

춘양 화강암체 주변 두음리층에 산출하는 십자석-흑운모-홍주석-석류석 광물조합: 대수학적 분석

양판석 · 조문섭

서울대학교 자연과학대학 지질학과

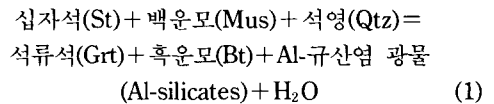
요 약: 춘양 화강암체 주변의 두음리층 변성이질암내에서 십자석-흑운모-홍주석-석류석 (SBAG) 광물 조합과 부광물 조합 (SBA 및 SBG)이 홍주석과 십자석대에 걸쳐 흔히 산출한다. SBAG 광물 조합은 KFMASH (K_2O -FeO-MgO- Al_2O_3 - SiO_2 - H_2O) 모델 계에서 자유도가 1이기 때문에 광역적으로 산출하기 힘들다. 이 SBAG (부)광물 조합의 평형 관계를 밝히기 위하여 투영법과 특이치 분해법 (Singular Value Decomposition, SVD, method)을 사용하였다. SBAG 광물 조합을 가지는 단일 시료는 SVD 모델 반응식을 보이지 않으며 비-KFMASH 성분에 의해 안정되었음을 나타낸다. 한편, SBAG 및 부광물 조합은 AFM-Mn 성분 공간 내에서 서로 교차하기 때문에 반응 관계를 시사한다. 그러나 SVD 모델링은 이들 사이에 반응 관계를 지지하지 못한다. 그러므로, SBAG와 부광물 조합은 전암 성분이나 μ_{H_2O} 의 차이에 의해 두음리층에서 비교적 넓게 산출함을 알 수 있다. 두음리층의 홍주석대 및 규선석대에서 십자석이 안정함은 석류석-사장석-흑운모-백운모 지압계를 사용하여 구한 변성 압력과도 일치한다.

핵심어: 춘양화강암, 두음리층, SBAG 광물조합, 특이치 분해법

서 론

춘양 화강암체 주변에 산출하는 변성이질암류는 열 변성대에서 보기 드문 남침성을 비롯해 (Imai *et al.*, 1982; 안건상외, 1993) 특징적인 변성광물들을 잘 보여 준다. 연구 지역은 북동부 영남육괴의 북동부에 위치하며 (Fig. 1), 선캠브리아기의 원남층과 분천화강암질 편마암이 연구 지역의 남쪽과 북동쪽에 넓게 분포한다. 변성 사질-이질암으로 주로 구성되는 선캠브리아 울리층은 북서-남동 주향의 대상 분포를 보인다. 조선누층군의 장산규암, 두음리층, 장군석회암과 평안누층군의 동수곡층 및 재산층은 저반상의 쥬라기 춘양 화강암체와 접촉 또는 인접하여 산출한다. 춘양화강암체 주변에 흑운모대, 석류석대, 십자석대, 홍주석대 및 규선석대가 점진적으로 발달한다 (Yang and Cho, 1994). 동서로 발달하는 재산 및 장군 드러스트, 북서 방향의 울리 배사가 연구 지역의 지질 구조를 지배하고 있다.

두음리층에서는 석영 및 백운모와 공존하는 십자석-흑운모-Al-규산염 광물-석류석 (SBAG) 광물조합이 홍주석대와 규선석대에 걸쳐 다수 산출한다. 이 SBAG 광물 조합은 아래의 십자석-붕괴 반응을 대표한다.



SBAG 광물 조합은 K_2O -FeO-MgO- Al_2O_3 - SiO_2 - H_2O (KFMASH) 모델 계(model system)에서 자유도가 1이기 때문에 변성 이질암 내에서 드물게 산출한다. Carmichael (1978)이 압력대 (bathozone)를 정의하는데 사용한 반응 (1)의 안정 관계는 연구 지역의 변성 조건, 특히 변성 압력을 정의하는데 매우 중요하다. 따라서 우리는 홍주석대와 규선석대에서 산출하는 SBAG 광물 조합이 열역학적으로 안정한지, 그리고 SBAG 광물 조합 및 부광물 조합 (SBG 및 SBA)간에 반응 관계가 성립될 수 있는지 알아 보고자 한다.

다수의 두음리층 시료에서 SBAG 광물 조합이 산출하는 이유로는 (1) 비평형 관계, (2) 변성 유체의 화학 포텐셜 (chemical potential; μ_{H_2O}) 차이, 그리고 (3) 비-KFMASH 성분의 효과를 들 수 있다. 첫번째 가능성은 자세한 암석기재를 통하여, 나머지 가능성은 각종 투영도와 대수학적 방법을 사용해 검토하였다.

변성 암석학에서 평형 관계에 있는 광물 조합을

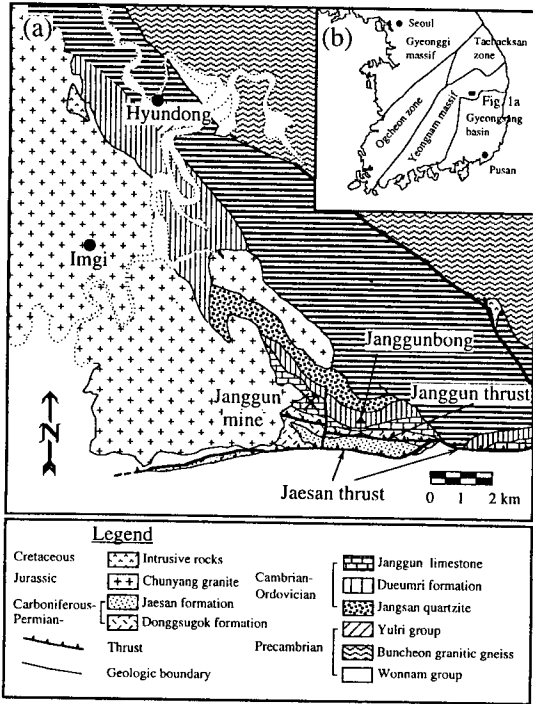


Fig. 1. (a) Geological map of the study area; and (b) an index map showing the location (closed box) of the study area.

찾거나, 또는 변성 반응 관계를 밝히기 위하여 투영법이 널리 사용되어 왔다 (예, Thompson, 1957). 그러나 투영법은 단순한 모델 계를 기초로 하기 때문에 변성 광물에서 검출되는 모든 성분들을 엄격히 고려할 수 없는 단점을 지닌다. 따라서 Greenwood (1967)는 복잡한 다성분 계에서 질량-균형 (mass-balance) 관계를 규명할 수 있는 대수학적 방법을 제시하였다. 이와 유사하게 Fisher (1989)는 특이치 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)라는 대수학적 방법이 변성 광물 조합 간의 또는 동일 조합 내에서의 질량-균형 관계를 밝히는데 사용될 수 있다고 제안하였다. 우리는 두음리층의 SBAG 광물 조합이 단변수적 (univariant)인지 또는 비-KFMASH 성분 때문에 안정한지를 구분하기 위해 SVD 방법을 사용하였다. 만약 반응 관계가 성립된다면, SBAG 광물 조합은 단변수적이며 각 성분들의 화학 포텐셜은 내적으로 고정되어 있을 것이다. 그러나 반응 관계가 존재하지 않으면, SBAG 광물 조합은 다변수적 (multi-variant)이며 구성 광물의 화학 조성은 전암 성분의 지배를 받는다. 후자의 경우,

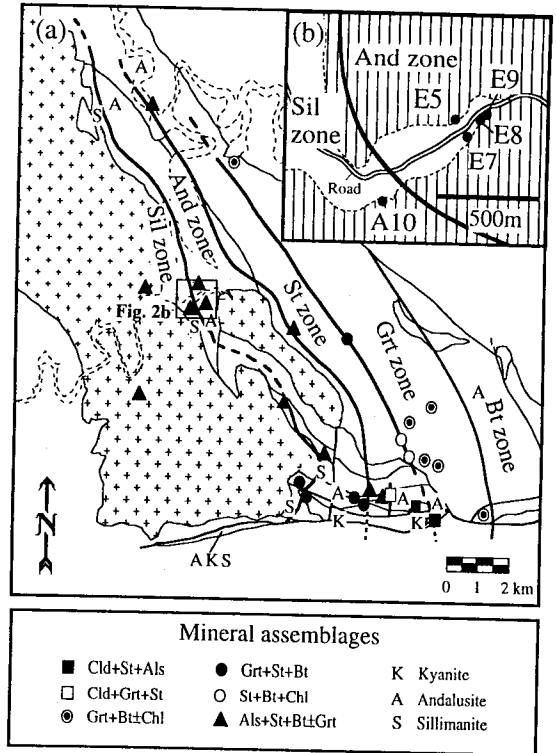


Fig. 2. (a) Mineral assemblage map showing five metamorphic zones of the study area. Heavy curves represent the zone boundaries; and (b) locations of the samples used for the SVD modelling. Solid curve represents the boundary between sillimanite and andalusite zones. Abbreviations: Bt, biotite; Chl, chlorite; Cld, chloritoid; St, staurolite; Als, Al-silicates; and Grt, garnet.

비-KFMASH 성분 때문에 SBAG 광물 중 한 개 이상 안정할 수 있으나, μ_{H_2O} 가 반드시 외적으로 고정되었다고 할 수는 없다 (Giaramita and Day, 1991).

변성 작용

연구 지역의 변성 퇴적암류들은 2회의 광역 변성작용과 춘양 화강암의 관입에 따른 열 변성작용을 경험하였다 (Yang and Cho, 1994). 1차 광역 변성작용(M1)의 특징은 후기의 다른 변성작용에 의해 대부분 소실되었지만, 가상(pseudomorph) 및 잔류 광물들(석류석, 홍주석, 클로리토이드(chloritoid))의 산출로부터 M₁의 변성도가 녹색편암상-각섬암상의 전이대에 해당되리라 추정된다. 2차 광역 변성작용

(M₂)은 장군 드러스트의 하반에서 주로 관찰되며, 홍주석이 남정석으로 전이하는 조직에 의해 대표되는 변성 압력의 증가가 특징적이다. 장군 드러스트의 상반에서 남정석은 산출되지 않는다. M₂ 이후에 관입한 춘양 화강암은 연구 지역의 최고 (peak) 변성 광물조합을 형성시킨 열 변성작용(M₃)을 수반하였다. M₃에 의해 5개의 변성분대가 화강암체 주변에 발달한다 (Fig. 2a). 마지막 변성작용(M₄)은 후퇴변성 작용에 해당되며 백운모, 녹니석, 클로리토이드와 같은 녹색 편암상 광물을 생성시켰다. 가장 강한 열리면은 M₁과 동시 혹은 후기, 즉 M₂ 이전에 형성되었다. M₃에 의해 M₁-M₂ 변성 광물들은 부분적으로 치환되거나 완전히 재결정되었다. 각종 지온계를 사용하여 추정된 각 변성분대의 온도는 493 ± 20°C (석류석대 및 십자석대), 547 ± 22°C (홍주석대), 그리고 593 ± 23°C (규선석대) 이다. 연구 지역의 변성 압력은 장군 드러스트 단층의 상하반에서 각각 3.5 ± 0.5 kbar와 4.8 ± 0.7 kbar로 추정되며 0.4 kbar 이상의 압력 차이를 보인다. 연구 지역의 변성 작용에 관한 자세한 내용은 추후 발표할 예정이다.

투영법과 대수학적 분석에 사용된 변성 퇴적암 시료들은 모두 두음리층의 표식지인 두음리 일대에서 산출한다. 이들 시료들은 주로 이질 편암 또는 세립의 사질 편암으로 구성된다. 두음리 지역에서 도로를 따라 채취한 (Fig. 2b) 5개의 표품들은 규선석대에 속하는 A10을 제외하고는 모두 홍주석대에 속한다. E5와 E9는 서로 약 150 m 떨어져 있으며, E8과 E9는 같은 노두에서 채취하였다. 이들 표품 사이에는 단층과 같은 불연속면이 관찰되지 않는다.

광물조합과 조직

분석된 시료들의 광물조합과 모드 (mode) 값은

Table 1에 수록되어 있다. A10, E7, 그리고 E8이 SBAG 광물 조합을 보이는 반면, E5와 E9는 SBAG 광물 조합 중 각각 석류석과 홍주석이 없는 3개의 AFM 광물(SBA 또는 SBG)로 구성되어 있다. 대부분의 시료는 흑운모, 홍주석, 십자석, 석류석의 반상 변정들과 소량의 백운모, 사장석, 티탄철석, 전기석, 석영을 포함한다. 모든 시료에서 가장 흔한 AFM 광물은 흑운모이다. 규선석대에 속하는 A10은 규선석 (<1%) 보다 훨씬 더 많은 양의 홍주석도 포함한다. 3개 시료에서 관찰된 (Table 1) 녹니석은 주로 흑운모를 치환하거나 석류석과 십자석 반상 변정의 내부에 발달한 틈을 따라 생성된 이차 광물이다. 이러한 녹니석은 후퇴 변성작용에 의해 생성되었기 때문에 SVD 모델링에서 고려되지 않았다.

백운모와 흑운모는 편암의 주엽리면을 구성하며 흔히 파랑 벽개를 이룬다 (Fig. 3a). SBAG 광물 조합을 구성하는 석류석, 십자석, 흑운모와 홍주석은 외부 엽리를 자르며 반상 변정으로 산출한다 (Fig. 3b). 따라서 이들은 주엽리면의 형성이후에 성장하였으며 광역 변성작용의 잔류물일 가능성은 없다. E8에서 관찰되는 석류석은 석영 포유물에 의해 정의되는 2 단계의 성장 조직을 보여 준다 (Fig. 3a). 십자석은 일반적으로 포획 변정 (poikiloblast)으로 산출되며 석영이나 티탄철석을 포유한다. 홍주석은 타형의 반상 변정으로 산출하며 석영과 흑운모의 포유물을 많이 함유한다 (Fig. 3c). 석류석, 십자석 및 홍주석의 가장자리는 견운모와 흑운모로 치환되는 경우가 흔하다. 흑운모는 주엽리면을 자르기도 하지만 대부분은 주엽리면과 대체로 평행하게 발달한다. 대부분의 편암 시료에서 백운모는 뚜렷한 정향 배열을 보여준다. 그러나, S₂ 엽리면을 자르는 백운모가 다수 관찰되며, 이는 백운모가 S₂ 이후에 재결정되었음을 시사한다.

Table 1. Mineral assemblages and modes of the analyzed samples*

Sp. no.	Grt	St	Bt	And	Sil	Pl	Ilm	Tur	Mus	Wm**	Chl**	Qtz
A10	<1	<1	15.2	9.0	<1	1<	<1	<1	8.4			65.8
E5		1.6	38.4	<1				<1	18.6		<1	40.6
E7	<1	<1	20.6	<1		1.2		<1	1.6	1.0	<1	74.6
E8	<1	<1	41.2	12.0		<1	<1	<1	18.2	4.3	<1	24.3
E9	<1	1.2	42.8			1.2	<1	<1	12.0	2.4		39.8

* Mineral abbreviations : And, andalusite; Bt, biotite; Chl, chlorite; Grt, garnet; Ilm, ilmenite; Mus, muscovite; Pl, plagioclase; Qtz, quartz; Sil, sillimanite; St, staurolite; Tur, tourmaline; Wm, white mica

** Secondary minerals

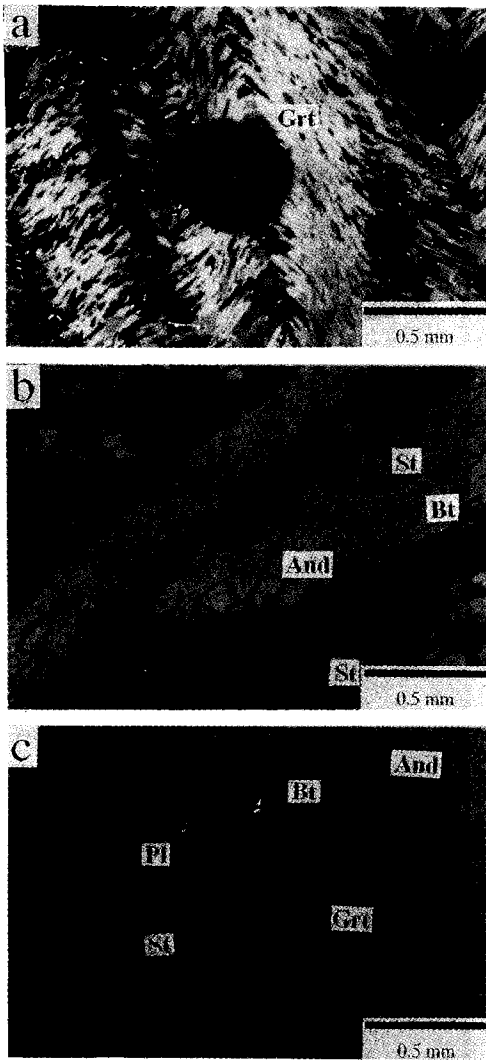


Fig. 3. Photomicrographs showing characteristic textures and assemblages of the Dueumri Formation: (a) garnet overgrowing major foliation (sp. E8); (b) andalusite porphyroblast containing inclusions of biotite and staurolite (sp. E9); and (c) occurrence of the SBAG assemblage (sp. E8).

광물 성분

조암광물의 성분은 서울대학교 지질과학과의 JEOL 733 JXA 전자현미경을 사용하여 분석하였다. 분석 조건은 15 kv의 가속 전압, 10 nA의 빔 전류 (beam current) 및 5 μm 의 빔 직경이다. 분석에 사용된 표준 시료는 천연 및 인공 합성 광물이다 (이 광진과 조문섭, 1992). SVD 모델링을 위해서는 여러

개의 광물들이 공존하는 부분에 대해 각 광물의 가장자리에서 3 내지 10 점(point)을 분석하였다.

대표적인 시료(E8과 E9)에 대한 광물 성분의 평균값과 표준 편차 (1s)는 Table 2에 수록되어 있다. 표준 편차는 SVD 모델링의 유효성을 판단하는데 사용된다. 석류석 반상 변정은 다른 AFM 광물과는 달리 대부분 뚜렷한 화학적 누대구조를 보여 준다 (Fig. 4). 분석된 각 입자에서 스페사틴의 함량은 중심부에서 가장자리로 갈수록 감소하므로 석류석이 온도가 증가하는 변성 환경에서 성장하였음을 시사한다. 일부 시료에서는 사장석 결정 또한 누대 구조를 보여 주지만, 조성의 변화는 체계적이지 않다. 화학적 누대구조를 보이는 석류석과 사장석의 경우 가장자리 부분이 다른 광물들과 평형을 이루었다고 가정하였다.

투영법

앞에서 언급한대로 두 광물 조합간의 상관관계는 적절한 투영법을 사용하여 검토해 볼 수 있다. Fig. 5의 투영도에서 석영, 백운모, 티탄철석 및 변성 유체는 항상 존재하는 것으로 가정하였다. AFM 삼각도 (Thompson, 1957) 에서 SBAG 광물 조합과 부광물 조합은 상당한 중첩을 보인다 (Fig. 5a). 이런 중첩은 CaO나 MnO와 같은 비-KFMASH 성분의 변화 때문에 나타날 수 있다 (Ghent, 1975; Lang and Rice, 1985; Spear and Cheney, 1989).

MnO 성분이 AFM 상관관계에 미치는 영향을 알아보기 위하여 AFM-Mn 투영도 (Spear, 1988)를 사용하였다 (Fig. 5b). 그림을 단순화하기 위해 SBAG 광물 조합을 가지는 E7과 십자석-흑운모-석류석 (SBG) 광물 조합을 가지는 E9를 대표적으로 나타내었다. Mn은 주로 석류석에서 소량으로 산출하기 때문에 10배 값으로 표시하였다. E7이 E9 보다 Fe 양이 적은 흑운모와 Mn 양이 큰 석류석을 포함하기 때문에 두 광물 조합은 AFM-Mn 공간에서 서로 교차한다. 한편, Fig. 5에 나타내지는 않았지만, AFM-Ca 공간에서는 E7이 E9 보다 Ca 양이 작은 석류석을 포함하기 때문에 서로 교차하지 않는다.

SBAG (부)광물 조합 사이의 $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$ 차이를 알아보기 위하여 십자석을 사용해 FeO-MgO-H₂O 삼각도 (Rumble, 1978; Spear *et al.*, 1982)에 투영하였다 (Fig. 5c). 분석된 십자석의 Fe/(Fe+Mg) 평균 값은 0.82 ± 0.05 (1s)이다. 홍주석은 Fig. 5c에서 음으로

Table 2. Average compositions and standard deviations (1s) of staurolite, biotite, andalusite, garnet, plagioclase, and muscovite

Sp. no. Minerals	E8						E9				
	St	Bt	And	Grt	Pl	Mus	St	Bt	Grt	Pl	Mus
n	5	14	3	5	6	7	3	9	4	7	4
Compositions											
O	46	11	5	12	8	11	46	11	12	8	11
Si	7.617	2.842	0.997	2.993	2.750	3.041	7.676	2.679	2.986	2.140	3.090
Ti	0.079	0.087	0.000	0.005	0.001	0.014	0.088	0.081	0.003	0.000	0.012
Al	18.015	1.889	1.999	2.027	1.236	2.825	17.837	1.760	1.994	1.041	2.812
Fe	3.010	1.460	0.004	2.300	0.003	0.114	3.199	1.458	2.495	0.003	0.054
Mg	0.488	0.958	0.002	0.231	0.000	0.080	0.500	0.991	0.248	0.000	0.050
Mn	0.058	0.008	0.000	0.300	0.000	0.001	0.004	0.001	0.128	0.000	0.001
Ca	0.005	0.002	0.000	0.128	0.226	0.001	0.000	0.001	0.152	0.228	0.001
Na	0.016	0.026	0.001	0.002	0.823	0.186	0.016	0.031	0.005	0.585	0.171
K	0.003	0.868	0.000	0.003	0.004	0.723	0.000	0.741	0.001	0.003	0.760
Standard deviations											
Si	0.074	0.106	0.002	0.009	0.004	0.038	0.033	0.026	0.004	0.008	0.010
Ti	0.007	0.008	0.000	0.002	0.000	0.002	0.003	0.007	0.001	0.000	0.002
Al	0.085	0.071	0.004	0.005	0.005	0.041	0.010	0.015	0.007	0.013	0.007
Fe	0.065	0.102	0.001	0.027	0.001	0.088	0.030	0.039	0.010	0.002	0.004
Mg	0.018	0.062	0.000	0.007	0.000	0.053	0.036	0.038	0.016	0.000	0.004
Mn	0.007	0.002	0.000	0.007	0.000	0.002	0.004	0.002	0.008	0.000	0.001
Ca	0.004	0.001	0.000	0.016	0.004	0.001	0.000	0.001	0.024	0.010	0.001
Na	0.008	0.004	0.000	0.002	0.008	0.007	0.009	0.004	0.001	0.013	0.003
K	0.002	0.050	0.000	0.001	0.002	0.033	0.000	0.032	0.001	0.001	0.056

* n=number of analyses

투영된다. 따라서 홍주석으로의 연결선 (tie-line)은 홍주석을 나타내는 음의 투영점으로부터 멀어지는 방향의 화살표로 표시된다. Fig. 5c에서 E7의 홍주석-흑운모-석류석 광물 조합은 2변수적 (divariant) 이기 때문에 주어진 온도와 압력하에서 일정한 μ_{H_2O} 를 정의한다. 한편, E9와 같이 석류석과 흑운모가 공존할 경우 자유도가 3이 되며 μ_{H_2O} 는 가변적이다. Fig. 5c의 투영 결과는 E7이 E9보다 낮은 μ_{H_2O} 에서 평형을 이루었음을 보여 준다.

서로 인접한 E7과 E9의 변성 온도와 압력이 거의 비슷하다면, Fig. 5b와 c는 이들 시료의 SBAG와 부광물 조합이 전암 성분이나 μ_{H_2O} 차이에 의해 안정될 수 있음을 시사한다. 그러나 이러한 투영도들은 복잡한 화학 계를 단순화 시켰기 때문에 잘못된 해석을 유발할 수 있다. 즉, 비-KFMASH 성분을 고려하지 않거나, 십자석과 백운모의 평균 성분으로부터 투영되었기 때문이다. 투영법은 또한 광물 분석치의 오차를 고려하거나 표현하기가 어렵다. 반

면에 대수학적 방법은 비-KFMASH 성분을 제거할 필요가 없을 뿐만 아니라 분석 오차를 고려할 수 있기 때문에 좀 더 엄격한 변성 암석학적 해석을 할 수 있다.

대수학적 분석

방법

Fig. 5에서 보여진 것처럼 투영도에서 연결선이 교차하는 경우, 대수학적 방법을 사용하여 광물들 사이의 반응 관계를 확인할 수 있다. 현재 가용한 대수학적 방법으로 Greenwood (1967)가 제안한 최소 자승 회귀 분석법과 Fisher (1989)의 SVD가 있다. 전자는 미지수보다 식의 숫자가 작기 때문에 계산이 복잡하여서 실제 적용하는데 어려움이 따른다. 반면, SVD 방법은 모든 분석치의 오차를 고려할 수 있으며 계산 방법이 최소 자승 회귀 분석법 보다 단순하고

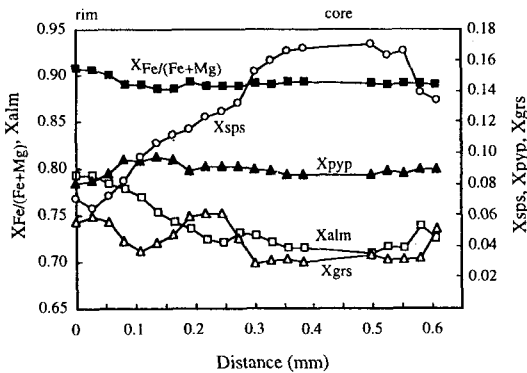


Fig. 4. Representative zoning profile of sample E9 in the Dueumri Formation.

안정하다. SVD 모델링은 Fisher (1989)의 SVD-MOD 프로그램을 사용하였다.

특이치 분해법은 어떤 행렬 (matrix)의 각 원소가 오차를 가질 경우, 그 행렬의 등위 (rank)를 오차의 허용 범위 내에서 구하는 방법 중의 하나이다. SVD 방법의 절차를 간단히 설명하면, 우선 각 성분의 행렬 M을 다른 행렬들의 곱으로 표현하는 것이다:

$$M = U \cdot W \cdot V^t \quad (2)$$

성분 행렬 M에서 행은 각 광물의 구성원소를, 그리고 열은 광물들의 종류를 나타낸다. 식 (2)에서 U와 V는 대각 열들 (orthogonal columns)을 가지며, W는 음의 원소를 가지지 않는 대각 행렬이다. 행렬 W의 원소는 행렬 M의 고유치 (singular value)를 가지며 이들은 크기가 감소하는 순으로 나타난다. 따라서, 행렬 M의 등위는 영이 아닌 고유치의 수와 같다. W에서 가장 작고 영이 아닌 고유치를 영으로 둔 것을 W'로 정의한다. 그리고나서 아래의 식 (3)에 따라 역으로 계산하면 초기 행렬 M와 유사한 새로운 행렬 M'이 만들어 진다.

$$M' = U \cdot W' \cdot V^t \quad (3)$$

M'는 M보다 등위가 감소한 행렬이며, 분석 오차의 허용범위 내에서 초기 행렬과 유사할 경우 만족할 만한 모델로 받아들여진다. 각 광물의 원소 함량에 따라 분석의 신뢰 수준이 다르기 때문에 가중치를 주어야 하나 아직 적절한 방법이 알려져 있지 않다. 따라서 이 연구에서는 가중치를 적용하지 않았다. 특이치 분해법에 대한 좀 더 구체적인 설명은 부록에 수록되어 있다.

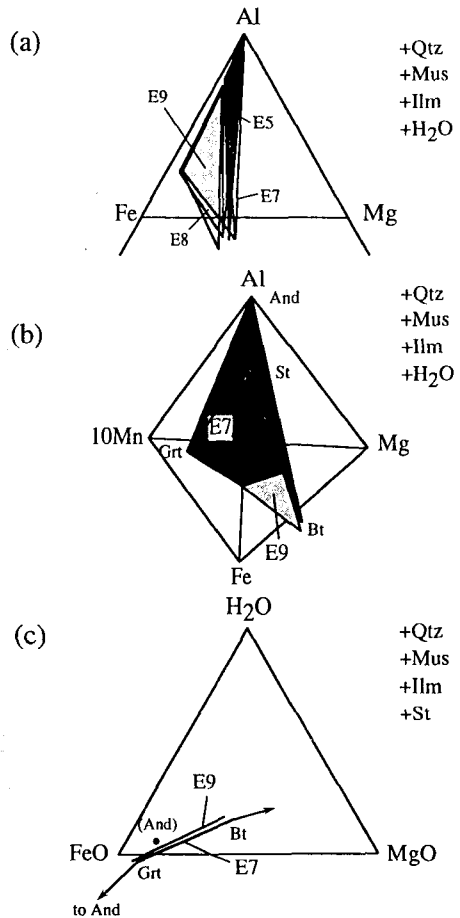


Fig. 5. (a) An AFM diagram (Thompson, 1957) showing the SBAG assemblage and its sub-assemblages. Heavily and lightly dotted triangles represent SBA (E5) and SBG (E9) assemblages, respectively. The SBAG assemblages of E7 and E8 are shown with no pattern; (b) AFM-Mn projection (Spear, 1988) showing the intersection of the SBAG assemblage (E7; heavily dotted) and its sub-assemblage (E9; lightly dotted). (c) H₂O-FeO-MgO projection (Rumble, 1978; Spear *et al.*, 1982) of the SBAG (E7) and the SBG (E9) assemblages.

특이치 분해법에서 얻어진 반응은 두 가지 요건이 충족되면 유효한 것으로 간주된다. 첫째, 모든 상들의 반응 계수가 0이 아니어야 한다. 둘째, 모든 광물의 모델 성분이 측정된 광물의 분석 오차 범위 내에 속해야 한다. 잔차 (residual)는 모델 성분과 광물의 분석치 사이의 차이로, 그리고 오차비는 잔차와 분석오차의 비로 정의된다. 분석 오차가 95%의 신뢰도를 대표할 경우, 1 보다 큰 오차비의 수가

Table 3. Error ratios greater than the unit value in the SVD modelling of single specimens

Sp. no.	Element	Bt	Mus	St	Grt	Pl	Ilm	And	E.R. (%)*
A10	Ti		3.55					16.53	24
	Fe		1.99					13.91	
	Mg		3.84					26.83	
	Mn							1.49	
	Ca							1.95	
	Na							10.10	
E7	K		1.52	2.02			1.23	31.76	
	Fe							5.97	13
	Mg							21.53	
	Mn		2.80					12.83	
	Na							30.42	
E8	K			1.39	2.12				
	Al							1.36	24
	Fe							14.04	
	Mg							21.60	
	Mn		1.14					5.82	
	Na	1.50	1.74		1.79			31.05	
K			2.59	1.58	1.05		27.39		

*Percentage of the number of error ratios exceeding 1.00 relative to total number of measured ratios.

전체 오차비 수의 95% 보다 작아야 하고 나머지도 2.0 보다 크지 않아야 유효하다 (Fisher, 1989).

SVD 방법으로 두 광물 조합간의 반응관계를 검토해 보기 위해서 첫번째 광물 조합의 상들을 포함하는 행렬을 좌측에 두번째 광물 조합의 상들을 오른쪽에 둔다 (부록사참조). SiO₂는 모든 광물 조합에 존재하는 석영에 의해 균형을 맞출 수 있기 때문에 행렬식에서 제외하였다. Zn과 Li은 십자석에만 주로 존재하기 때문에 (예, Pigage, 1982) 고려하지 않았다. 주로 H₂O로 구성된 변성 유체는 항상 존재한다고 가정하였다.

단일 시료 내에서의 질량 균형

질량-균형의 조건을 만족시키는 반응식을 찾기 위하여 SBAG 광물 조합을 갖는 3개의 시료 (A10, E7 과 E8)에 대해 특이치 분해법을 각각 적용하였다. 각 시료에 대한 SVD 모델링이 유효한지는 앞에서 기술한대로 Table 3의 오차 비로부터 결정할 수 있다. 모든 시료에서 홍주석은 대부분의 원소에 대해 1 보다 큰 오차비를 보인다. 이는 홍주석 내에서 이들

Table 4. Misfit between matrices of original composition and those of reduced rank in the SVD modelling of specimen pairs

Sp. no.	Element	Bt	Mus	St	Grt	Pl	And	E.R. (%)
A10 and E7								
A10	Ca	2.56	3.18	4.14			3.70	7
E7	Ca	1.27	2.22	4.91			4.27	
A10 and E8								
A10	Ca	2.41	3.54	6.39			2.48	7
E8	Ca	1.75	3.30	3.40			2.72	
E7 and E8								
E7	Ti	6.32	1.52	2.87	2.68		6.67	9
E8	Ti	2.24	2.55	1.73	3.28		6.04	
E7 and E5								
E7	Ti	1.20				1.08		11
	Mn	1.86				3.37	2.26	
	Ca	1.88		2.09			1.14	
E5	Mg					1.34		
	Mn	3.49						
	Ca	3.52		1.33				
E7 and E9								
E7	Ti	7.17		3.24	2.63	1.13	9.12	9
E9	Ti	2.68	1.29	4.86	3.93	2.16		

원소의 함량이 극히 작은데 기인한다 (Table 2). 홍주석 외에도 여러 광물에서 Al을 제외한 다른 원소들은 1 보다 큰 오차비를 보이기도 하며, 그 중 상당수는 2 보다 큰 오차비를 보인다. 3개의 시료에서 1 보다 작은 오차비의 수는 76~87% 이고 그 보다 큰 오차비를 보이는 원소들도 많기 때문에 단일 표품 내에서 질량-균형 관계가 성립되지 않는다.

위 모델링에서 Ca-사장석과 스페사틴, 티탄철석과 같은 단성분 상 (end-member phase)을 임의로 포함시켜 계산해 보아도 질량-균형 관계는 성립하지 않는다. 결론적으로, 단일 시료에 대한 SVD 모델링은 SBAG 광물들 사이에 반응관계가 없음을 나타내 준다.

광물조합간의 반응

SBAG 광물 조합을 갖는 A10, E7 및 E8과 부 광물 조합을 갖는 E5 (십자석-흑운모-홍주석, SBA) 및 E9 (십자석-흑운모-석류석, SBG) 사이에 변성반응이

Table 5. Apparent SVD model reactions between specimen pairs

Sp. no.	Model reactions*
E5-E8	$St - 1.26Bt + 2.40Mus + 2.12And - 0.23Pl = -0.14Gr + 1.15Bt + 0.15Pl - 0.86St - 2.17Mus + 3.38And;$ $St - 2.86Bt - 1.33Mus + 0.72And + 0.31Pl = -0.01Gr + 3.28Bt - 0.10Pl - 1.23St + 0.26Mus + 2.11And;$ $-0.09Bt + 0.56Mus - 0.55And - 0.04Pl = 0.05Bt + 0.013Pl - 0.46Mus + 0.40And.$
E8-E9	$Gr + 1.59Bt - 0.40Pl - 2.90St - 0.51Mus + 0.57And = -1.48Bt - 1.21Gr + 0.11Mus + 0.69Pl + 2.92St;$ $-0.07Bt + 0.06Pl + 0.03St - 0.72Mus - 0.07And = 0.09Bt - 0.01Gr + 0.69Mus - 0.05Pl - 0.01St;$ $Gr - 4.96Bt - 1.76Pl - 1.99St + 1.10Mus - 2.91And = 4.64Bt - 1.25Gr + 0.11Mus + 2.08Pl + 2.24St.$

* Quartz and fluid phase are assumed to be in excess.

성립하는지 알아 보기 위하여 SVD 모델링을 하였다. 그 결과는 Table 4에 정리되어 있다. E7-E5 시료 쌍에서 Ti, Mn, Ca와 Mg가 1 보다 큰 오차비를 가지며 이들 오차비는 전체 오차비 수의 11 %를 차지한다. 나머지 시료 쌍들은 한 원소에 대해서만 1 보다 큰 오차비를 보이지만 그 비율은 5% 이상이다.

이와는 달리 E5-E8 및 E8-E9 표품간의 모델에서는 모든 원소의 오차비가 1 보다 작다. 따라서 E5-E8과 E8-E9는 Table 5에 수록된 변성 반응 관계가 성립되는 듯 보인다. Table 5에서 모델 반응식의 좌측 광물들은 시료 쌍의 좌측 시료에, 모델 반응식의 우측 광물들은 시료 쌍의 우측 시료에 속한다. 그러나, 이 모델 반응들 중 일부는 반응 계수가 0인 상을 포함하기도 한다. 더구나, 이 모델 반응들은 두 개의 표품이 반응 관계에 있다면 지켜져야 할 양립성 (compatibility)을 보여 주지 않는다. 즉, 모델 반응식에서 한 표품의 모든 광물은 반응물로, 다른 표품의 모든 광물들은 생성물로 나타나야 되기 때문에 (Fisher, 1989), E5-E8 및 E8-E9 사이에 반응관계가 성립한다고 할 수 없다. 이들 표품들에 단일 표품에 대한 모델링과 마찬가지로 스페사틴, 그로솔라, 티탄철석과 같은 단성분 상을 임의로 포함시켜도 모델링은 성립하지 않는다.

토 의

여러 중압 변성대 지역에서 십자석의 붕괴 반응은 변성 분대의 설정에 중요한 지시자로 사용되어 왔으며 (예, Labotka, 1980; Novak and Holdaway, 1981; and Lang and Rice, 1985), Carmichael (1978)은 이 반응을 토대로 압력대를 정의한 바가 있다. 십자석 붕괴-반응은 변성 이질암에서 십자석이 석류석-흑운모-Al-규산염 광물에 의해 치환되는 반응 (1)에 의해 정의된다. 그러나 대부분의 변성대에서 SBAG 광물 조합은 다변수적인 전이대를 이루며 산출한다.

전이대를 형성하는 이유로는 우선 SBAG 광물 조합이 비평형에 의해 안정한 경우가 있다. 연구 지역에서 석류석과 사장석의 누대구조, 특히 석류석이 보여주는 2단계 성장 조직은 비평형의 대표적 예이다. 그러나 석류석의 스페사틴 함량이 중심부에서 주변부로 갈수록 체계적으로 감소하기 때문에 석류석이 전진 (prograde) 변성작용에 의해 생성되었음을 시사한다. 따라서, 석류석의 주변부 성분이 다른 광물들과 평형을 이루었다고 할 수 있다. 이외에도 이차 백운모의 산출은 백운모가 초기의 평형 성분을 상실하고 재결정되었을 가능성을 지시할 수 있다. 그러나 일차 및 이차 백운모가 거의 유사한 화학 성분을 갖기 때문에 후퇴 변성작용의 영향은 무시할 수 있다. 또한 이차 녹니석 역시 양이 매우 작기 때문에 모델링 결과에 큰 영향을 끼치지 못한다. 그러므로, SBAG 광물 조합이 비평형의 산물이라고 하기는 힘들다.

두번째 가능성은 SBAG 광물 조합이 비-KF-MASH 원소에 의해 안정한 경우이며 SVD 방법을 사용하여 검증해 볼 수 있다. SBAG 광물 조합을 가지는 시료에 대한 SVD 모델링은 단일 시료 내에서 질량-균형이 성립되지 않음을 보여준다. 단일 시료의 경우 세기 변수(intensive variable; 온도, 압력, μ_{H_2O})가 일정하고 전암 성분의 영향이 제거되기 때문에 질량-균형을 이룰 수 없는 요인은 비-KFMASH 성분일 것이다.

AFM-Mn 투영도 (Fig. 5b)에서 SBAG 광물 조합(E7)과 부광물 조합(E9) 사이에 반응 관계가 있는 것처럼 보인다. 그러나 이들 광물 조합 사이에 질량-균형 관계를 만족시키는 SVD 모델 반응식이 성립되지 않는다. SBAG 표품들 사이의 모델링에서 A10-E7 및 A10-E8의 경우 Ca가, E7-E8의 경우 Ti가 큰 오차비를 보여 준다. 이러한 사실은 Ca 및 Ti가 단일 표품 내에서 오차를 유발시키는 주요 원

소일 가능성을 지시해 준다 (Table 4). 그러나 여러 원소가 상당히 큰 오차비를 보이고 각 원소의 화학적 거동이 광물간에 서로 독립적이지 않기 때문에 (Fisher, 1989) 어느 광물의 어느 원소가 질량-균형을 방해하는지 알 수 없다. 따라서 SBAG 광물 조합과 부광물 조합의 산출은 변성 온도-압력의 변화만으로 설명하기 어렵고, 전암성분이나 μ_{H_2O} 의 차이에 의해 지배되었을 것으로 생각된다. 후자의 영향은 Fig. 5c에서 확인할 수 있다.

홍주석대 및 규선석대에서 십자석 붕괴-반응이 정의 되지 않기 때문에 연구지역은 Carmichael (1978)의 제 3 압력대에 해당되는 3.5~3.8 kbar에서 열 변성작용을 받았을 것이다. 이 압력 조건은 석류석-사장석-흑운모-백운모 지압계를 사용하여 구한 3.5 ± 0.5 kbar와 일치한다. 이상의 결과로 비추어 보아 비록 분석된 표품의 수가 작지만, SBAG 광물 조합은 비-KFMASH 성분에서 3개의 표품에서 안정되었을 것이다. 그리고 SBAG 광물 조합과 부광물 조합의 산출은 전암성분의 차이에 의해 영향을 받았으며, 또한 μ_{H_2O} 의 변화 (Fig. 5c)도 중요한 변수가 되었을 것이다.

결 론

십자석 붕괴-반응을 대표하는 SBAG 광물 조합은 연구 지역의 변성 조건을 유추하는데 매우 중요하다. 그러나 SBAG 광물 조합은 전이대를 형성하고 있기 때문에 모든 원소들을 고려할 수 있는 SVD 방법을 사용한 보다 엄밀한 해석이 요구된다. SBAG 광물 조합과 부광물 조합의 상 부피가 AFM-Mn 공간에서 교차하기 때문에 반응 관계를 나타내지만, SVD 모델링은 그러한 반응 관계를 지지하지 않는다. 따라서 FeO-MgO-H₂O 삼각 투영에서 알 수 있는 μ_{H_2O} 의 차이 및 전암 성분의 차이로부터 SBAG 광물 조합과 부광물 조합의 산출을 설명할 수 있다. 단일 표품에 대한 대수학적 분석은 분석 오차 허용 범위 내에서 구성 광물들의 성분 사이에 반응 관계가 성립되지 않음을 보여준다. 따라서, SBAG 광물 조합은 비-KFMASH 성분에서 의해 안정하게 되었다고 결론지을 수 있다. 십자석 붕괴-반응이 홍주석대에서 정의되지 않는다는 사실은 지압계로부터 구한 변성 압력조건 (3.5 ± 0.5 kbar)과 일치한다.

사 사

이 연구는 서울대학교 대학 발전기금 대우학술 연구비 (93-07-2090) 지원에 의해 수행되었다. 논문 초고에 대한 건설적인 비평을 제공해 준 권성택 교수에게 감사드린다.

참고문헌

- 안건상, 정현희, 이현구, 1993, 장군광산 주변의 변성이 질암에서의 누진변성반응 계열. 광산지질, 26, 473-487.
- 이광진, 조문섭, 1992, 가평-청평 지역 경기 육괴의 변성작용. 암석학회지, 1, 1-24.
- Carmichael, D. M., 1978, Metamorphic bathozones and bathograds: a measure of the depth of post-metamorphic uplift and erosion on a regional scale. Am. Jour. Sci., 278, 769-797
- Fisher, G. W., 1989, Matrix analysis of metamorphic mineral assemblages and reactions. Contrib. Mineral. Petrol., 102, 69-77.
- Ghent, E. D., 1975, Temperature, pressure, and mixed volatile equilibria attending metamorphism of staurolite-kyanite bearing assemblages, Esplanade Range, British Columbia. Geol. Soc. Am. Bull., 86, 1654-1660.
- Giaramita, M. J. and Day, H. W., 1991, Buffering in the assemblage staurolite-aluminum silicates-biotite-garnet-chlorite. Jour. Metamorphic Geol., 9, 363-378.
- Greenwood, H. J., 1967, The N-dimensional tie-line problem. Geochim. Cosmochim. Acta, 31, 465-490.
- Imai, N., Park, N. Y., Lee, H. K., Machida, M. and Higashihara, Y., 1982, Geology and metamorphic rocks in the environs of Janggun mine, Republic of Korea. With some comments related to the Unazuki metamorphic rocks in Japanese island arc. In Geology of Japan Sea (eds. Hoshino, M. and Shibasaki), 227-255 (in Japanese).
- Labotka, T., 1980, Petrology of a medium-pressure regional terrane, Funeral Mountains, California. Am. Mineral., 65, 670-689.
- Lang, H. M., 1991, Quantitative interpretation of within-outcrop variation in metamorphic assemblage in staurolite-kyanite grade metapelites, Baltimore, Maryland. Canadian Mineral., 29, 655-671.
- Lang, H. M. and Rice, J. M., 1985, Regression modeling of metamorphic reactions in metapelites, Snow Peak, Northern Idaho. Jour. Petrol., 26, 889-924.
- Novak, J. M. and Holdaway, M. J., 1981, Metamorphic petrology, mineral equilibria, and polymetamorphism in the Augusta Quadrangle, south-central Maine. Am. Mineral., 66, 51-69.

- Pigage, L. C., 1982, Linear regression analyses of sillimanite-forming reactions: Azure lake, B. C., Canada. *Canadian Mineral.*, 20, 349-378.
- Rumble, D. R. III, 1978, Mineralogy, petrology, and oxygen isotope geochemistry of the Clough Formation, Black Mountain, Western New Hampshire, U.S.A. *Jour. Petrol.*, 19, 317-340.
- Spear, F. S., Ferry, J. M., and Rumble, D., III, 1982, Analytical formulation of phase equilibria: the Gibbs method. In *Characterization of Metamorphism through Mineral Equilibria* (ed. J. M. Ferry.), *Rev. in Mineral., Mineral. Soc. Am.*, 10, 105-152.
- Spear, F. S. and Cheney, J. T., 1989, A petrogenetic grid for pelitic schists in the system $\text{SiO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3\text{-FeO-MgO-K}_2\text{O-H}_2\text{O}$. *Contrib. Mineral. Petrol.*, 101, 149-164.
- Thompson, J. B., 1957, The graphical analysis of mineral assemblages in pelitic schists. *Am. Mineral.*, 42, 842-858.
- Yang, P. and Cho, M., 1994, Polymetamorphism of the Precambrian-Paleozoic metapelites in the Janggung area, Southeastern Sobaeksan massif, Korea. In *IGCP 321 Abstract volume* (eds. Cho, M., and Kim, J. H.), Harn Lim, Seoul, 139.

(책임편집 : 권성택)

The SBAG assemblage in the Dueumri Formation near the Chunyang granite : Algebraic analysis

Panseok Yang and Moon-sup Cho

Department of Geological Sciences, Seoul National University, Seoul, 151-742 Korea

ABSTRACT : Staurolite-biotite-andalusite-garnet (SBAG) assemblage and its sub-assemblages (SBA and SBG) commonly occur in the Dueumri Formation near the Chunyang granite, belonging to andalusite and sillimanite zones. The occurrence of the SBAG mineral assemblage is unusual because it is univariant in the $\text{K}_2\text{O-FeO-MgO-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2\text{-H}_2\text{O}$ (KFMASH) model system. We used projection and singular value decomposition (SVD) methods to investigate the equilibrium relationship between SBAG and its sub-assemblage. The SVD modelling of single specimen containing the SBAG assemblage suggests no reaction relationship with respect to mass-balance. Thus, the SBAG assemblages are stabilized by non-KFMASH component. On the other hand, the AFM-Mn projection suggests a reaction relationship between SBAG and its sub-assemblage because they intersect each other in this composition space. The SVD modelling, however, suggests no reaction relationship between these assemblages. Thus, the SBAG assemblages are likely to be stabilized by the variation in bulk-rock composition and/or $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$. The stable occurrence of staurolite in the sillimanite zone is compatible with pressure estimates from the garnet-plagioclase-biotite-muscovite geobarometer.

Key words: Chunyang granite, Dueumri Formation, SBAG assemblage, SVD method.

부 록

특이치분해법 (Singular Value Decomposition, SVD method)

SVD의 기본 개념은 $m \times n$ 행렬 M 을 열직각 행렬 U , $n \times n$ 대각행렬 W 및 $n \times n$ 정방행렬 V 의 전환행렬 (transposed matrix)로 표현하는 것이다.

$$M = U \cdot W \cdot V^T \tag{A}$$

W 행렬에서 영이 아닌 대각원소의 수가 M 의 등위 (rank)를 결정해 주며, 영인 대각 원소에 대응하는 V 의 열에 있는 원소가 반응식의 계수가 된다.

특이치 분해법의 계산과정을 좀더 구체적으로 설명하기 위하여 이 연구에 사용된 시료 E5와 E8을 예로 들어 보자. 우선 행렬 M 은 E5와 E8을 구성하는 광물들의 화학 성분에 의해 아래와 같이 정의한다.

	St _{E5}	Bt _{E5}	Mus _{E5}	And _{E5}	Pl _{E5}	Grt _{E5}	Bt _{E8}	Pl _{E8}	St _{E8}	Mus _{E8}	And _{E8}	
M =	7.630	2.716	3.083	1.066	2.891	2.993	2.842	2.750	7.617	3.041	0.997	Si
	0.098	0.093	0.018	0.000	0.000	0.005	0.087	0.001	0.079	0.014	0.000	Ti
	18.176	1.804	2.727	1.907	1.105	2.027	1.889	1.236	18.020	2.825	1.999	Al
	2.737	1.280	0.145	0.005	0.008	2.300	1.460	0.003	3.010	0.114	0.004	Fe
	0.438	0.987	0.137	0.001	0.000	0.231	0.958	0.000	0.488	0.080	0.002	Mg
	0.079	0.010	0.002	0.000	0.000	0.300	0.008	0.000	0.058	0.001	0.000	Mn
	0.002	0.001	0.002	0.000	0.084	0.128	0.002	0.226	0.005	0.001	0.000	Ca
	0.014	0.024	0.203	0.000	0.927	0.002	0.026	0.823	0.016	0.186	0.001	Na
	0.002	0.765	0.638	0.001	0.008	0.003	0.868	0.004	0.003	0.723	0.000	K

여기서, 행(row)은 각 광물의 구성원소를, 열(column)은 각 시료의 구성광물을 나타내며 이 순서는 다음의 모든 행렬에서 동일하다. E5와 E8의 배열 순서는 계산 결과에 영향을 미치지 않는다. 한편, 각 원소의 분석 오차는 아래의 행렬 E에 의해 정의된다.

E =	0.065	0.012	0.035	0.154	0.045	0.009	0.106	0.004	0.074	0.038	0.002
	0.010	0.010	0.002	0.002	0.002	0.002	0.008	0.002	0.007	0.002	0.002
	0.070	0.017	0.154	0.204	0.046	0.005	0.071	0.005	0.085	0.041	0.004
	0.124	0.028	0.119	0.002	0.003	0.027	0.102	0.002	0.065	0.088	0.002
	0.044	0.015	0.143	0.002	0.002	0.007	0.062	0.002	0.018	0.053	0.002
	0.011	0.002	0.002	0.002	0.002	0.007	0.002	0.002	0.007	0.002	0.002
	0.003	0.002	0.003	0.002	0.039	0.016	0.002	0.004	0.004	0.002	0.002
	0.008	0.003	0.103	0.002	0.038	0.002	0.004	0.008	0.008	0.007	0.002
	0.004	0.016	0.028	0.002	0.007	0.002	0.005	0.002	0.002	0.033	0.002

$M[2,4]$ 와 같이 검출되지 않은 원소의 경우에도 임의의 분석오차를 주어야만 오차비를 계산할 수 있다. 초기 행렬 M 을 식(A)에 따라 분해하면 아래의 3개 행렬을 얻을 수 있다:

U =	-0.42769	0.20577	-0.03595	0.00379	-0.03189	0.09213	-0.00751	0.65050	-0.17911	0.18767	0.00000
	-0.00486	-0.38263	0.29951	-0.36870	-0.34527	0.33343	0.05526	0.18761	0.22620	-0.53739	-0.09460
	-0.89047	-0.30063	-0.27766	-0.27122	0.40328	0.06878	0.08024	-0.08794	-0.43060	-0.24892	0.55994
	-0.15168	-0.00949	-0.13267	-0.03778	0.10507	0.62325	0.11149	-0.30541	-0.38014	0.13432	-0.55479
	-0.03000	-0.39523	-0.40002	0.33659	-0.32569	-0.15332	0.65371	0.02993	0.04065	0.05842	-0.04325
	-0.00441	-0.39480	0.53264	0.58074	0.44589	0.08779	0.01380	0.04640	0.02473	-0.00192	-0.00184
	-0.00151	-0.40506	0.34850	-0.36815	-0.24658	-0.21496	-0.05841	-0.17885	-0.20632	0.61623	0.05192
	-0.00714	-0.35928	-0.37961	0.31084	-0.28026	0.08808	-0.73202	-0.02673	-0.02762	-0.01828	0.01398
	-0.01198	0.18378	0.06937	0.05894	-0.07918	-0.19831	-0.00073	-0.61968	0.15355	-0.23028	0.00721
	0.00000	-0.28582	-0.28925	-0.31736	0.49943	-0.29898	-0.08600	0.09954	0.38883	0.04816	-0.45520
0.00000	0.00925	-0.12862	-0.04649	0.07853	0.52276	0.06187	-0.10482	0.060537	0.39642	0.39711	

W =	29.42516	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	5.21574	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	2.46907	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	1.35834	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.60951	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.18246	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.11041	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03496	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00521	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
V ^t =	-0.67553	0.20577	-0.03595	0.00379	-0.03189	0.09213	-0.00751	0.65050	-0.17911	0.18767	0.00000
	-0.10201	-0.38263	0.29951	-0.36870	-0.34527	0.33343	0.05526	0.18761	0.22620	-0.53739	-0.09460
	-0.12854	-0.30063	-0.27766	-0.27122	0.40328	0.06878	0.08024	-0.08794	-0.43060	-0.24892	0.55994
	-0.07323	-0.00949	-0.13267	-0.03778	0.10507	0.62325	0.11149	-0.30541	-0.38014	0.13432	-0.55479
	-0.07573	-0.39523	-0.40002	0.33659	-0.32569	-0.15332	0.65371	0.02993	0.04065	0.05842	-0.04325
	-0.11699	-0.39480	0.53264	0.58074	0.44589	0.08779	0.01380	0.04640	0.02473	-0.00192	0.00184
	-0.10735	-0.40506	0.34850	-0.36815	-0.24658	-0.21496	-0.05841	-0.17885	-0.20632	0.61623	0.05192
	-0.07760	-0.35928	-0.37961	0.31084	-0.28026	0.08808	-0.73202	-0.02673	-0.02762	-0.01828	0.01398
	-0.67208	0.18378	0.06937	0.05894	-0.07918	-0.19831	-0.00073	-0.61968	0.15355	-0.23028	0.00721
	-0.13070	-0.28582	-0.28925	-0.31736	0.49943	-0.29898	-0.08600	0.09954	0.38883	0.04816	-0.45520
-0.07501	0.00925	-0.12862	-0.04649	0.07853	0.52276	0.06187	-0.10482	0.060537	0.39642	0.39711	

W[9,9]의 값이 0.00521 이지만 영으로 가정하면 행렬 W에서 영이 아닌 대각 원소의 수는 8이 되며 M의 등위 또한 8이 된다. W[9,9]를 영으로 두고 식 (A)의 역으로 다시 계산하면 아래와 같은 모델 성분 행렬 M*를 얻게 된다.

M* =	7.62996	2.71605	3.08291	1.06592	2.89101	2.99301	2.84196	2.74999	7.61703	3.04108	0.99713
	0.09719	0.09403	0.01604	-0.00173	0.00018	0.00511	0.08606	0.00087	0.07970	0.01577	0.00275
	18.17602	1.80397	2.72705	1.90704	1.10500	2.02700	1.88902	1.23600	18.01998	2.82495	1.99893
	2.73697	1.28004	0.14492	0.00493	0.00802	2.30000	1.45996	0.00299	3.01003	0.11407	0.00411
	0.43813	0.98683	0.13732	0.00128	-0.00003	0.23098	0.95815	-0.00002	0.48789	0.07971	0.00155
	0.07941	0.00948	0.00300	0.00088	-0.00009	2.29994	0.00848	0.00006	0.05764	0.00009	-0.00140
	0.00202	0.00098	0.00204	0.00003	0.08400	0.12800	0.00202	0.22600	0.00499	0.00097	-0.00005
	0.01409	0.02388	0.20323	0.00020	0.92698	0.00199	0.02611	0.82301	0.01592	0.18579	0.00068
	0.00207	0.76492	0.63816	0.00114	0.00798	0.00299	0.86808	0.00401	0.00294	0.72286	-0.00022

이 모델 행렬의 유효성 여부를 판단하기 위하여 M*으로부터 M을 빼면:

M* - M =	0.00004	-0.00005	0.00009	0.00008	0.00001	-0.00000	0.00005	0.00000	-0.00003	-0.00008	-0.00013
	0.00081	-0.00103	0.00196	0.00173	-0.00018	-0.00011	0.00094	0.00013	-0.00070	-0.00177	-0.00275
	-0.00002	0.00003	-0.00005	-0.00004	0.00000	0.00000	-0.00002	-0.00000	0.00002	0.00005	0.00007
	0.00003	-0.00004	0.00008	0.00007	-0.00008	-0.00005	0.00004	0.00000	-0.00003	-0.00007	-0.00012
	-0.00013	0.00017	-0.00032	-0.00028	0.00003	0.00002	-0.00015	-0.00002	0.00011	0.00029	0.00045
	-0.00041	0.00052	-0.00100	-0.00088	0.00009	0.00006	-0.00048	-0.00006	0.00036	0.00090	0.00140
	-0.00002	0.00002	-0.00004	-0.00003	0.00000	0.00000	-0.00002	-0.00000	0.00001	0.00003	0.00005
	-0.00009	0.00012	-0.00023	-0.00020	0.00002	0.00001	-0.00011	-0.00001	0.00008	0.00021	0.00032
	-0.00007	0.00008	-0.00016	-0.00014	0.00002	0.00001	-0.00007	-0.00001	0.00006	0.00014	0.00022

M*와 M의 차이가 분석오차의 범위 내에 있을 경우 W[9,9]를 영으로 둔 가정이 성립하게 된다. 모델이 성립하므로 M*를 SVD 방법으로 다시 분해하면 등위수가 3으로 감소하므로 Table 5에 있는 3개의 반응식을 얻게 된다.