

이방성 암석에 대한 탄성계수의 실험적 결정

김호영*

Determination of Elastic Constants of Transversely Isotropic Rocks by Simple Uni-axial Test

Ho-Yeong Kim*

ABSTRACT For transversely isotropic rocks such as schist, shale, etc, a method to determine the anisotropic elastic constants was proposed. Theoretically, equations of elastic constants E_1 , E_2 and G_2 can be derived from the measured strains in arbitrary three directions. If we attach three strain gages in accordance with the directions of anisotropy on the rock specimen under uni-axial compression, anisotropic elastic constants can be determined by these equations. With this method, the degree of anisotropy of transversely isotropic rocks will be easily evaluated by simple laboratory test.

1. 서 론

최근 터널 굴착현장에서 편암, 편마암, 셰일 등과 같은 이방성 암반이 자주 나타나고 있다. 이와 같이 층리 또는 엽리와 같은 평면구조의 발달에 의한 이방성 암반은 평면 이방성 매질(Transversely Isotropic Media)에 해당된다. 암반의 이방성이 현저할 경우에는 터널 주변의 응력집중 현상이 등방성 암반에 비해 많이 달라지는데, 이는 이방성 축방향의 탄성계수들의 비율에 의해 결정된다.¹⁾ 따라서 층리가 현저한 암반에 대해서는 조사단계에서 이방성 축방향의 탄성계수들을 측정하여 그 비율에 따라 이방성의 정도를 평가하므로써, 터널 구조해석 시에 이방성을 고려할 것인가에 대해 판단할 필요가 있다.

일반적으로 시추코어는 이방성의 축과 시추방향이 어긋나 있기 때문에 실험실 시험으로 이방성 탄성계수를 결정하기 위해서는 시험편을 다시 가공해야 하며, 이 경우 일반적인 NX 시추코어로는 시험편의 가공이 어렵다.

본 논문에서는 평면이방성 암반에서 NX 크기의 시추코어를 이용하여 단축압축시험만으로 이방성 탄성계

수를 실험적으로 결정하기 위한 방법을 논의하고 이에 대한 수식을 유도하였다.

2. 문제의 정의

평면이방성 암반으로부터 회수된 시추코어를 단축압축 시험편으로 가공한 일반적인 형태는 Fig. 1과 같다. 이방성 평면상에서 축(3)이 수평축과 일치하도록 좌표계 (1)-(2)-(3)을 설정하고, 시험편의 가압면에서 수평축 z가 축(3)과 일치하게 좌표계 x-y-z를 설정한다면 (1)-(2)평면은 x-y평면과 일치하게 된다. 이때 이방성 평면이 수평면과 이루는 각도는 ϕ 로서 축(1)과 축x가 이루는 각도가 된다.

시험편에 대해 y-z 평면이 시험편의 축벽과 만나는 가상의 직선을 설정하고, 이 직선이 시험편의 중간에서 층리와 교차하는 점을 중심점으로 하여 이방성축 (1)에 대해 각각 45°씩의 각도를 이루도록 그림과 같이 A-B-C 방향으로 3개의 strain gage를 부착한다면, Fig. 2와

* 정회원, 신경건설주식회사 지하비축팀 부장,
Geospace Development Team, Sunkyong
Engineering & Construction LTD.

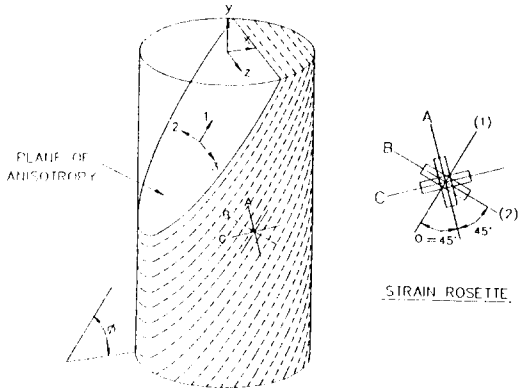


Fig. 1. Axis of anisotropy and the arrangement of strain gages.

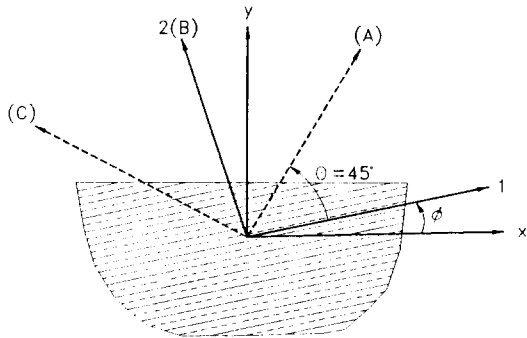


Fig. 2. Axis of coordinates in a 2-dimensional plane.

같이 2차원 평면이 구성될 수 있다. 이때 strain gage (B)의 방향은 이방성의 대칭축 (2)와 일치한다.

시험편에 대해 y축 방향으로 하중을 가하는 단축압축시험을 실시하면 다음과 같은 조건이 성립하게 된다.

- stress condition ; uni-axial

$$\sigma_x = \sigma_y \neq 0$$

$$\sigma_n = \sigma_x = \sigma_z = 0$$

- measured strain ; $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$

- elastic constants ; $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_1, G_2$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$

여기서 탄성계수는 다음과 같이 정의된다.

E_1 또는 E_2 ; 이방성축 (1) 또는 (2) 방향에 대한 영률
 ν_1 또는 G_1 ; (1)-(3) 평면에서의 포아손 비 또는 전단 계수

ν_2 또는 G_2 ; (1)-(2) 평면에서의 포아손 비 또는 전단 계수

이와 같이 3개의 strain gage를 이용한 단축압축시험에서 하중조건 및 측정되는 변형율로부터 탄성계수를 결정하는 식은 평면이방성 매질에 대한 축변환 공식 및 Hooke의 법칙으로부터 유도될 수 있다. 수식을 유도하기 전에 먼저 언급되어야 할 사항으로서, 미지의 탄성계수는 5개이지만 측정되는 탄성계수는 3개뿐이라는 점이다. 즉, 다음 장에서 알 수 있듯이 결과로서 구해지는 탄성계수는 E_1, E_2 및 G_2 에 국한되며, 포아손 비에 대해서는 별도의 고려가 필요하다.

3. 기본식

일반적인 3차원 좌표계 x-y-z와 x'-y'-z'에서 좌표축간의 방향여현이 Table 1과 같이 주어진다면 두 좌표계간의 응력성분은 다음 식으로 변환된다.²⁾

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \omega_1^2 & 2\beta_1\omega_1 & 2\alpha_1\omega_1 & 2\alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \omega_2^2 & 2\beta_2\omega_2 & 2\alpha_2\omega_2 & 2\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \omega_3^2 & 2\beta_3\omega_3 & 2\alpha_3\omega_3 & 2\alpha_3\beta_3 \\ \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\omega_1\omega_2(\beta_2\omega_1+\beta_1\omega_2)(\alpha_1\omega_3+\alpha_2\omega_3)(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_3) \\ \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\omega_1\omega_2(\beta_1\omega_2+\beta_2\omega_1)(\alpha_1\omega_3+\alpha_2\omega_3)(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_3) \\ \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\omega_1\omega_2(\beta_1\omega_2+\beta_2\omega_1)(\alpha_1\omega_2+\alpha_2\omega_1)(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

한편, 평면 이방성 매질에 대한 응력-변형률 관계식은 일반적인 Hooke의 법칙에 따라 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{-\nu_1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (2)$$

탄성계수 텐서 a_{ij} 의 좌표축 변환에 따른 일반적인 관계식을 텐서 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$a'_{ij} = a_{mn} q_{mi} q_{nj} \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3, \dots, 6) \quad (3)$$

Table 1. Direction cosines

	x	y	z
x'	α_1	β_1	ω_1
y'	α_2	β_2	ω_2
z'	α_3	β_3	ω_3

Table 2. Values of (q_{ij}) in the formulas of transformation

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	α_1^2	α_2^2	α_3^2	$2\alpha_2\alpha_3$	$2\alpha_3\alpha_1$	$2\alpha_1\alpha_2$
2	β_1^2	β_2^2	β_3^2	$2\beta_2\beta_3$	$2\beta_3\beta_1$	$2\beta_1\beta_2$
3	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2	$2\omega_2\omega_3$	$2\omega_3\omega_1$	$2\omega_1\omega_2$
4	$\beta_1\omega_1$	$\beta_2\omega_2$	$\beta_3\omega_3$	$\beta_2\omega_3+\beta_3\omega_2$	$\beta_1\omega_3+\beta_3\omega_1$	$\beta_1\omega_2+\beta_2\omega_1$
5	$\omega_1\omega_1$	$\omega_2\omega_2$	$\omega_3\omega_3$	$\omega_2\alpha_3+\omega_3\alpha_2$	$\omega_1\alpha_3+\omega_3\alpha_1$	$\omega_1\alpha_2+\omega_2\alpha_1$
6	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_3$	$\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2$	$\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1$	$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$

(3)식에서 q_{ij} 는 Table 1의 방향여현에 관련된 계수로서 각 성분은 Table 2와 같다.

또한 (3)식에 따라 변환된 좌표계에서 응력-변형을 관계식은 다음과 같다.

$$\epsilon'_i = a'_{ij} \sigma'_j \quad (4)$$

4. 탄성계수 결정식의 유도

(1)식에 따라 단축하중 방향의 응력 σ_y 를 다른 좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\phi & \dots \\ \cos^2\phi & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \sin\phi\cos\phi & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_A \\ \sigma_C \\ \sigma_3 \\ \tau_{C3} \\ \tau_{3A} \\ \tau_{AC} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(\phi+\theta) & \dots \\ \cos^2(\phi+\theta) & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \sin(\phi+\theta)\cos(\phi+\theta) & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

이방성 축좌표계 (1)-(2)-(3)에 대해 정의되어 있는 탄

Table 3. Values of transformation coefficients(q_{ij}) between coordinates (1)-(2)-(3) and A-C-(3)

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	$\cos^2\theta$	$\sin^2\theta$	0	0	0	$-2\cos\theta\sin\theta$
2	$\sin^2\theta$	$\cos^2\theta$	0	0	0	$2\sin\theta\cos\theta$
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
5	0	0	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
6	$\cos\theta\sin\theta$	$-\sin\theta\cos\theta$	0	0	0	$1-2\sin^2\theta$

성계수를 변형율이 측정되는 좌표계 A-C-(3)으로 변환하여야 한다. 이는 식(3)과 Table 2로부터 구해진다. 이때 두 좌표계 간의 방향여현에 따라 변환계수 q_{ij} 를 구하면 Table 3과 같다.

한편, 시험편에 가해지는 응력 σ_y 와 측정되는 변형을 $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ 간의 관계식은 다음과 같이 구해진다.

식 (2)와 (5)로부터,

$$\begin{aligned} \epsilon_2 = \epsilon_B &= -\frac{V_2}{E_2} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{V_2}{E_2} \sigma_3 \\ &= \left(-\frac{V_2}{E_2} \sin^2\phi + \frac{1}{E_2} \cos^2\phi\right) \sigma_y \end{aligned} \quad (7)$$

식 (4)와 (6)으로부터,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_A \\ \epsilon_C \\ \epsilon_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & a'_{16} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & a'_{26} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2(\phi+\theta) \\ \cos^2(\phi+\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\phi+\theta)\cos(\phi+\theta) \end{pmatrix} (\sigma_y) \quad (8)$$

여기서 a'_{ij} 는 식 (3)과 Table 3 으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{mn}q_{m1}a_{n1} \\ &= \sum_{n=1}^6 (a_{1n}q_{11}q_{n1} + a_{2n}q_{21}q_{n1} + \dots + a_{6n}q_{61}q_{n1}) \\ &= \frac{1}{E_1} \cos^4\theta + \frac{1}{E_2} \sin^2\theta(\sin^2\theta - 2V_2\cos^2\theta) + \frac{1}{G_2} \cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned} \quad (9)$$

같은 방법으로,

$$\begin{aligned} a'_{12} &= \frac{1}{E_1} \cos^2\theta\sin^2\theta - \frac{1}{E_2} \\ &= (V_2\cos^4\theta + V_2\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta) - \frac{1}{G_2} \cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned} \quad (10)$$

$$a'_{16} = -\frac{2}{E_1} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{2}{E_2} (v_2 \cos \theta \sin^3 \theta - v_2 \cos^3 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^3 \theta) + \frac{1}{G_2} \cos \theta \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{G_2} \cos \theta \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \quad (11)$$

$$a'_{21} = \frac{1}{E_1} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{E_2} (v_2 \sin^4 \theta + v_2 \cos^4 \theta - \cos^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{G_2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (12)$$

$$a'_{22} = \frac{1}{E_1} \sin^4 \theta - \frac{1}{E_2} (2v_2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos^4 \theta) + \frac{1}{G_2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (13)$$

$$a'_{26} = -\frac{2}{E_1} \cos \theta \sin^3 \theta + \frac{2}{E_2} (v_2 \cos^3 \theta \sin \theta - v_2 \cos \theta \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \sin \theta) - \frac{2}{G_2} \cos \theta \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \quad (14)$$

$\theta = 45^\circ$ 이므로,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - 2 \frac{v_2}{E_2} + \frac{1}{G_2} \right) \\ a'_{12} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - 2 \frac{v_2}{E_2} - \frac{1}{G_2} \right) \\ a'_{16} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \\ a'_{21} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - 2 \frac{v_2}{E_2} - \frac{1}{G_2} \right) \\ a'_{22} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - 2 \frac{v_2}{E_2} + \frac{1}{G_2} \right) \\ a'_{26} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

이 된다.

식 (7), (9), (10) 및 (15)로부터

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_A}{\sigma_y} &= \frac{A}{E_1} + \frac{B}{E_2} + \frac{C}{G_2} \\ \frac{\epsilon_B}{\sigma_y} &= \frac{D}{E_2} \\ \frac{\epsilon_C}{\sigma_y} &= \frac{A}{E_1} + \frac{B}{E_2} - \frac{C}{G_2} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

$$A = \frac{1 - \sin 2(\phi + \theta)}{4}$$

$$B = \frac{1 - 2v_2 + \sin 2(\phi + \theta)}{4}$$

$$C = \frac{\sin^2(\phi + \theta) - \cos^2(\phi + \theta)}{4}$$

$$D = \cos^2 \phi - v_2 \sin^2 \phi$$

이다. 식 (16)에서

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_A}{\sigma_y} \\ \frac{\epsilon_B}{\sigma_y} \\ \frac{\epsilon_C}{\sigma_y} \end{pmatrix} \quad (18)$$

이라면, 최종적으로 다음 식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} &= \frac{1}{2A} (y_1 - \frac{2B}{D} y_2 + y_3) \\ \frac{1}{E_2} &= \frac{1}{D} y_2 \\ \frac{1}{G_2} &= \frac{1}{2C} (y_1 - y_3) \end{aligned} \quad (19)$$

5. 고찰 및 결론

Fig. 1과 같이 3개의 strain gage를 부착한 평면 이방성 암석편을 이용하여 단축압축시험에 의해 식 (17), (18) 및 (19)로부터 이방성 탄성계수를 결정할 수 있다. 그러나 이 경우에 v_1 과 v_2 는 구해지지 않으며, 더구나 v_2 는 식 (17)에서 상수로 사용되고 있다.

일반적으로 포아손비는 이방성의 정도가 영율에 비해 크지 않으며 응력분포에 미치는 영향도 크지 않다. 따라서 포아손비에 대해서는 $v_1 = v_2$ 로 가정하여 여러방향의 층리를 가지는 다수의 시험편에 대해 일반적인 단축압축시험을 통해 구한 값을 평균적으로 사용하는 것을 제안하고자 한다. 그렇지 않다면 포아손비에 대해 parametric study를 실시하여 포아손비의 이방성이 터널 주변의 응력분포에 미치는 민감도를 분석하고, 이의 영향이 무시될 수 없는 것으로 판단된다면 별도의 시험을 통하여 이방성 축방향에 따른 포아손 비를 정확히 구하는 것이 바람직하다.

현재 지하철 등의 터널설계를 위해 수행되는 초기 단

계의 지질조사 시에는 본 논문에서 제시된 시험법에 의해 층리가 현저한 평면이방성 암석의 영율과 전단계수를 손쉽게 구할 수 있을 것이다. 이로부터 터널구조해석 단계에서 암반의 이방성을 고려할 것인가에 대한 판단이 가능하며, 구해진 값은 수치해석의 입력자료로 활용될 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

1. 김호영, 1982, 이방성 암반 내 공동주변의 거동에 관한 수치해석 및 모형실험 연구, 서울대학교 대학원 석사학위 논문
2. Lekhnitskii, S.G., 1963, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day Inc.