, 지배방정식의 복잡함과 적절한 수치해석 방법의 부족으로 인하여 이와 같이 해석한 경우는 매우 드물며 특히 혼합대류에 대한 계산은 전무한 실정이다. 최근에 Chen과 Weng¹¹⁾이 실린더 주위의 비압축성과 압축성 유동장 특성을 SIMPLER 방법을 이용하여 강제대류에 대하여 해석하였지만, 매우 작은 격자수의 H형 격자제에 대한 계산이므로 해의 정확도가 떨어진다.

압축성 유동에 대한 수치해석 방법으로서 time marching algorithm은 지난 2~30년간 급속히 발전되어 왔다. 그 대부분의 발전은 지배방정식의 형태가 elliptic system에서 hyperbolic system으로 전환되는 천이속 유동장의 계산, 특히 이러한 유동장에 생성되는 충격파의 해석에 치중되어 왔다. 그러나 이와 같은 time

marching algorithm을 이용하여 저속의 유동장(저 Mach수 유동)을 해석함에 있어서는, 유체 입자의 속도와 음속의 괴리에 의하여 지배방정식의 eigenvalue들 사이에 큰 차이가 생김에 따라, 수렴속도가 매우 느려지는 문제점이 있음은 매우 잘 알려져 있다¹²⁻¹⁶⁾. 이와 같은 문제점은 Re수가 낮아짐에 따라 더욱 커지게 된다. 따라서, 최근에는 time marching algorithm을 저속의 유체유동(저 Mach수 유동, 저 Re수 유동)의 계산에 적용하려는 노력이 크게 증대하여 왔으며, 그 대표적인 방법으로 preconditioning을 이용한 방법¹²⁻¹⁶⁾과 perturbation expansion을 이용한 방법^{17,18)}이 있다. 그 중 Choi와 Merkle^{12,16)}에 의해 개발된 time-derivative preconditioning 방법은 현재 저속의 압축성 유동 계산에 널리 사용되고 있으며¹²⁻¹⁶⁾, 본 연구에서도 이 방법을 적용하였다.

본 연구에서는 압축성 유동장에서의 실린더 주위의 열전달특성을 time-derivative preconditioning 방법을 이용하여 Reynolds수 40 이하의 영역에서 강제 및 혼합대류 현상에 대하여 해석하였다.(Reynolds수 40 이상에서는 잘 알려져 있듯이, 후류에 vortex shedding이 나타나는 비정상유동이 되므로 본 연구에서는 고려하지 않았다.) 이와 같은 저 Reynolds수 유동은, 기체의 경우 실제 적용 온도 및 압력 범위에서 동시에 저 Mach수 유동이 되므로 time-derivative preconditioning 방법을 사용할 수 있는 적절한 문제라 볼 수 있다. 또한 본 연구에서는 실린더 주위에 O형 격자를 사용함으로써, 일반적으로 사용하는 H형 격자제에서 발생하는 격자의 뒤틀림을 방지하고, 경계면에서 직교성을 유지하여 해의 정확도를 향상시킬 수 있다. 따라서 본 연구의 목적은 실린더 주위의 유동장, 온도장, 와도 분포, Nusselt수 분포 등을 조사함으로써, 압축성 유동장과 비압축성 유동장에서의 유동 및 열전달특성의 차이점을 강제와 혼합대류에 대하여 이해하고자 함이며, 아울러 time-derivative preconditioning 방법을 본 연구와 같은 열전달 영향이 큰 경우에 대하여 검증함으로써 추후 실제공학문제와 관련된 열전달 문제 또는 화학반응 문제에 적용하고자 한다.

2. 지배 방정식

본 연구의 지배방정식으로서 압축성 Navier-Stokes 방정식을 고려한다. 일반적으로 압축성 지배방정식은 고속의 유동장 해석에 사용되며, 이 때 밀도의 변화는 대부분 속도의 변화에 기인한다. 저속의 유동, 특히 속도의 변화가 아닌 열전달 효과에 의하여 밀도 변화가 있는 경우의 해석을 위하여, 서론에서 언급한 time-de-

rivative preconditioning 방법^{12,16)}을 압축성 지배방정식에 적용한다. Time-derivative preconditioning 방법을 이용한 비정상 2차원 압축성 Navier-Stokes 지배방정식은 일반 좌표계(generalized coordinate)를 이용하면 다음과 같은 보존 형태(conservative form)로 표시할 수 있다.

$$\Gamma \frac{\partial Q_v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_1 \frac{\partial}{\partial \xi} JQ_v + R_2 \frac{\partial}{\partial \eta} JQ_v \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} R_3 \frac{\partial}{\partial \xi} JQ_v + R_4 \frac{\partial}{\partial \eta} JQ_v \right) + H \quad (1)$$

위 식에서 Q_v 는 Navier-Stokes방정식에 나타나는 종속변수 벡터를 표시하고, E와 F는 비점성 플럭스벡터이다. H는 중력을 포함하는 생성항(source) 벡터이고, Γ 는 preconditioning matrix이다. $R_i(i=1-4)$ 는 점성계수 μ 와 열전도계수 k 를 포함하는 확산 계수 matrix이고 ξ 와 η 는 변환 좌표계이며, J는 좌표변환의 Jacobian이다. 주 종속변수 벡터 Q_v 는 다음과 같은 특수한 형태를 지닌다.

$$Q_v = J^{-1} (p, u, v, T)^T \quad (2)$$

여기서 p 는 압력, u, v, T 는 x, y 방향의 속도성분과 온도를 나타낸다. 또한 플럭스벡터 E와 생성항 벡터 H는 다음과 같다.

$$E = J^{-1} (\rho U, \rho u U + \xi_x \pi, \rho v U + \xi_y \pi, (e+p)U)^T$$

$$H = J^{-1} (0, -\rho g, 0, -\rho g U)^T \quad (3)$$

여기서 ρ 는 밀도, U는 contravariant 속도, e 는 전에너지(total energy)이며 중력은 음의 x방향으로 작용하도록 설정되어 있다. 플럭스벡터 F는 벡터 E에서 U를 V로, ξ 를 η 로 대체하면 쉽게 구할 수 있다. 위 식에서는 특히 시간항에 나타나는 벡터 Q_v 가 확산항의 벡터와 같게 설정되어 있으므로 “parabolic” 형태의 식을 유지함을 볼 수 있으며, 이와 같은 형태로서 저 Reynolds수 계산에서 빠른 수렴을 기대할 수 있다.

Preconditioning matrix Γ 는 원 지배방정식의 시간항을 가상시간항(artificial time derivative)으로 대체하며, 이 matrix는 확산항이 작을 경우(약 $Re > 100$)에는 비점성 플럭스벡터의 eigenvalue를 같은 크기로 조절할 수 있게 하며, 확산항이 지배적일 경우(약 $Re < 100$)에는 확산항에 대한 time step을 조절할 수 있는 적절한 스케일링을 도입한다. 이와 같이 Preconditioning이 적용된 방정식은 초저속의 아음속 유동에서 초음속에 이르는 광범위한 유동범위에서 Mach수와 Reynolds수에 무관하게 수렴하는 것으로 알려져있다. 사용한 Γ 의

형태는 다음과 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta M^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\beta M^2} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{\beta M^2} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{(e+p)}{\rho \beta M^2} - 1 & \rho u & \rho v & \frac{\gamma p R}{\gamma - 1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 M은 Mach수이며, β 는 적절한 스케일링 변수이다¹²⁾.

확산계수 matrix R_i 는 다음과 같이 좌표변환 metric과 4개의 sparse matrix로 구성된다.

$$R_1 = J^{-1} (\xi_x^2 R_{xx} + \xi_x \xi_y R_{yx} + \xi_x \xi_y R_{xy} + \xi_y^2 R_{yy})$$

$$R_2 = J^{-1} (\xi_x \eta_x R_{xx} + \xi_y \eta_x R_{yx} + \xi_x \eta_y R_{xy} + \xi_y \eta_y R_{yy})$$

$$R_3 = J^{-1} (\xi_x \eta_x R_{xx} + \xi_x \eta_y R_{yx} + \xi_y \eta_x R_{xy} + \xi_y \eta_y R_{yy})$$

$$R_4 = J^{-1} (\eta_x^2 R_{xx} + \eta_x \eta_y R_{yx} + \xi_x \eta_y R_{xy} + \eta_y^2 R_{yy}) \quad (5)$$

Sparse matrix $R_{xx}, R_{yx}, R_{xy}, R_{yy}$ 는 다음과 같다.

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu u & \mu v & k \end{bmatrix} \quad R_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu v & -\frac{2}{3}\mu u & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{yx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\mu v & \mu u & k \end{bmatrix} \quad R_{yy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu u & \frac{4}{3}\mu v & 0 \end{bmatrix}$$

위 식에서 점성계수 μ 와 열전도계수 k 는 물성치의 변화를 고려하기 위하여 온도의 함수로서 power law ($\mu = \mu_{ref}(T/T_{ref})^{0.7}$, $k = k_{ref}(T/T_{ref})^{0.7}$ 를 적용하였으며, 2차 점성계수를 위하여는 Stokes의 가설을 사용하였다($\lambda = -2/3\mu$). 식 (1)과 더불어 이상 기체 방정식($p = \rho RT$)을 사용하였으며, 따라서 전에너지 e 는 다음과 같이 정의된다.

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} \quad (7)$$

여기서 γ 는 비열비이다.

3. 수치해석 기법

Preconditioning이 적용된 방정식(식 (1))에 대한 수치해는, 시간항에 대하여는 Euler의 내재적 기법을 이용하고, 비점성항과 점성항을 포함하는 공간항에 대하여는 중심차분법을 이용하여 구하였다. 이 방법을 사용하는 경우 형성되는 matrix에 대한 효율적인 계산을 위하여 Douglas-Gunn¹⁹⁾의 근사분해(approximate factorization)를 이용하였으며 이 방법에 대한 수치기법은 다음과 같다.

$$\left[S + \Delta t \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} R_1 \frac{\partial}{\partial \xi} J \right) \right] S^{-1} \left[S + \Delta t \left(\frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} R_4 \frac{\partial}{\partial \eta} J \right) \right] \Delta Q_v = -\Delta t R$$

(8)

여기서, R은 식 (1)의 정상 상태에서의 잔여항이며, 다음과 같이 표시된다.

$$R = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E - R_1 \frac{\partial}{\partial \xi} J Q_v - R_2 \frac{\partial}{\partial \eta} J Q_v \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F - R_3 \frac{\partial}{\partial \xi} J Q_v - R_4 \frac{\partial}{\partial \eta} J Q_v \right) + H$$

(9)

Matrix A, B와 D는 벡터 E, F와 H의 Jacobian이고 matrix S = $\Gamma - D\Delta t$ 로 정의된다. 본 연구의 계산 수행시 식 (8)에는 중심차분법에 의한 진동을 제어하기 위하여 외재적으로 처리한 4차의 인공감쇄항을 추가하였다. 식 (8)의 해는 각 좌표 진행방향에 대하여 일반적인 block tridiagonal inversion 절차를 이용하여 구하며, 또한 ΔQ_v 가 0으로 다가감에 따라 현재의 기법으로 식 (1)의 정상 상태의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

4. 경계 조건

현재 일반적인 Navier-Stokes Code들은 유동변수의 외삽, 반사, 특성곡선해법(Method of Characteristics)²²⁾ 등 여러가지 경계조건을 사용한다. 그 중 변수의 외삽 또는 반사방법은 실행하기 쉬우므로 널리 쓰이고 있다. 이에 반하여 특성곡선해법은 실행이 비교적 복잡하나, 비정상 지배방정식의 수학적 특성으로부터 직접 유도되기 때문에 더욱 엄밀하다고 할 수 있으며, 특히 이 방법으로는 계산영역의 경계에 적용되는 정확한 경계

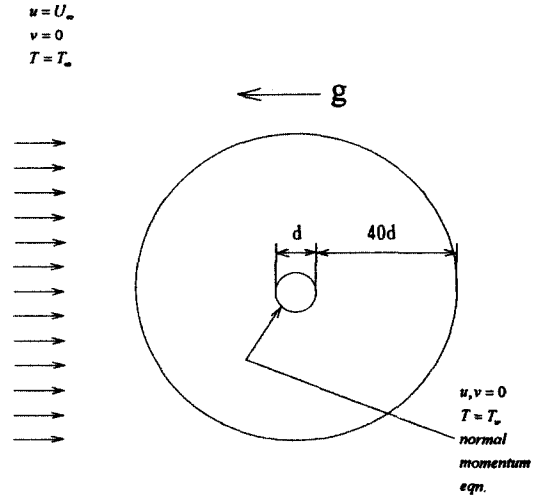


Fig. 1. Computational domain and boundary conditions.

조건의 갯수와 더불어 특성곡선방정식의 적분을 통하여 경계에 필요한 정보를 얻을 수 있다.

Fig. 1은 본 연구에 사용한 계산영역 및 경계조건을 보여주고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 바깥쪽 경계는 실린더 벽면의 영향을 배제하기 위하여 실린더 벽면으로부터 실린더 직경의 약 40배 정도에 위치하게 하였다. 또한 유동장이 상하 대칭인 점을 고려하여, 계산영역은 상반부만을 고려하였다. 바깥쪽 경계, 즉 자유유동 영역에서는 특성곡선해법을 근간으로 하는 경계조건을 사용하였으며 그 적용하는 절차는 다음과 같다. 먼저 Jacobian $\Gamma^{-1}A$ 의 left eigenvector로 구성되는 matrix M^{-1} 를 식 (8)에 곱함으로써 특성방정식들을 구한다(여기서 M^{-1} 가 singular가 되는 것을 방지하는 방법은 Ref (12) 참조). 다음으로 지배방정식의 고유값(eigenvalue)의 부호에 따라 사용가능한 특성방정식만을 추출하기 위하여 선택(selection) matrix L을 특성방정식들에 곱한다. 이 과정은 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

$$LM^{-1} \left[S + \Delta t \frac{\partial A}{\partial \xi} \right] S^{-1} \cdot \left[S + \Delta t \left(\frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} R_4 \frac{\partial}{\partial \eta} J \right) \right] \Delta Q_v = -\Delta t LM^{-1}R$$

(10)

위 식에서 선택 matrix L은 계산영역의 전,후반부에 따라 달라진다. 전반부, 즉 상유영역에 대하여는, L =

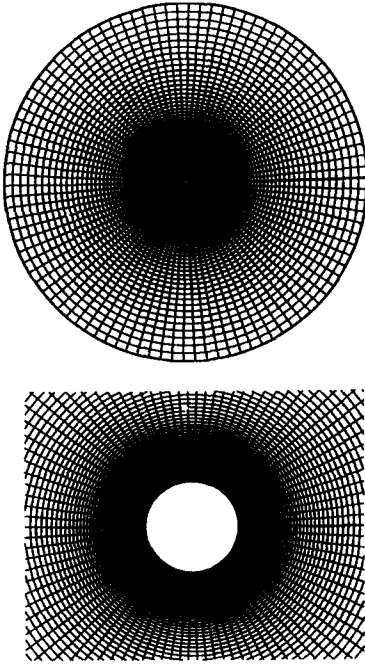


Fig. 2. O-type computational grid(98×130) for flow past circular cylinder.

Diag(0,0,0,1)을 사용한다. 이 식중 0이 아닌 요소에 대하여는 특성방정식이 사용되고, 0 요소에 대하여는 경계에 맞는 물리적으로 의미있는 조건들이 추가된다. 본 연구에서 이 들은 속도(u), 정체온도(T^0), 유동각도(v/u) 조건이다. 하류영역 역시 위와 같은 방법을 사용하나, 선택 matrix L 은 Diag(1,1,1,0)가 되며, 이 중 0인 요소에 대하여는 일정압력 조건($p = \text{constant}$)을 부과한다.

실린더 벽면에서는 점착조건($u=v=0$), 등온조건($T = \text{일정}$) 그리고 벽면과 수직방향의 운동량 방정식(normal momentum equation)을 사용하였으며, 대칭축은 대칭조건을 감안하여 일반 계산영역점으로 취급하고 또한 내재적으로 처리하였다.

5. 결과 및 검토

저속의 균일한 유동장중에 있는 원형 실린더 주위의 유동 및 열전달특성을 preconditioning 방법을 이용하여 비압축성 및 압축성 유동장에 대하여 조사하였다. 본 연구에서는 앞에서 언급하였듯이 $Re=40$ 이하만 고려하였으며, $Re>40$ 에서는 후류에 vortex shedding이 발생하는 비정상유동이 되므로 고려하지 않았다. 먼저 비압축성 유동장에 대한 해석을 수행하였고, 실린더

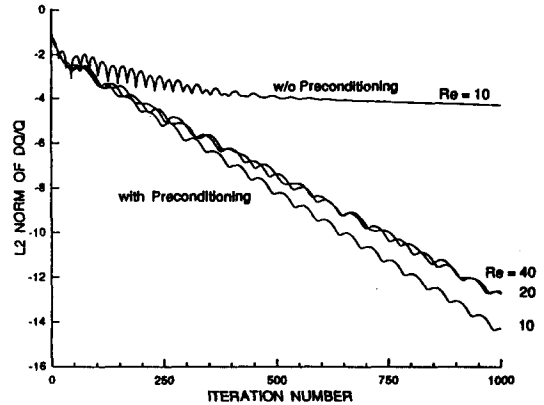


Fig. 3. Convergence rates with and without preconditioning method for flow around circular cylinder.

주위의 와도 분포, 박리 및 Nusselt수 등의 특성을 실험 또는 다른 수치해석 결과와 비교하여 preconditioning 방법을 검증하였으며, 이를 바탕으로 압축성 유동장에서 강제 및 혼합대류에 대한 해석을 실린더가 가열되는 경우에 대하여 수행하였다. Fig. 2는 Fig. 1의 계산영역에 대하여 본 연구에서 사용한 격자계이다. O형 격자계(98×130)를 사용하였으며 유동장이 대칭인 점을 감안하여 상반부만을 고려하였으며, 또한 경계층의 형성을 포착할 수 있도록 벽면 주위에 격자를 밀집시켰다.

5-1. 비압축성 유동장

먼저 preconditioning 방법을 검증하기 위하여 비압축성 유동장에서의 강제대류에 대한 유동현상을 검토한다. 압축성 지배방정식을 사용하여 비압축성 유동장을 해석하기 위하여 실린더와 주위와의 온도차를 매우 작게 설정하였으며($\Delta T=5K$), 이로써 유동장의 밀도 변화를 무시할 수 있다. 본 계산에서 사용한 자유유동장의 Mach수는 약 10^{-5} 이다. Fig. 3은 semi-log선도에서 Re수 10, 20, 40에 대한 수렴특성을 보여주고 있다. Preconditioning을 사용하였을 경우, Re수에 따른 수렴특성은 거의 동일하며 모든 경우에 1 Order의 $\Delta Q/Q$ 가 떨어지기 위하여 약 75번의 time step이 필요하지만 preconditioning을 사용하지 않았을 경우에는 수렴속도가 매우 느려지며 1 Order의 $\Delta Q/Q$ 가 떨어지기 위하여 약 3000 step이 필요한 것을 볼 수 있다. 따라서 preconditioning을 사용하는 경우 수렴속도가 약 40배 향상되며, 현재의 방법이 저속의 유동장 계산에 매우 효율적임을 알 수 있다.

Fig. 4는 Re수에 따른 유동장 특성에 대한 그림이며 상반부는 유동 방향의 속도분포(u 속도분포)를, 하반부는 등온도선 분포를 보여준다. Re수가 증가할수록

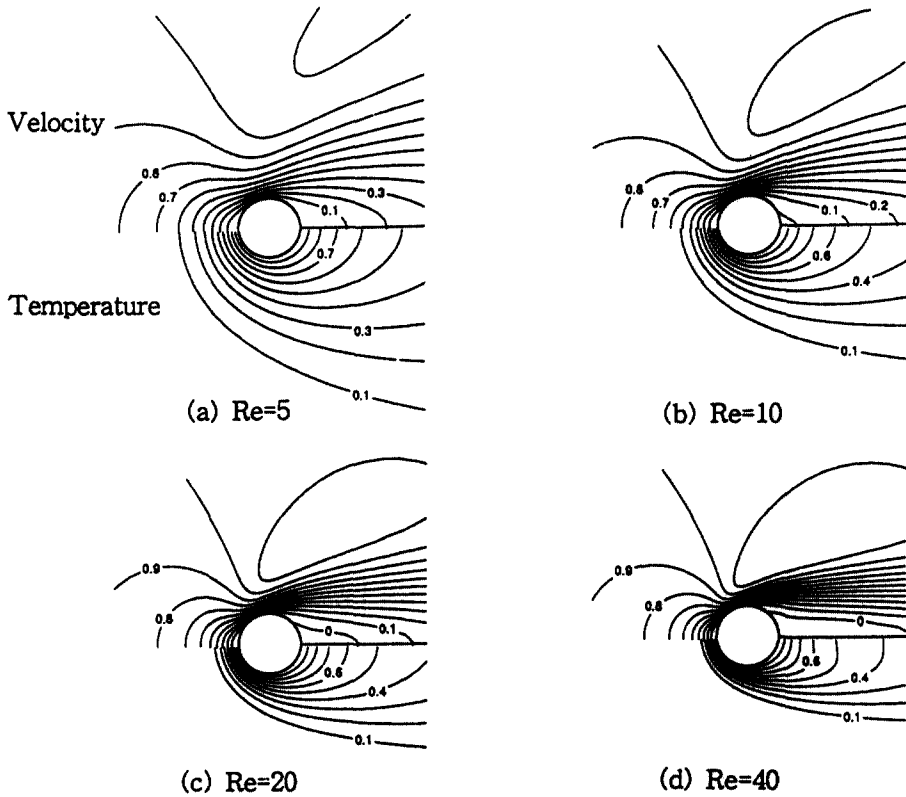


Fig. 4. Velocity (u/u_∞) and temperature ($(T-T_\infty)/(T_w-T_\infty)$) contours for incompressible flow at $Re=5$, $Re=10$, $Re=20$, $Re=40$.

실린더 주위의 유동속도가 증가하고 있으며, 실린더 후면에서 박리가 나타나기 시작하여 재순환 영역이 확대되는 것을 볼 수 있다. 이에 대한 유동특성은 매우 잘 알려져 있으므로²⁰⁾ 구체적인 설명은 생략하기로 한다. 등온도선 분포에서는 Re 수가 증가할수록 대류(convection)의 영향이 증가하므로 등온선 간격이 조밀해지며, 이는 특히 실린더 전면에서 명백히 볼 수 있다. 또한 $Re=5$ 와 같이 낮은 Re 수에서는 등온선이 y 축을 중심으로 거의 대칭적으로 나타나며, 이 대칭성은 Re 수가 작아질수록 더욱 커지게 된다(stokes flow).

수치해석 결과의 검증용 위하여, Fig. 5에 실린더 벽면에서의 압력분포, 와도 분포, Nusselt수 분포와 재순환길이 등을 여러 실험 및 수치해석 결과와 비교하였다. Fig. 5(a)는 Re 수에 따른 실린더 벽면에서의 압력분포이다. 실린더 전면에서는 Re 수 증가에 따라 순압력구배가 감소하는 것을 볼 수 있으며, 실린더 후면에서는 역압력지역이 앞 쪽으로 이동하며, 그 구배는 증가함을 볼 수 있다. 이는 Fig. 4에서 볼 수 있듯이 박리점이 Re 수 증가에 따라 앞 쪽으로 이동하는 원인

이라 할 수 있다. 같은 그림에 $Re=40$ 에서의 압력 분포를 Grove¹⁾의 실험치 및 Fornberg²⁾, Dennis와 Chang²¹⁾의 수치결과와 비교하고 있다. 각각의 경우 비교적 잘 일치함을 볼 수 있다. Fig. 5(b)는 $Re=20, 40$ 에서의 와도 분포를 Dennis와 Chang²¹⁾, Fornberg²⁾의 수치결과와 비교한 그림이며, 역시 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다. Fig. 5(c)는 실린더 벽면에서의 Nusselt수로서, Fig. 4에서 볼 수 있는 것 처럼 Re 수 증가에 따라 온도구배가 커지므로 Nusselt수가 증가함을 볼 수 있으며, Dennis 등⁶⁾의 수치결과와 비교적 잘 일치하고 있다. Fig. 5(d)는 Re 수에 따른 후류의 재순환 길이를 보여 준다. 이것은 실린더 후류의 유동영역에서 x 방향 속도 u 가 역방향으로 바뀌는 지점의 길이를 측정했기 때문에, Re 수가 증가함에 따라 증가하고 있음을 볼 수 있다. 같은 그림에 Grove¹⁾의 실험결과와 Dennis와 Chang²¹⁾, Chang과 Finlayson⁷⁾의 수치해석결과와 비교하였으며 역시 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

이상과 같은 수렴특성의 우수성과 여러가지 실험 및 수치해석 결과와의 비교를 통하여 현재의 preconditioning

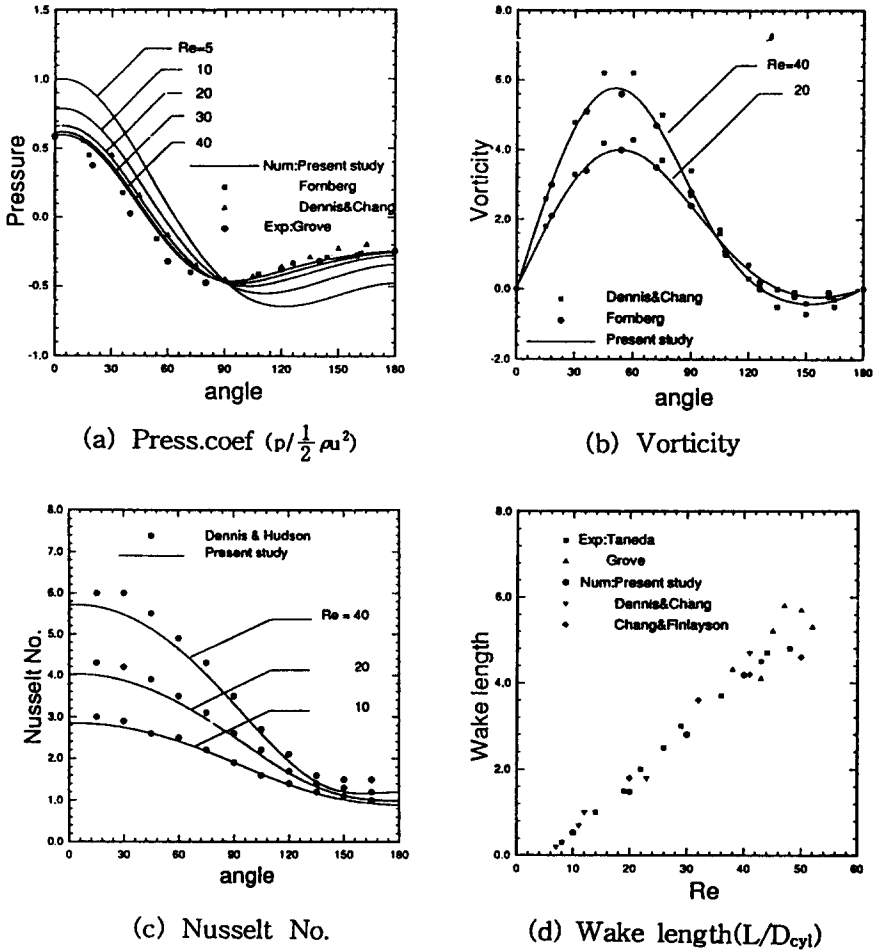


Fig. 5. Pressure coefficient, vorticity and local Nusselt number distribution on the cylinder surface and wake length for various Reynolds number.

ning 방법이 비압축성유동, 특히 저속의 유동장 해석에 적합함을 알 수 있으며, 이를 근간으로 다음 절에 실린더가 가열되는 경우의 압축성 유동장에 대한 해석을 수행하였다.

5-2. 압축성유동장

5-2-1. 강제대류

지금까지는 실린더 벽면과 주위와의 온도차를 작게 함으로써 밀도의 변화를 무시할 수 있는 비압축성 유동장에 대하여 살펴보았다. 이번에는 실린더를 가열하는 경우 실린더 벽면온도와 주위의 온도차로 인하여 밀도 변화가 생기는 압축성유동 문제를 고려하기로 한다. 먼저 강제대류에 대한 계산을 수행하여 온도차의 영향을 검토한 후 중력의 영향을 포함하는 혼합대류를

검토하기로 한다. 강제대류의 해석을 위하여 자유유동 속도와 주위 온도를 일정하게 유지하여($M=0.01, T_\infty=300K, Pr=0.7$), Re 수를 40($Pe=35$)으로 고정시켰으며, 실린더 벽면온도를 300K에서 2000K로 증가시키면서 이의 유동장에 대한 영향을 조사하였다. 본 계산에 대한 수렴특성은 온도차와 무관하게 Fig. 3의 비압축성 유동장의 경우와 거의 동일하므로 생략하였으며, 따라서 본 연구에 사용한 preconditioning 방법이 압축성 유동장 계산에서도 적합함을 알 수 있다. Fig. 6은 실린더 벽면온도에 따른 유동장의 변화를 보여주고 있다. 상반부는 유동방향의 속도분포(u 속도분포)를, 하반부는 등온도선 분포를 보여준다. 일반적으로 400K에서는 온도와 속도분포가 비압축성의 경우와 크게 다르지 않지만, 벽면온도의 증가에 따라 확산(또는 전도)의

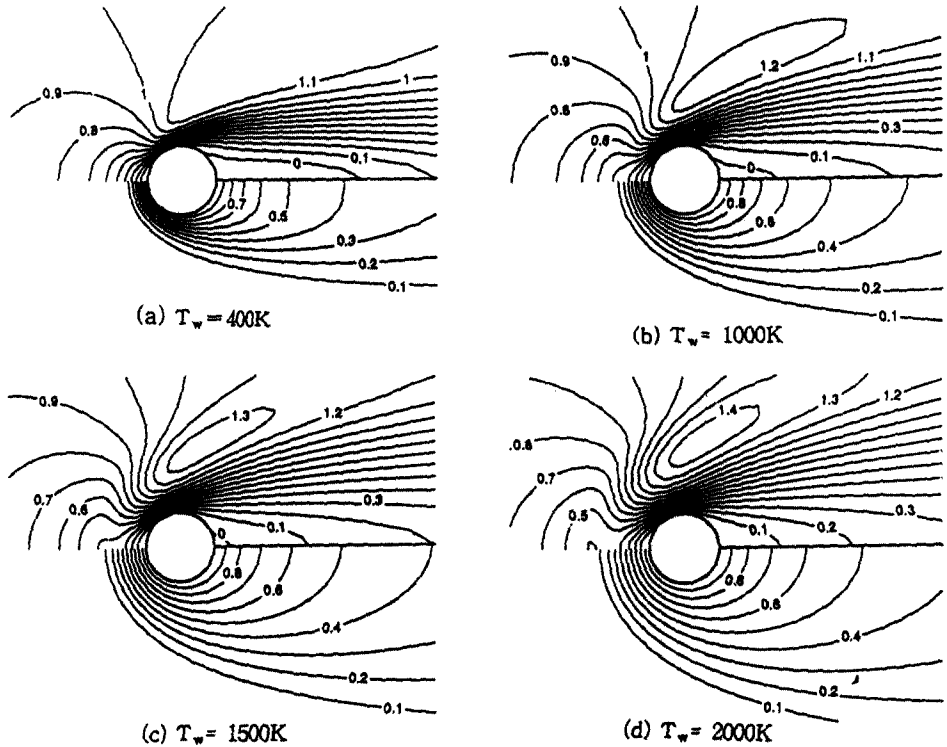


Fig. 6. Velocity (u/u_∞) and temperature ($(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$) contours for forced convection in compressible flow at $T_w = 400, 1000, 1500$ and $2000K$.

영향이 크게 증가하는 것을 볼 수 있다. 온도장은 열 전도와 대류 사이의 평형관계에 의해 결정된다. 실린더의 온도증가는 실린더 주위의 유동장의 밀도를 감소시켜 유동장의 유효 Re 수(effective Re)를 감소시키는 역할을 하며, 또한 유동장의 온도증가에 따라 전도계수가 증가하게 되므로 전도의 영향을 증가시킨다. 본 계산에서 입구 유동속도와 주위의 온도가 모든 경우에 같기 때문에 대류영향은 일정한 반면, 전도영향은 실린더의 온도증가에 따라 점점 커지게 되어, 결과적으로 가열된 실린더의 영향을 받는 범위는 비압축성의 경우에 비해 훨씬 넓어진다. 특히 온도장이 온도 증가에 따라 상류영역으로 확장되는 것을 볼 수 있어, 유동방향으로의 전도(axial conduction)가 중요한 역할을 하는 것을 볼 수 있으며, 이것은 열전달 문제에서 Peclet수 100 이하에서 유동방향 전도를 무시할 수 없다는 종래의 가정²²⁾과 일치한다.

속도 분포에서는 벽면온도의 증가에 따라 특히 실린더 후류에서 가속되고 있음을 볼 수 있다. 상류영역에서는 유동속도가 지연되며, 그 지연범위는 실린더의 온도가 증가할수록 비압축성의 경우보다 더욱 상류영

역에서 나타난다. 상류영역에서의 이러한 유동속도의 지연은 역압력구배에 기인한다(Fig. 7 참조). 비압축성 유동장의 경우는 단지 실린더 앞의 정체점 때문이나, 압축성의 경우는 정체점뿐만 아니라 열팽창의 효과로 인한 것이다. 그러므로 앞쪽의 강화된 압력구배는 경계층을 성장시키고 또한 상류영역의 유동을 지연시키게 되어 주위쪽으로 유동방향을 바꾸게 된다. 따라서 등속도 분포가 온도의 증가에 따라 점점 주위 방향으로 넓어짐을 볼 수 있다. 반면에 실린더 후류에서는 온도 증가에 따라 유동속도가 가속되므로, 실린더의 온도가 증가할수록 재순환 길이가 감소하여 2000K에서는 거의 소멸되고 있는 것을 볼 수 있다.

Fig. 7은 실린더 벽면온도의 증가에 따른 압력장을 보여주고 있다. 전술한 바와 같이 압축성 유동장에서는 정체점과 더불어 열팽창 효과에 의하여 실린더 주위에서 압력이 상승함을 볼 수 있다. 특히 정체점 부근에서의 압력상승은 유동속도를 지연시키거나(blockage effect), 후류에서의 압력상승은 순압력구배를 증가시켜 유동속도를 가속시킨다. 또한 실린더 벽면온도 증가에 따라 실린더 후면에서의 역압력구배가 감소하는 것을

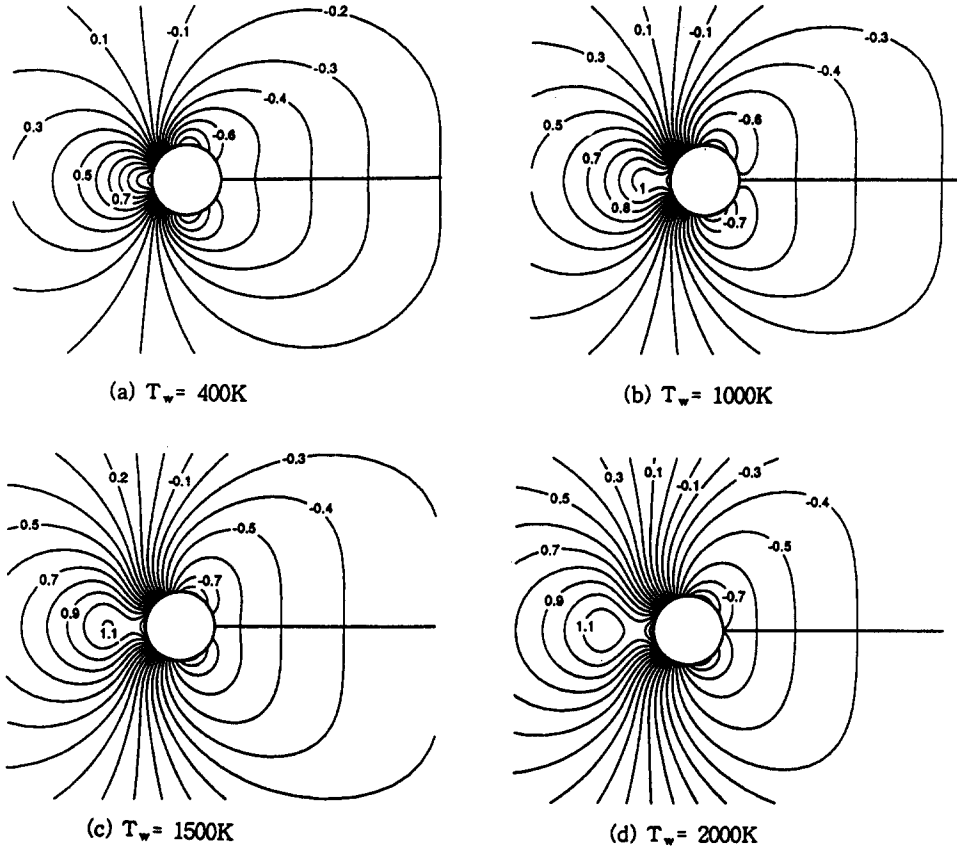


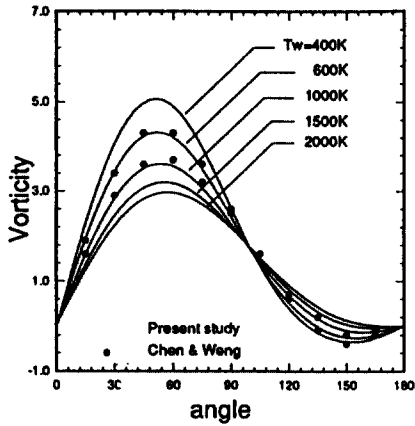
Fig. 7. Pressure coefficient ($p/1/2\rho u^2$) fields for various temperatures ($T_w=400, 1000, 1500$ and $2000K$).

볼 수 있는데, 이 것은 Fig.6에서 보듯이 박리점이 온도의 증가에 따라 실린더 뒤쪽으로 이동하는 원인이 된다. Fig.8은 실린더 표면에서의 와도분포, Nusselt수 분포, 평균 Nusselt수와 재순환 길이 등을 보여준다. Fig.8(a)는 실린더 벽면온도에 따른 실린더 벽면에서의 와도분포로서 와도는 온도의 증가에 따라 확산의 영향이 증가하므로 감소하며, 그 최대값은 약 $50^\circ \sim 60^\circ$ 사이에서 나타난다. Fig.8(b)는 재순환 길이를 보여주며, 500K 이상에서는 그 길이가 급격히 감소하고 있음을 볼 수 있다. Fig.8(c)는 실린더 벽면에서의 국소 Nusselt수를 보여준다. 실린더 온도가 증가할수록 감소하는 경향을 볼 수 있으며, 최대 온도구배가 정체점에서 나타나므로 최대 Nusselt수는 실린더 앞쪽의 정체점에서 발생하고 하류영역으로 갈수록 점차적으로 감소한다. 본 계산의 검증을 위하여 같은 그림에 Chen과 Weng¹¹⁾의 수치해석 결과와 비교하였는데, 전체적으로 비교적 동일한 경향을 보이고 있으나, 특히 실린더 뒤쪽의 정체점 부근에 가까울수록 차이가 나

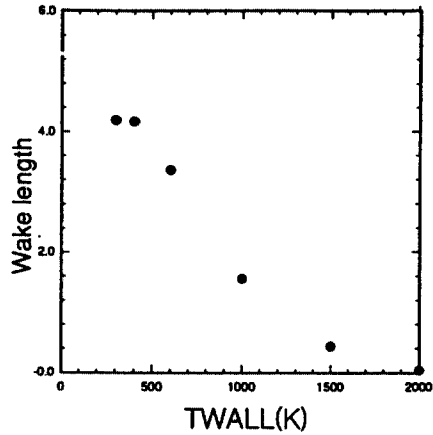
타난다. 그 이유는 본 연구와 비교하여 Chen과 Weng¹¹⁾이 사용한 격자가 정체점 부분에서 상당히 비틀려져 있으며(distorted grid), 격자수 역시 매우 작기 때문이다(본 계산에 사용한 격자수의 1/5임). Fig.8(d)는 실린더 벽면온도에 따른 평균 Nusselt수이며, 벽면온도가 300K에서 2000K로 증가할 때 약 66%의 감소가 있음을 볼 수 있다.

5-2-2. 혼합대류

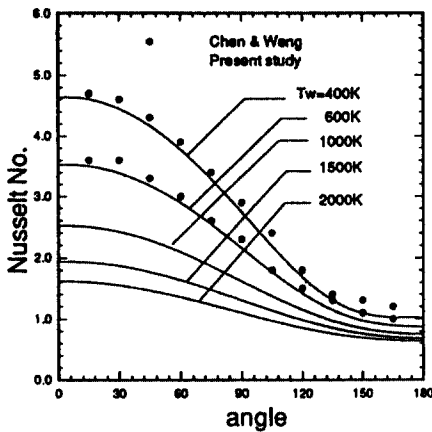
혼합대류 유동장에서 부력의 영향을 고려하기 위하여 식 (1)의 생성항 벡터 H에 중력이 음의 x방향으로 작용하도록 $-\rho g$ 값을 추가하였다. 부력의 효과는 부력에 의한 유동이 강제 유동과 같은 방향인 경우(parallel flow), 반대 방향인 경우(contra flow), 수직 방향의 경우(cross flow) 등 유동 방향에 상대적인 중력의 방향에 의해 영향을 받는다. 본 연구에서는 같은 방향(parallel flow)의 경우에 대하여 실린더 벽면온도를 400K에서 2000K 까지 변화시켜 압축성 유동장에서의 부력의 영향을 고려하였다. 또한 강제 대류의 경우와 마찬가지로



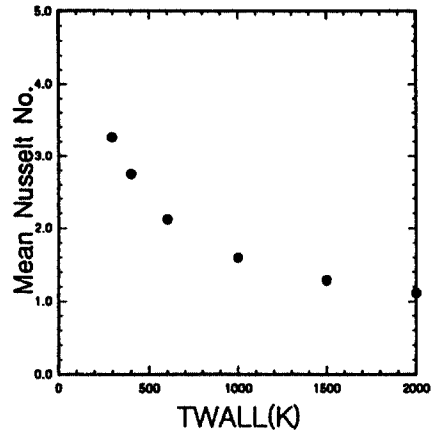
(a) Vorticity



(b) Wake length(L/D_{cyl})



(c) Nusselt No.



(d) Mean Nusselt No.

Fig. 8. Vorticity, local and Mean Nusselt number distribution on the cylinder surface and wake length for forced convection at various temperatures.

지로 자유유동장의 유동변수 들은 $M=0.01$, $T_{\infty}=300K$, $Pr=0.7$, $Re=40$ 을 사용하였으며, 이 때 온도 변화에 따른 Gr수의 범위는 82~394이다. Fig. 9는 혼합대류 계산에서 Gr수에 따른 수렴특성을 보여준다. 생성항의 영향으로 강제대류에 비하여 수렴속도가 약간 느려지나, 모든 경우에 1 Order의 $\Delta Q/Q$ 가 떨어지기 위하여 약 100번의 time step이 필요한 좋은 수렴율을 보여 주고 있다. 또한 Gr수에 따른 수렴율의 차이는 거의 없는 것으로 보인다.

Fig. 10은 실린더 벽면온도 변화에 따른 유동장에 대한 그림이며, 상반부는 유동방향의 속도 분포(u 속도 분포)를, 하반부는 등온도선 분포를 보여준다. 등온도선 분포를 보면 강제대류의 경우와 마찬가지로 온도의

증가에 따라 등온도선 분포가 넓어짐을 볼 수 있으며, 이는 온도 증가에 따른 밀도의 감소로 확산의 영향이 커지기 때문이다. 그러나 이를 Fig. 6의 강제대류 경우와 비교하면 가열된 범위가 상당히 좁아진 것을 볼 수 있으며, 이는 부력의 영향에 의하여 유동 속도가 가속함에 따라 유동장이 냉각되기 때문이다. 등속도 분포에서도 유사한 차이점을 볼 수 있으며, 벽면온도의 증가(또는 Gr수 증가)에 따라 강제대류에 비해 실린더 상하류영역에서 전반적으로 유동장이 가속된다. 따라서 상류영역에서는 유동속도의 지연 범위가 줄어들며, 하류영역에서는 급격한 가속으로 재순환영역의 길이가 감소하여 1500K($Gr=356$)에서 재순환영역이 거의 소멸하고 있음을 볼 수 있다.

Fig. 11은 실린더 표면에서의 와도분포, Nusselt수 분포와 재순환 길이 등을 보여준다. Fig. 11(a)는 실린더

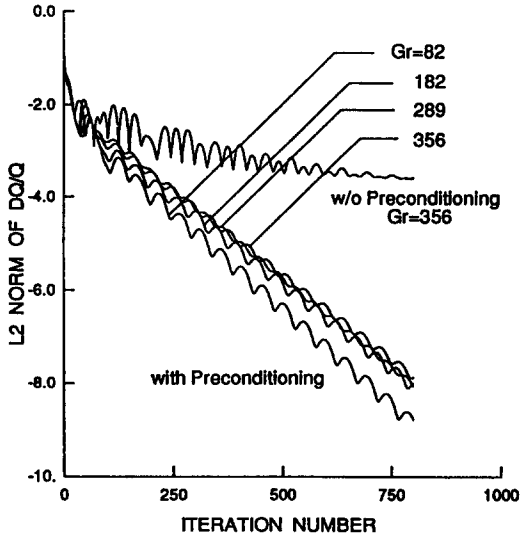


Fig. 9. Convergence rates for mixed convection with preconditioning method.

벽면온도에 따른 와도 분포이며 실린더 벽면온도의 증가에 따라 감소하고 있으나, Fig. 8(a)의 강제대류에 비하여는 모든 경우에 큰 값을 가지며 이는 가속에 의한 속도구배 증가 때문이다. 혼합대류의 최대 와도는 온도 증가에 따라 부력의 영향이 증가하므로 강제대류에 비하여 400K에서 약 9.8%, 2000K에서 약 41.6%의 증가가 있다. Fig. 11(b)는 재순환길이를 보여주며 상기한 바와 같이 강제대류의 경우에 비해 현저히 빨리 소멸하는 것을 볼 수 있다. Fig. 11(c),(d)는 혼합대류와 강제대류의 국소 Nusselt수와 평균 Nusselt수를 비교하고 있다. 혼합대류의 Nusselt수는 강제대류와 비교하여 부력의 영향이 와도와 재순환길이에 대한 것 보다 작은 것으로 보이며, 이는 혼합대류의 실린더 근접부위의 온도장이 강제대류와 비교하여 큰 차이가 없기 때문인 것으로 보이며, 평균 Nusselt수의 경우 2000K에서 약 13%의 증가를 볼 수 있다.

6. 결 과

Time-derivative preconditioning 방법을 이용하여 비압축성 및 압축성 유동장에서의 원형 실린더 주위의

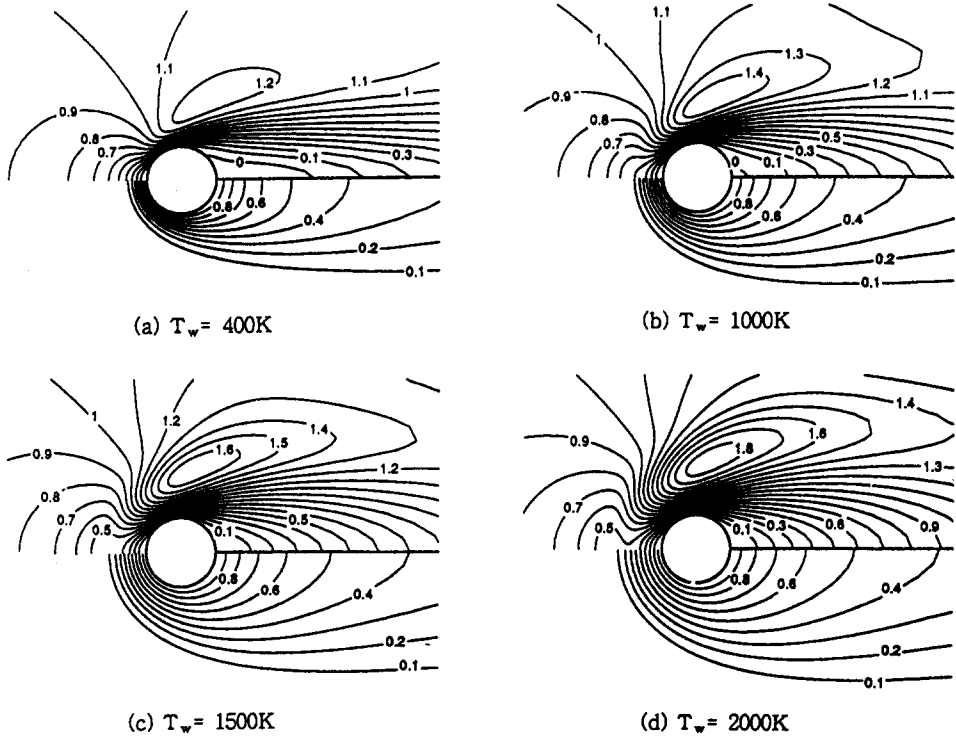


Fig. 10. Velocity and temperature contours for mixed convection in compressible flow at $T_w=400, 1000, 1500$ and $2000K$.

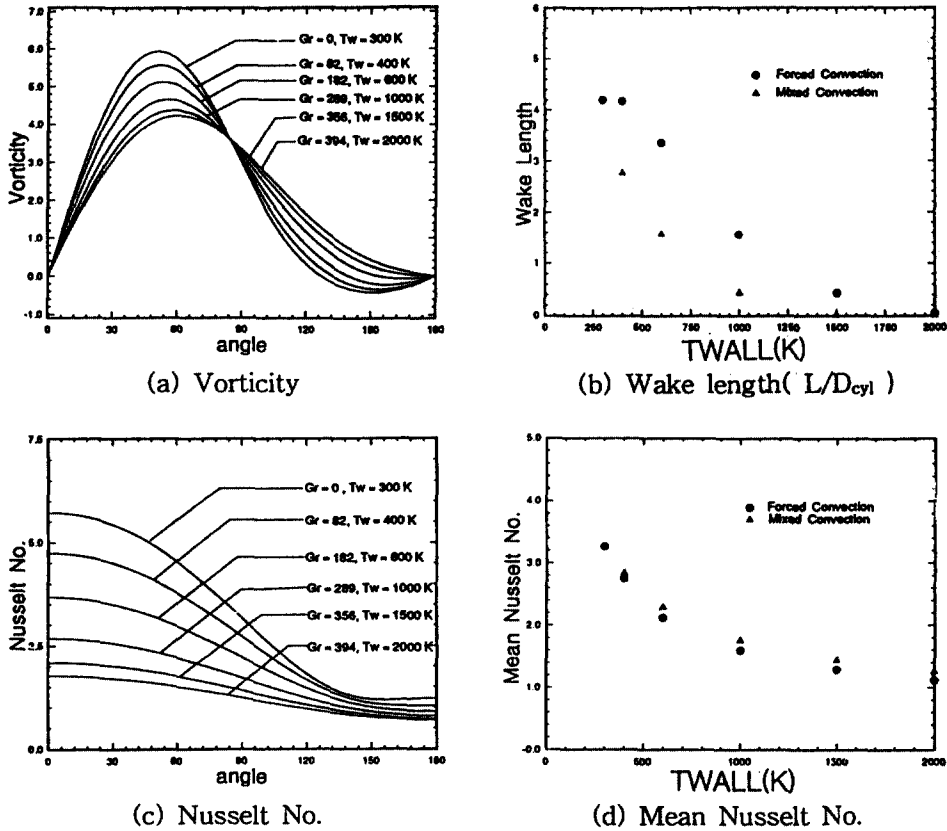


Fig. 11. Vorticity, local and Mean Nusselt number distribution on the cylinder surface and wake length for mixed convection at various temperatures.

강제 및 혼합대류 특성을 조사하였다. 먼저 time-derivative preconditioning 방법을 검증하기 위하여 비압축성 유동장에 대한 강제대류 해석을 수행하여 Re수 변화에 따른 유동장, 온도장, 압력장 등 여러 물리적인 특성을 실험 및 다른 수치해석 결과와 비교하였으며 잘 일치함을 볼 수 있었다. 다음으로 실린더 벽면온도와 주위의 온도차로 인하여 밀도 변화가 생기는 압축성 유동장에서의 강제 및 혼합대류에 대한 계산을 수행하였다. 강제대류에 있어서는 실린더 벽면 온도의 증가에 따라 밀도의 감소를 수반하게 되어 유동장의 유효 Re수를 감소시키므로 확산의 영향이 증가하게 된다. 이는 실린더 주위에서 가열되는 유동장의 범위를 확장하게 하며, 또한 특히 실린더 후류에서의 유동 속도를 증가시킨다. 실린더 상류영역에서는 정체점과 열팽창으로 인해 강화된 역압력구배가 유동속도를 지연하게 된다. 평균 Nusselt수는 실린더 벽면온도의 증가에 따라 감소하며 $T_w=2000K$ 에서는 비압축성 유동장에 비해

약 66%의 감소를 관찰할 수 있었다. 혼합대류 경우에도 벽면온도의 증가에 따라 강제대류와 유사한 유동장을 볼 수 있으나, 부력의 영향으로 인하여 실린더 전후류에서 유동속도가 강제대류에 비해 더욱 가속됨을 볼 수 있었으며, 따라서 가열되는 유동장의 범위와 재순환 영역이 강제대류에 비해 현저히 감소함을 볼 수 있었다. 또한 본 계산을 통하여 기존의 압축성유동 수치해석 방법인 time marching algorithm에 비해 time-derivative preconditioning 방법의 수렴특성이 현저히 향상되는 것을 볼 수 있었으므로 현재의 문제와 같은 강력한 열원이 존재하는 저속의 압축성 유동장 해석에 본 방법이 적합함을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 1993년도 한국과학재단의 핵심연구과제 연구비의 지원으로 수행되었기에 감사 드립니다.

사용기호

Γ	: Preconditioning matrix
Q_v	: 주종속 변수 벡터
E, F	: 비점성 플럭스 벡터
H	: 생성항 벡터
R_1, R_2, R_3, R_4	: 점성항 jacobian matrix
t	: 시간
ξ, η	: 일반 좌표계
x, y	: 직교 좌표계
ρ	: 밀도
u, v	: x, y 방향의 속도
e	: 전 에너지
T	: 온도
p	: 압력
μ	: 점성 계수
k	: 열전도 계수
M	: Mach 수
Re	: Reynolds 수
Pr	: Prandtl 수
Nu	: Nusselt 수
Gr	: Grashof 수

참고문헌

- Grove, A. S., Shair, F. H., Petersen, E. E. and Acrivos, A. : "An Experimental Investigation of the Steady Separated Flow past a Circular Cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 19, Part 1, pp. 60-81 (1964).
- Fornberg, B. : "A Numerical Study of Steady Viscous Flow past a Circular Cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 98, Part 4, pp. 819-855 (1980).
- Braza, M., Chassaing, P. and Ha Minh, H. : "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 165, pp. 79-130 (1986).
- Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M. : "Numerical Simulation of Unsteady Incompressible Viscous Flows in Generalized Coordinate Systems," 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Vol. 323, pp. 506-511 (1988).
- Collis, D. C. and Williams, M. J. : "Two-Dimensional Convection from Heated Wires at Low Reynolds Numbers," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 6, Part 3, pp. 357-384 (1959).
- Dennis, S. C. R., Hudson, J. D. and Smith, N. : "Steady Laminar Forced Convection from a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers," *The Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 933-940 (1968).
- Chang, M. W. and Finlayson, B. A. : "Heat Transfer in Flow past Cylinders at $Re \approx 150$ - Part 1, Calculation for Constant Fluid Properties," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 12, pp. 179-195 (1987).
- Chang, M. W. and Finlayson, B. A. and Sleicher, C. A. : "Heat Transfer in Flow past Cylinders at $Re < 150$ - Part 2, Experiments and Theory for Variable Fluid Properties," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 12, pp. 197-210 (1987).
- Badr, H. M. : "On the Effect of Flow Direction on Mixed Convection from a Horizontal Cylinder," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 5, pp. 1-12 (1985).
- Ahmad, R. A. : "A Steady-State Numerical Solution of the Navier-Stokes and Energy Equations Around a Horizontal Cylinder at Reynolds Numbers from 100 to 500," AIAA Paper 93-2748, AIAA 28th Thermophysics Conference, Orlando, Florida (1993).
- Chen, C. H. and Weng, F. B. : "Heat Transfer for Incompressible and Compressible Fluid Flow over a Heated Cylinder," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 18, pp. 325-342 (1990).
- Choi, Y. H. and Merkle, C. L. : "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, No. 2, pp. 207-223 (1993).
- Van Leer, B., Lee, W. T. and Roe, P. : "Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equation," AIAA Paper 91-1552 (1991).
- Venkateswaran, S., Weiss, J. M., Merkle, C. L. and Choi, Y. H. : "Propulsion Related Flowfields Using the Preconditioned Navier-Stokes Equations," AIAA Paper 92-3437 (1992).
- Shuen, J. S., Chen, K. H. and Choi, Y. H. : "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-Equilibrium Flows at All Speeds," *Journal of Computational Physics*, Vol. 106, pp. 306-318 (1993).
- 최윤호 : "Preconditioning을 이용한 전속도 영역에 대한 압축성 유체유동해석," *대한기계학회논문집*, Vol. 18, No. 7, pp. 1840-1850 (1994).
- Merkle, C., L. and Choi, Y., H. : "Computation of Low-Speed Flow with Heat Addition," AIAA Jour-

- nal, Vol. 25, No. 6, pp. 293-311 (1985).
18. Guerra, J. and Gustaffson, B. : "A Numerical Method for Incompressible and Compressible Flow Problems with Smooth Solution," *Journal of Computational Physics*, Vol. 63, pp. 377-397 (1986).
 19. Douglas, J. and Gunn, J. E. : "A General Formulation of Alternating Direction Methods - Part I Parabolic and Hyperbolic Problem," *Numerische Mathematik*, Vol. 6, pp. 428-453 (1964).
 20. Panton, R. L. : *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons, New York (1984).
 21. Dennis, S. C. R. and Chang, G. Z. : "Numerical Solutions for Steady Flow past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers up to 100," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, Part 3, pp. 471-489 (1970).
 22. Kayes, W. M. and Crawford, M. E. : *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York (1980).