

균일조도관의 양해법 설계 기준식

Basic Equations for Explicit Design of Uniformly Rough Pipe

유 동 훈*
Yoo, Dong Hoon

Abstract

Pipe design normally requires pump power, discharge rate or pipe diameter for each condition given. Due to several investigators the pipe friction factor can now be estimated by explicit way when the flow condition is provided. In various problems of pipe design, however, the flow condition cannot be pre-determined even for the uniformly rough pipe. In these cases a lot of iterations are often required to have an accurate solution with ordinary approach. This paper presents the explicit way of estimating the discharge rate and pipe diameter without any iteration process being related to non-dimensional physical numbers, power-diameter number, power-discharge number, and discharge-slope number, which enable to develop explicit forms of equations.

요 지

어떤 조건이 주어져 있을 때 펌프의 일률, 관내 유출률, 관경 등이 보통 관로설계에서 요구되는 사항들이다. 여러 연구자들의 연구 덕택으로 이제 수리조건이 주어지면 관마찰계수는 양해법으로 바로 산정할 수 있게 되었다. 그러나 많은 관로설계에 있어 관내 조면이 균일하게 분포되어 있다 하더라도 기존방법을 사용하여서는 수리조건을 미리 결정할 수 없다. 이러한 경우 정확한 해를 구하기 위하여는 흔히 여러번 반복시산하여야 되는 어려움이 따른다. 본고는 균일조도관인 경우 이러한 반복과정을 거치지 않고 유출률과 관경 등을 바로 결정하는 방법을 제시하였다. 전개과정중 새로운 무차원수, 동력관경수, 동력유출수와 유출경사수 등을 도출하였음을 밝히며, 이로부터 양해법 산정식을 개발할 수 있었다.

1. 서 론

Prandtl(1925)의 혼합거리이론은 난류흐름에 관한 연구에 획기적인 기틀을 다져주었으며, Nikuradse(1933)의 실험 결과로부터 Prandtl 이

* 亞洲大學校 工科大學 土木工學科 副教授

표 1. 단일관로 설계구분

설계구분	산정요구치	주어지는 조건	비고
A	펌프 동력 P	Q, d, ℓ , k _s , i	
B	유출률 Q 또는 유속 V	d, ℓ , k _s , P, i	B-1 ; i = 0 B-2 ; P = 0
C	관경 d	Q, ℓ , k _s , P, i	C-1 ; i = 0 C-2 ; P = 0

(주) P; 펌프의 일률, Q; 유출률, d; 관경, ℓ ; 관길이, k_s; 조고, i; 경사, V; 평균유속

론의 일반성이 검증되었고 균일조도 원형관의 마찰계수 또는 마찰력 산정에 대하여는 거의 異論의 여지없이 광범위한 신뢰감을 주고 있다. 수리학적으로 매끄러운 관 또는 완난류 관마찰흐름인 경우 유속분포를 지수함수로 가정한 Blasius의 이론식은 관마찰계수를 양해법으로 산정할 수 있으나 레이놀즈수가 15만 이상이 될 때 실험자료와 많은 차이점이 있는 것으로 나타났으므로 적용에 한계가 있다. 한편 광범위한 레이놀즈수에서 신뢰성을 확보한 Prandtl의 이론식을 공학적으로 용이하게 적용할 목적으로 많은 연구자들이 Prandtl식의 산정결과와 거의 동일한 양해법 산정식을 개발하였다. Barr(1975)나 Chen(1985) 등이 양해법 산정식을 개발한 주요 연구자들이며, 유동훈(1993a)과 유동훈과 강기훈(1995)도 완난류 관마찰계수의 양해법 산정식을 개발한 바 있다. 이밖에 유동훈(1993b)은 실험결과의 최종분포로부터 층류 구간과 완난류 구간의 중간에 위치한 천이층류 구간과 완난류 구간과 전난류 구간의 중간에 위치한 천이난류 구간에서의 관마찰계수 양해법 산정식을 개발하였다. 균일조도 원형관 실험결과와 이론에 기초하여 개발된 관마찰계수 준이론식들은 관로설계에 필히 이용되며, 상용관 마찰계수 산정식의 기초식으로도 유용하다 (Colebrook, 1938; 유동훈, 1995).

관로 설계에 있어 가장 간단한 예는 균일조도의 단일관로에 대한 해석이며, 이에 관련된 문제로는 표 1에 제시된 바와 같은 세가지 경우가 있다. 이상의 세가지 경우중 A 이외의 모든 경우에 해를 바로 구하기 곤란하다. 모든 관로설계에서 관마찰계수를 사전에 알아야하는데, 관마찰계수는 레이놀즈수와 조고비의 함수이고 대부분의 관로설계에서

구하고자 하는 수치를 알아야 레이놀즈수와 조고비를 결정할 수 있기 때문에 일반적인 방법을 이용하면 상당한 반복과정을 거치거나 미리 작성된 그림을 이용하여야만 해를 구할 수 있다. 즉, 경우 A에서는 주어지는 조건만으로 레이놀즈수와 조고비를 바로 구할 수 있어 펌프의 일률을 간단한 수식으로 직접 산정할 수 있다. 반면에 나머지 경우들에서는 산정요구치를 알아야만 레이놀즈수와 조고비를 결정할 수 있고 이로부터 마찰계수를 산정할 수 있다. 특히 균일조도 원형관인 경우 수리조건에 따라 관마찰계수의 분포형태가 다양하게 변이하기 때문에 시산과정에 있어 1차가정에서 완난류구간에 들었던 흐름특징이 1차수정으로 천이난류분포 구간 또는 천이층류구간으로 변이하았는지 등에 대하여 상당히 주의깊은 점검이 필요하다.

그러나 이러한 경우들도 수리조건판별을 포함하여 해의 직접적인 양해법 산출식 개발이 가능하며, 특히 설계구분 B와 C에서 경사가 없는 수평관이나 펌프를 작동치 않는 경우에는 산출식 유도가 보다 단순화된다. 본고는 설계 구분 B-1, B-2, C-1, C-2에 대하여 균일조도 원형관에 대한 기존 마찰계수 산정식의 여러 형태로부터 수회의 시산과정을 거치지 않고 유출률과 관경을 바로 구하는 기준식을 개발하여 제시한다.

2. 균일조도 원형관 마찰계수

Nikuradse(1933)의 실험결과, 특히 관마찰계수의 분포곡선에 기초하여 유동훈(1993a)은 균일조도 원형관 마찰흐름을 층류, 천이층류, 완난류, 천이난류, 전난류 등 다섯개 구간으로 분류하였으며, 각 구간에서의 관마찰계수 양해법 산정식을 개발한

바 있다. 특히 그는 각 수리구간의 경계조건식으로 이제까지 널리 사용되어 왔던 마찰조고 레이놀즈수의 불합리성을 분명히 밝혔으며, 보다 합리적인 판별치로서 관경 레이놀즈수를 추출하였고 이를 이용한 경계조건식을 개발하였다. Nikuradse의 실험결과로부터 유동훈(1993a)은 다음과 같은 관계식이 성립함을 발견하였다.

$$R_{ST} = 81.5d_k \quad (1)$$

$$R_{TR} = 2520a_k^{0.8} \quad (2)$$

여기서 R_{ST} , R_{TR} 은 각각 완난류-천이난류 ST 경계점에서의 레이놀즈수와 천이난류-전난류 TR 경계점에서의 레이놀즈수이며, d_k 는 관경 d 와 조고 k_s 의 비로서 $d_k = d/k_s$ 이다.

상기 경계 레이놀즈수중 R_{TR} 은 천이난류 구간에 대한 유동훈(1993b)의 양해법 마찰계수 산정식의 유효범위의 제약때문에 편의상 실제보다 약간 작게 산정하도록 만들어진 식이다. 유동훈과 강기훈(1995)은 천이난류 구간의 영점높이 산정식의 유효범위를 넓힘으로써 실제와 거의 일치하는 R_{TR} 경계 레이놀즈수 산정식을 개발하였으며, 다음과 같다.

$$R_{TR} = 1440 d_k^{0.95} \quad (3)$$

그러나 상기 경계식을 본 연구에서 개발한 지수 함수 형태의 마찰계수 산정식과 조합하였을 때 상당한 구간이 불연속하게 나타나므로 지수함수 형태의 마찰계수 산정식에 적합한 경계조건식을 따로 개발하였다. 완난류-천이난류의 경계점을 구하는 R_{ST} 경계 레이놀즈수는 다음과 같으며

$$R_{ST} = 80 d_k^{1.1} \quad (4)$$

TR 경계 레이놀즈수 R_{TR} 도 상기식과 동일한 지수치로 다음과 같다.

$$R_{TR} = 543 d_k^{1.1} \quad (5)$$

이상의 두 경계조건식은 지수함수 형태의 마찰계수 산정식과 조합하여 변이구간에서의 연속성을 유지시켜 준다. 상기식 (4)로부터 산정된 R_{ST} 가 4000보다 작을 때는 완난류나 천이난류 구간이 발생하지 않으며 바로 전난류 구간으로 접근하는 천이류가 발생한다. 즉, 천이류의 발생범위는 $d_k < 49$ 일 때 $2000 < R < 543 d_k^{1.1}$ 이며, 본고에서 천이류에 대하여는 고려치 않는다.

층류 구간에서는 이론으로 유도된 관마찰계수 산정식이 실험결과와도 잘 일치하며, 상기 제시된 모든 설계예에서 대부분 양해법으로 구하고자 하는 수치를 산정할 수 있다. 층류 구간의 관마찰계수 산정식은 다음과 같다.

$$f = \frac{64}{R} \quad (6)$$

여기서 f 는 Darcy-Weisbach 마찰계수이다.

천이층류 구간에서 유속분포는 층류의 직선분포 영역과 완난류의 대수분포 영역이 서로 상당한 비중을 차지하며, 이론식의 유도는 매우 힘든 것으로 판단된다. 유동훈(1993b)은 Nikuradse의 최종 마찰계수 분포로부터 다음과 같은 산정식을 유도하였다.

$$C = 0.00186 \ln R - 0.0104 \quad (7)$$

여기서 $C = (u_*' / V)^2$ 로 정의되며, $f = 8C$ 이다. 본 연구에서 상기 대수분포식은 관료문제 해석에 불리한 것으로 판단되었으며, 지수함수식이 보다 유리한 것으로 밝혀져 다음과 같은 새로운 형태의 천이층류 관마찰계수 산정식을 개발하였다.

$$f = a R^\beta \quad (8)$$

여기서 계수 a 와 β 는 수리조건에 따라 판이하게 변이하는데 천이층류 구간에서 $a = 0.0015$ 이고 β

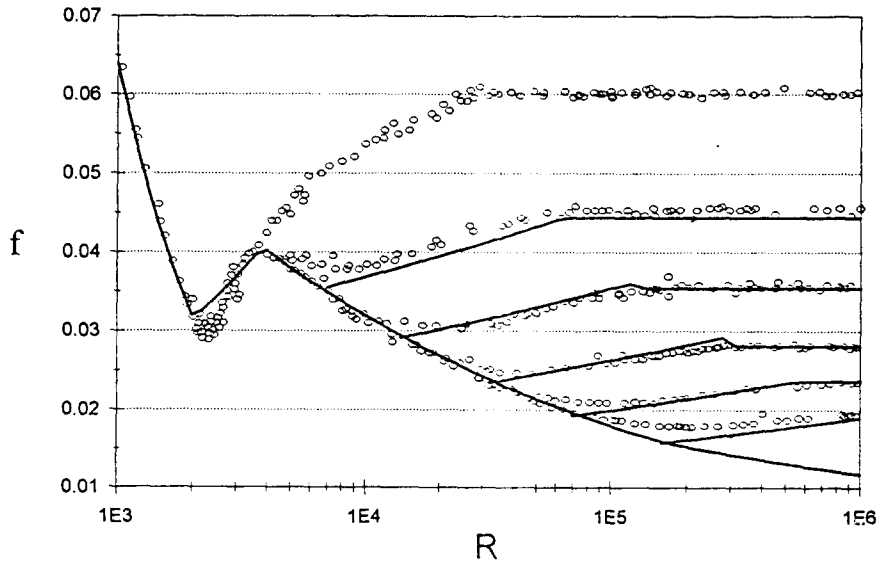


그림 1. 지수함수 형태의 관마찰계수 산정식의 산정결과

표 2. 지수함수 형태의 균일조도 원형관 마찰계수 산정식의 계수 α 와 β

수리 특성분류	경계 조건식	α	β
층류	$R < 2000$	64	-1
천이층류	$2000 < R < 4000$	0.0015	2/5
완난류	$4000 < R < 1.5 \cdot 10^5$	0.316	-1/4
완난류	$1.5 \cdot 10^5 < R < 4.2 \cdot 10^6$	0.117	-1/6
완난류	$4.2 \cdot 10^6 < R < 9.3 \cdot 10^8$	0.062	-1/8
완난류	$9.3 \cdot 10^8 < R < 80d_k^{1.1}$	0.037	-1/10
천이난류	$80d_k^{1.1} < R < 543d_k^{1.1}$	$0.075d_k^{-2/5}$	1/10
		α_k	β_k
전난류	$d_k < 212 < (R/543)^{0.91}$	0.175	-1/3
전난류	$212 < d_k < (R/543)^{0.91}$	0.112	-1/4

주: $f = \alpha R^\beta$ 또는 $f = \alpha_k d_k^{\beta_k}$ (전난류 구간)

=2/5이다. 모든 수리구간의 관마찰계수에 대하여 이와같은 지수함수 형태의 산정식으로 표현할 수 있는데 층류인 경우 $\alpha=64$ 이고 $\beta=-1$ 이다.

Blasius는 완난류 관마찰흐름 또는 수리학적으 로 매끈한 관에서의 유속분포가 벽면으로부터 높이의 1/7 승에 비례할 것이라는 가정하에 식 (8)과 같은 형태의 관마찰계수 산정식을 유도하였으며 그 에 의하면 $\alpha=0.316$ 이고 $\beta=-1/4$ 이다 (표 2 참

조). 그러나 Blasius의 지수함수식은 레이놀즈수 약 15만까지만 신뢰성을 확보하고 있으며, 그 이 상에서는 실험결과와 비교하여 상당한 오차를 유발 한다.

한편 Prandtl(1925)은 난류흐름 해석에 기초원 리가 되는 혼합거리이론을 창시하고 이 이론으로 유속의 대수분포식을 유도하였으며, 대수분포식은 지수함수식 보다 상당히 큰 레이놀즈수에서도 관측

결과와 잘 일치함을 확인하였다. Nikuradse (1932)의 실험결과로부터 Prandtl이론으로 유도된 적분식의 제 상수들을 결정할 수 있었으며, Prandtl의 관마찰계수 산정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log R \sqrt{f} - 0.8 \quad (9)$$

상기식은 레이놀즈수 10^6 까지 관측결과와 잘 일치함을 확인하였으나 음해법으로만 해를 구해야되는 불편함 때문에 식 (8)에 기초하여 여러가지 양해법 산정식이 개발되었다. 이들 중 몇가지를 제시하면 다음과 같다.

Chen(1985):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left[\frac{4.52}{R} \log \frac{R}{7} \right] \quad (10)$$

유동훈(1993B):

$$C = \exp[6.72R^{-0.1} - 8.23] \quad (11)$$

유동훈-강기훈(1995):

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = 2.175 \ln R - 4.05 \quad (12)$$

상기 양해법 산정식들은 Prandtl의 준이론식과 비교하여 1-2% 정도의 오차를 보이거나 실제로 $R < 10^6$ 의 범위에서 Nikuradse의 실험결과와 비교하였을 때 우열을 판단하기 어려울 정도로 실험결과와 근접하다.

관로의 양해법 설계를 위하여 상기 관마찰계수 산정식중 양해법 산정식이 항상 유리한 것은 아니며, 서론에 예시한 설계구분중 B-2 는 오히려 음해법 관마찰계수 산정식 (9)가 유리하다. 나머지 B-1, C-1 과 C-2 는 양해법 관마찰계수 산정식이 유리한데 특히 Blasius의 지수함수식 (8)이 가장 유리하다. 따라서 레이놀즈수가 15만 이상이 되는 완난류 구간에서 적합한 지수함수식 형태의 산정식 개발이 요구되며, Prandtl 식 (9)에 기초하여 유

사한 형태의 산정식을 개발하였으며, 이는 표 2에 제시된 바와 같다. 여러 수치의 지수함수식 (8)로 산정된 관마찰계수의 분포가 Nikuradse의 실험자료와 비교하여 그림 1에 제시되어 있다. 도시된 바와 같이 몇개 구간으로 나누었을 때 지수함수식도 Prandtl의 준이론식과 거의 일치하는 근접한 수치를 제공함을 알 수 있다.

천이난류 구간에 대하여도 유동훈(1993b)은 최종 관마찰계수 분포로부터 양해법 산정식을 개발하였으며, 다음과 같다.

$$C = C_R - C_A \cos \left[\frac{\ln R - \ln d_k - 5.07}{1.757 - 0.127 \ln d_k} \right] \quad (13)$$

여기서 C_R 은 전난류 구간에서의 관마찰계수이며, C_A 는 천이난류 구간에서 관마찰계수의 최대 변이 폭으로서

$$C_A = 0.009 d_k^{-0.56} \quad (14)$$

이다. 상기식 (13)은 설계구분 A의 펌프일률을 산정하는데 요긴하게 사용될 수 있으나 그밖의 경우에는 양해법 산출식을 도출하기 매우 곤란하다. 따라서 약간의 오차가 발생할 소지를 내포하고 천이난류 구간에 대하여도 이미 언급한 바와 같이 R_{ST} 경계 레이놀즈수를 조정하여 지수함수형태로 관마찰계수 산정식을 개발하였으며, 표 1에 제시된 바와 같다. 그림 1에 함께 제시된 바와 같이 지수함수식 (8)은 ST 경계점 부근에서 무시할 수 없는 오차를 내포하고 있으나 R_{ST} 경계조건을 조정하여 어느 정도 오차를 줄일 수 있으며, 이 구간 발생이 혼한 경우가 아니므로 계산의 편의를 위하여 이를 무시한다.

전난류 구간에서는 조고비에 따라 관마찰계수가 바로 결정되며, Prandtl의 이론과 Nikuradse의 실험결과로부터 다음과 같은 산정식이 개발되었다.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log d_k + 1.14 \quad (15)$$

조고비만 결정되면 전난류인 경우 식 (15)로부터 바로 관마찰계수를 산정할 수 있다. 그러나 설계구분 C와 같이 조고를 미리 알더라도 산정 요구치가 관경인 경우 조고비를 사전에 알 수 없으므로 상당한 반복과정을 거쳐야된다. 따라서 설계구분 C에 대비하여 전난류 구간의 관마찰계수 산정식도 지수함수 형태로 개발할 필요가 있으며, 그 형태는 식 (16)과 같고, 제 계수는 표 2에 제시된 바와 같다. 그림 1에 도시된 바와 같이 지수함수 형태도 양호한 산정결과를 제공하여 주고 있다.

$$f = \alpha_k d_k^{\beta_k} \quad (16)$$

이와 같이 관마찰계수는 대부분의 수리조건에서 레이놀즈수에 상당히 지배받고 있으며, 레이놀즈수의 정확한 산정은 전체 관로 설계에 매우 중요하다 할 것이다. 따라서 레이놀즈수에 포함되어 있는 점성계수의 정확한 산정이 요구되는데 유체의 제 특성치중 특히 온도에 따른 점성계수의 변이폭이 크므로 이에 관한 상태방정식의 도출이 필요할 것이다. Douglas 등(1979)은 2차원 수식으로 물에 대한 절대점성계수의 상태방정식을 개발하였으며 다

음과 같다.

$$\mu = \mu_0 (1 + 0.03368t + 0.000221t^2)^{-1} \quad (17)$$

여기서 온도 t의 단위는 °C 이며, μ_0 는 0°C에서의 절대점성계수로서 0.00179kg/m s이다. 정밀도를 높이기 위하여 보다 고차원의 상태방정식을 개발할 수도 있으나 레이놀즈수를 계산하는 실용면에서 보다 높은 정밀도가 요구되지 않으며, 다음과 같은 형태를 취하면 차원을 줄이고도 분포형태에 적합한 상태방정식을 개발할 수 있다.

$$\nu = \nu_N \left[a + \frac{b}{M+c} \right] \quad (18)$$

여기서 ν_N 은 기준 절대온도 N 에서의 동점성계수, a, b, c는 상관계수이며 M은 절대온도 대 기준 절대온도의 비 즉 $M = (273.1+t)/N$ 이다. 기준 절대온도는 임의로 선택할 수 있으나 가능하면 편의상 10진법에 유리한 수치를 택한다. Streeter와 Wylie (1983)의 자료를 이용하여 여러 유체에 대한 ν_N 과 상관계수 a, b, c를 구하였으며 표 3에 제시된 바와 같다.

표 3. 유체의 동점성계수 산정식의 제 관련상수

유체의 종류	기준절대온도 N(K)	기준 점성계수 ν_N (m ² /s)	a	b	c
Water	293.2	10 ⁻⁶	-0.140	0.190	-0.833
Glycerine	313.9	10 ⁻⁴	-2.689	0.468	-0.873
Helium	262.9	10 ⁻⁴	14.973	-74.249	4.313
Hydrogen	274.1	10 ⁻⁴	16.740	-101.700	5.461
Air & Oxygen	330.4	2×10 ⁻⁵	77.247	-3378.283	43.308
Carbon Dioxide	310.5	10 ⁻⁵	39.195	-635.593	15.641
Crude Oil	290.2	10 ⁻⁵	0.032	0.118	-0.878
Kerosene	303.0	2×10 ⁻⁶	-0.951	0.612	-0.686
Ethyl Alcohol	316.9	10 ⁻⁶	-0.692	0.603	-0.643
Benzene	273.6	10 ⁻⁶	-0.132	0.270	-0.762
Carbon Tetrachloride	260.5	10 ⁻⁶	-0.191	0.306	-0.743
Gasoline	307.1	4×10 ⁻⁷	-0.110	0.427	-0.616
Mercury	343.7	10 ⁻⁷	0.724	0.127	-0.539

주: $\nu = \nu_N \left[a + \frac{b}{M+c} \right]$; $M = \frac{273+t}{N}$

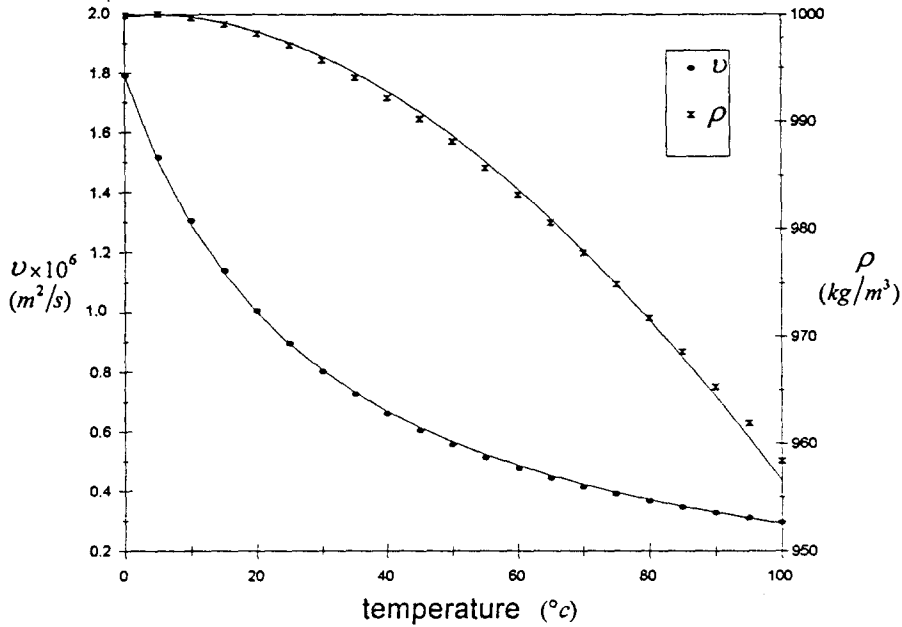


그림 2. 상태방정식으로 산정된 물의 밀도와 동점성계수

상기 표에 제시된 수치들은 그림으로부터 유추된 것들이기 때문에 정밀도가 약간 떨어질 것으로 예상되나 Streeter와 Wylie(1983)가 제공한 그림과 비교하여 거의 분간할 수 없을 정도의 정확도를 보였다.

물인 경우 밀도의 상태방정식은 간단한 형태의 수식으로 가능하며 다음과 같다.

$$\rho = \rho_N [1 - 0.30(M-1)^{1.8}] \quad (19)$$

물의 밀도의 기준온도는 278 K이며, $\rho_N = 1000 \text{ kg/m}^3$ 이다. 그림 2에는 상태방정식 (18)과 (19)로 각각 산정된 물의 동점성계수와 밀도가 Streeter와 Wylie(1983)가 제시한 관측자료와 비교되어 있다. 상기 밀도상태방정식을 고차원의 형태로 보다 정확한 산정식을 만들 수도 있으나 상기 산정식도 대부분의 범위에서 오차가 0.1% 이내로 크지 않다.

설계구분 A의 경우 주어진 조건으로 레이놀즈수와 조고비를 직접 계산할 수 있기 때문에 관마찰계수를 바로 산정할 수 있고 손실수두는 Darcy-

Weisbach식

$$h_f = f \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} \quad (20)$$

으로 산정되며, 펌프의 일률은

$$P = \rho g Q h_f \quad (21)$$

로 산정된다. 그러나 나머지 설계 예에서는 레이놀즈수나 조고비를 미리 결정할 수 없기 때문에 일반적인 방법으로는 반복 시산하여야만 된다. 그러나 이러한 경우에도 특별한 조치를 취하면 반복시산과정을 거치지 않고 해를 바로 구할 수 있다.

3. 펌프일률로부터 유출률 산정

관경, 관의 길이, 관내 조고와 펌프의 일률이 주어져 있을 때 관내 통과 유출률 또는 단면평균유속을 산정하는 문제를 다섯가지 수리조건 구간별로 나누어서 검토한다. 이는 서론에 제시된 설계구분

B에 해당된다. 먼저 설계구분 B-1, 즉 경사가 없는 수평관($i=0$)으로 가정한다. 층류 구간인 경우 관마찰계수는 식 (6)으로부터 산정되며, 이를 식 (20)에 대입하고 다시 식 (21)에 대입하면 다음과 같이 평균유속산정식이 구하여진다.

$$V = \left[\frac{P}{8\pi\rho l\nu} \right]^{0.5} \quad (22)$$

상기식을 무차원 관계식으로 유도하기 위하여 양변에 d/ν 를 곱하여주면 다음과 같다.

$$R = 0.20 B^{1.5} \quad (23)$$

여기서 B는 펌프일률 P와 관경 d를 사용한 새로운 무차원수로서

$$B = \frac{1}{\nu} \left[\frac{Pd^2}{\rho l} \right]^{1/3} \quad (24)$$

이다. 본고에 처음으로 도입된 상기 무차원수 B를 동력-관경 무차원수라 칭한다. 상기 무차원수의 명칭에서 밀도와 관의 길이는 이후 도입되는 무차원수에도 나타나므로 중복하여 명칭에 포함치 않고 중복하지 않은 동력과 관경만 지칭하였다. 상기식 (23)은 층류 구간에만 성립하므로 $R < 2000$ 이 되려면 $B < 465$ 조건에서만 적용할 수 있다.

이상과 같이 구하고자 하는 유속을 포함한 레이

놀즈수는 주어진 조건으로부터 식 (24)로 결정되는 새로운 무차원수 B의 함수이며, 층류, 천이층류, 완난류, 천이난류, 천이류 등에서의 관마찰계수 산정식의 일반형으로 식 (8)을 취하였을 때 이를 식 (20)과 식 (21)에 대입하면

$$R = \gamma B^\delta \quad (25)$$

$$\gamma = \left[\frac{8}{\alpha\pi} \right]^{\delta/3} \quad (26)$$

$$\delta = \frac{3}{3+\beta} \quad (27)$$

층류 구간일 때 관마찰계수 산정식에서 $\alpha=64$, $\beta=-1$ 이므로, 이를 식 (25)에 대입하면 식 (23)과 일치해진다.

천이층류 구간에서 관마찰계수는 식 (7) 또는 (8)로 산정될 수 있는데 양해법 산정식 도출을 위하여는 지수함수식 (8)이 유리하다. 즉, $\alpha=0.0015$, $\beta=2/5$ 이다. 이를 식 (25)에 대입하면 표 4에 제시된 바와 같다. 천이층류 구간은 $2000 < R < 4000$ 이므로 천이층류 산정식을 도입하면 천이층류가 $465 < B < 1017$ 에서 발생함을 알 수 있다.

완난류 구간에서 지수함수 형태의 관마찰계수 산정식의 계수는 표 1에 제시된 바와 같으며, 이들을 식 (26)과 (27)에 대입하면 표 4에 제시된

표 4. 유출률 산출을 위한 레이놀즈수 산정식의 계수 γ 와 δ

수리특성분류	경계조건식	γ	δ
층류	$B < 465$	0.200	3/2 (1.500)
천이층류	$465 < B < 1017$	8.904	15/17 (0.882)
완난류	$1017 < B < 3.3 \cdot 10^4$	2.126	12/11 (1.091)
완난류	$3.3 \cdot 10^4 < B < 6.4 \cdot 10^5$	2.984	18/17 (1.059)
완난류	$6.4 \cdot 10^5 < B < 1.1 \cdot 10^6$	3.641	24/23 (1.043)
완난류	$1.1 \cdot 10^6 < B < 28.6d_k$	4.305	30/29 (1.034)
천이난류	$28.6d_k < B < 206.7d_k$	$3.12 d_k^{4/31}$	30/31 (0.968)
전난류	$206.7d_k < B$	$1.36(2\log d_k + 1.14)^{2/3}$	1.000

주: $R = \gamma B^\delta$

바와 같다. 단 이러한 산정식들은 완난류 조건, 즉 R 에만 적용 가능한데 완난류 산정식이 구간별로 다르기 때문에 천이난류 조건식으로 완난류 구간의 범위를 판별하는 것이 유리하다. 천이난류 구간에서 관마찰계수는 레이놀즈수와 조고비의 함수이며, 표 2에 제시된 바와 같다. 이를 식 (26)과 (27)에 대입하여 구한 γ 와 δ 는 표 4에 제시되어 있다. 천이난류 구간은 $R_{ST} < R < R_{TR}$ 구간에서 발생하며 천이난류 산정식을 이 조건에 도입하면 $28.6d_k < B < 206.7d_k$ 에서 천이난류가 발생함을 알 수 있다. 따라서 완난류 조건식은 $B < 28.6d_k$ 라 가정할 수 있다.

전난류 구간에서 관마찰계수는 구태어 유효범위 구간이 짧은 지수함수식을 사용할 필요가 없으며, 보다 넓은 범위에서 유효한 대수분포식 (15)를 사용한다. 이를 식 (21)에 대입하면

$$R = 1.36(2 \log d_k + 1.14)^{2/3} B \quad (28)$$

이 구해진다. 상기 산정식으로 구해지는 레이놀즈수는 $R_{TR} < R$ 이 되어야 하므로 식 (4)를 도입하여 상기식의 유효범위는 $399d_k^{1.1}(2 \log d_k + 1.14)^{-2/3} < B$ 또는 천이난류 구간의 경계조건을 사용하여 $206.7d_k < B$ 이다. 이상의 두 조건식은 거의 유사한 수치를 제공한다. 즉, $d_k = 100$ 일 때 전자의 조건식으로는 $21\ 231 < B$ 가 구해지며, 후자의 조건식으로는 $20\ 670 < B$ 가 얻어진다. 또한 $d_k = 1000$ 일 때 전자는 $214\ 690 < B$, 후자는 $206\ 700 < B$ 이 구해진다.

이상 논의된 바와 같이 수평관인 경우 펌프의 일률이 주어질 때 유출률 또는 단면평균유속은 전적으로 무차원수 B 의 함수이며, 조고비와 B 의 수치로서 수리조건이 결정되고 유출률 산정을 위한 레이놀즈수도 B 와 조고비의 함수로서 구할 수 있다. 그림 3에는 표 4에 요약되어 있는 산정식으로 구한 레이놀즈수의 분포를 도시한 것이다. $B < 465$ 인 층류 구간에서 R 이 급격히 증가하다가 $465 < B$

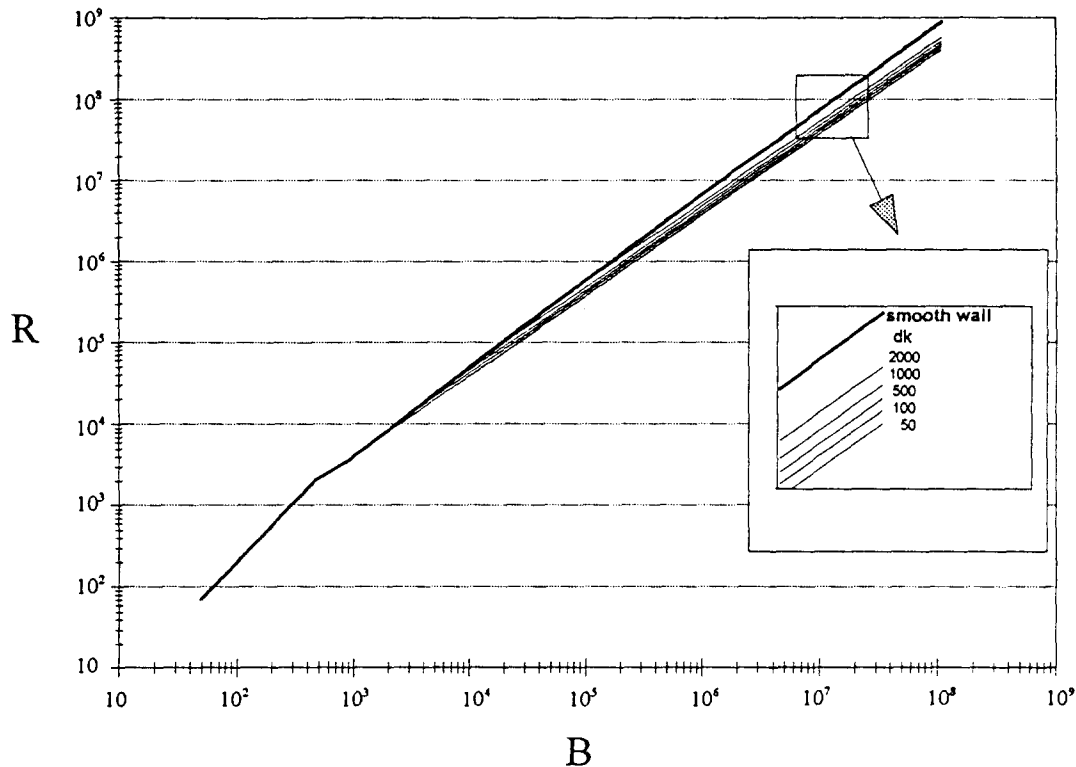


그림 3. 여러 조고비와 동력-관경 무차원수에 대한 레이놀즈수의 변이

<1017인 천이층류 구간에서 R의 변이가 완만해지며, 1017<B인 완난류 구간에서 다시 증가율이 약간 상승함을 알 수 있다. 조고비에 따라 완난류 구간을 벗어나는 지점이 다르며, 전난류 구간에 접어들면 동력-관경 무차원수에 선형 비례함을 알 수 있다.

4. 자연경사관의 유출률 산정

관경, 관의 길이, 관내 조고와 지형조건에 따른 자연경사로 관이 기울어져 있으며, 펌프는 사용하지 않을 때 관내 흐름은 중력에 의하여 이동된다. 이는 표 1에 제시되어 있는 설계 구분 B-2에 해당된다. 이때도 마찬가지로 다섯가지 수리조건 구간별로 나누어서 관 통과 유출률 또는 단면평균유속을 산정하는 문제를 검토한다. 자연경사관일 때 $i = h_f / \ell$ 가 되며 이를 식 (24)에 대입하면 다음과 같은 Chezy 식이 된다.

$$V = \sqrt{\frac{2gdi}{f}} = \sqrt{\frac{gHi}{C}} \quad (29)$$

여기서 원형관인 경우 동수반경 $H=d/4$.

층류에 대하여 식 (6)을 식 (29)에 대입하면

$$F = \frac{1}{32}N \quad (30)$$

여기서 F는 경사후루드수, N는 경사후루드수 대 레이놀즈수의 비로서 다음과 같다.

$$F = \frac{V}{\sqrt{gdi}} \quad (31)$$

$$N = \frac{R}{F} = \frac{\sqrt{gd^3i}}{\nu} \quad (32)$$

식 (30)으로 구해진 경사후루드수에 무차원수 N를 곱하면 레이놀즈수가 되며, 식 (30)은 $R < 2000$ 에서 유효하다. 따라서 $N < 253$ 에서 층류 산정식 (30)은 유효하다. 후루드수에 기울기를 포함

치 않고도 유도가 가능한데, 기울기를 무차원수에 포함하여야 표기가 간단할 뿐만아니라 보다 일반적인 형태로 표현이 가능하며, 제 6 절에 논의할 설계구분 C-2에 도입되는 무차원수 G와도 대응한다.

층류 구간을 포함하여 천이층류, 완난류, 천이난류 구간의 마찰계수로서 일반형은 식 (8)이다. 각 구간별로 계수 α 와 β 가 변하는데 관마찰계수의 일반형 산정식 (8)을 식 (29)에 대입하면 다음과 같은 관계식이 구해진다.

$$F = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2+\beta}} N^{\frac{-\beta}{2+\beta}} \quad (33a)$$

$$R = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2+\beta}} N^{\frac{2}{2+\beta}} \quad (33b)$$

층류인 경우 $\alpha=64$, $\beta=-1$ 이며, 이들을 식 (33)에 대입하면 식 (30)과 일치하는 산정식이 구해진다. 천이층류인 경우 식 (6)으로부터 $\alpha=0.0015$, $\beta=2/5$ 를 대입하면

$$F = 20.05 N^{-1/6} \quad (34)$$

식 (34)는 $2000 < R < 4000$ 에서 유효하며, 식 (34)를 이용하면 $251 < N < 577$ 가 구해진다. 층류와 천이층류의 경계치가 계산상의 오차로 약간 다르지만 거의 일치함을 알 수 있다.

마찬가지로 완난류인 경우 지수함수형태의 관마찰계수 산정식 (8)로 나타나는 수치 α 와 β 를 식 (33)에 대입하여 약산식이 구하여지나, 오히려 광범위한 수리조건에서 유효한 음해법 관마찰계수 산정식 (9)를 사용하여도 이 경우에는 양해법 평균유속 산정식이 구해진다. 즉, 식 (9)에서 레이놀즈수에 포함된 평균유속을 Chezy 식 (29)로 대치하면 식 (9)의 우변의 첫항에서 마찰계수가 서로 소거되며 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$F = \sqrt{2} [2 \log N - 0.5] \quad (35)$$

상기식은 거의 모든 범위의 완난류 조건에 적용될 수 있는 평균유속 산정식이다. $R < R_{ST}$ 범위를 이용할 때 상기식은 $N\sqrt{2}[2\log N - 0.5] < 80d_k^{1.1}$ 에서 유효하다.

천이난류 구간에서는 다음과 같다.

$$F = 4.77 d_k^{4/21} N^{-1/21} \quad (36)$$

상기식은 천이난류 구간 $R_{ST} < R (=NF) < R_{TR}$ 에서 유효하며 상기식을 대입하면 천이난류의 조건식은 $19.3d_k^{0.96} < N < 144.1d_k^{0.96}$ 이다.

전난류 조건에서 관마찰계수는 식 (15)로 산정되며, 이를 식 (29)에 대입하면

$$F = \sqrt{2} [2\log d_k + 1.14] \quad (37)$$

상기식은 $R_{TR} < R$ 에서 유효하며 이는 $543d_k^{1.1} < N\sqrt{2}[2\log d_k + 1.14]$ 의 범위이다. 천이난류 구간 조건식은 완난류 구간 조건식과 전난류 구간 조건식을 사용하여 구할 수 있다. 즉, 천이난류 구간은 $80[\sqrt{2}(2\log N - 0.5)]^{-1} < d_k^{-1.1} N < 543[\sqrt{2}(2\log d_k + 1.14)]^{-1}$ 에서 발생한다. 지수함수식을 사용하여 구한 경계조건식을 포함하여 이상의 결과는 표 5에 정리되어 있고 그림 4에는 여러 조고비에 대하여 이상의 산정식으로 산정하여 N에 대한 F의 변이가 도시되어 있다.

표 5. 자연경사관 유출률 산출을 위한 경사후루드수 산정식

수리 특성 분류	경계 조건식	F
층 류	$N < 253$	$0.031 N$
천 이 층 류	$253 < N < 577$	$20.05 N^{-1/6}$
완 난 류	$577 < N < 19.3d_k^{0.96}$	$(2.83\log N - 0.71)$
천 이 난 류	$19.3d_k^{0.96} < N < 144.1d_k^{0.96}$	$4.77d_k^{4/21} N^{-1/21}$
전 난 류	$144.1d_k^{0.96} < N$	$(2.83\log d_k + 1.61)$

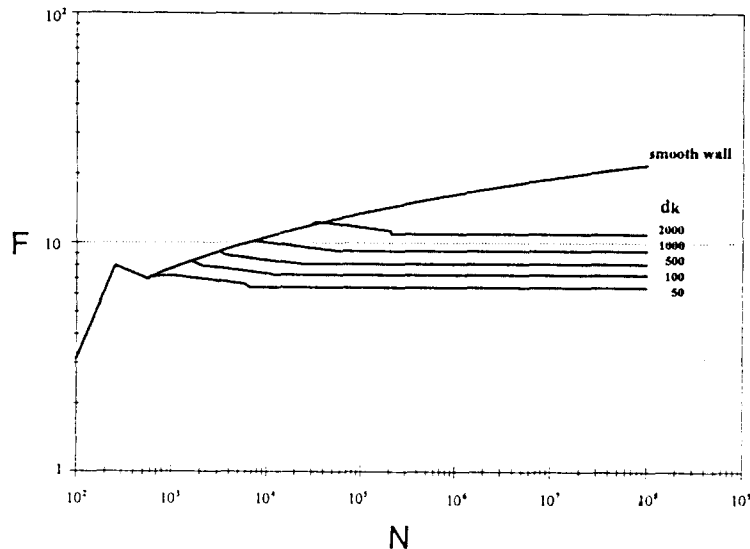


그림 4. 여러 조고비와 레이놀즈-경사후루드 무차원수에 대한 경사후루드수의 변이

5. 펌프일률과 유출률로부터 관경 산정

설계구분 C는 유송길이 즉 관길이의 조고, 펌프의 일률, 유출률 등이 조건으로 주어져 있을 때 관경을 결정하는 문제로서 관로설계에서 가장 많이 부딪히는 문제이며, 최적 관경의 선정에 필히 고려되어야 할 사항이다. 먼저 수평관에 펌프만 작동하는 경우로서 설계구분 C-1을 고려한다. 일반형 관마찰계수 산정식 (8)을 식 (20)과 (21)에 적용하면 다음과 같은 관계식이 구해진다.

$$S = \varepsilon E^{\xi} \quad (38)$$

$$\varepsilon = \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2+\beta} \right]^{-\xi/5} \quad (39)$$

$$\xi = \frac{-5}{5+\beta} \quad (40)$$

여기서 S는 레이놀즈수 R에 역비례하는 무차원수로서 다음과 같다.

$$S = \frac{\nu d}{Q} \quad (41)$$

E도 새로운 무차원수로서 다음과 같다.

$$E = \frac{1}{\nu} \left(\frac{PQ^2}{\rho l} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (42)$$

무차원수 E도 본고에 처음 도입되는 수이며 이를 동력-유출 무차원수라 칭한다. 각 수리조건은 이제 무차원수 E로서 구분되며 각 수리구간에 따라 계수 α 와 β 를 식 (39)와 (40)에 대입하면 무차원수 E로부터 레이놀즈수의 역수 S를 구할 수 있다.

층류인 경우 $\alpha=64$, $\beta=-1$, 천이층류인 경우 $\alpha=0.0015$, $\beta=2/5$, 완난류, 천이난류 구간 등에 대하여 각각 해당되는 수치를 식 (39)와 (40)에 적용하면 표 6에 제시된 바와 같다. 천이층류 구간

은 $2000 < R < 4000$ 에서 발생한다. R 대신에 $4/\pi S$ 를 사용하고 천이층류 구간에 해당되는 식 (38)을 적용하면 천이층류는 $754.1 < E < 1594.9$ 에서 발생하며, 층류는 $E < 754.1$ 에서 발생함을 알 수 있다. 천이난류 구간에서 마찰계수는 레이놀즈수와 조고비의 함수이며 표 2에 제시된 마찰계수 산정식을 식 (39)와 (40)에 대입하면

$$S = 0.603 K^{\frac{4}{55}} E^{-\frac{10}{11}} \quad (43)$$

여기서 K도 조고와 관련된 무차원수이며 다음과 같다.

$$K = \frac{\nu k_s}{Q} \quad (44)$$

천이난류 구간은 $80 d_k^{1.1} < R < 543 d_k^{1.1}$ 에서 발생하며, 식 (43)을 사용하여 천이난류 구간에 해당하는 S와 d_k 를 적용하면 $1.3 K^{-0.5} < E < 13.6 K^{-0.5}$ 에서 발생함을 알 수 있다. 따라서 완난류 구간은 $1595 < E < 1.3 K^{-0.5}$ 에서 발생한다.

$13.6 K^{-0.5} < E$ 에서 발생할 것으로 예상되는 전난류 구간에서 마찰계수는 직접 조고비의 함수이며 표 2에 제시된 산정식들을 식 (20)과 (21)에 대입하면 d_k 는 KE의 함수가 된다. 즉, $d_k = S/K$ 를 이용하면 식 (38)과 동일형태의 S 산정식이 구해지며 각 계수는 다음과 같다.

$$\varepsilon = \left[\frac{\alpha_k}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \right]^{-\xi/5} K^{(1+\xi)} \quad (45)$$

$$\xi = \frac{-5}{5-\beta_k} \quad (46)$$

$d_k < 212$ 구간과 $212 < d_k$ 구간의 각 구간에서의 정확한 수치는 표 6에 제시된 바와 같으며, 이들 산정식을 조건식에 대입하면 전반부 구간은 $E < 0.002 K^{-1}$ 임을 알 수 있다.

표 6. 관경산출을 위한 관경 레이놀즈 역수의 산정식의 계수 ϵ 과 ξ

수리특성분류	경계조건식	ϵ	ξ
총류	$E \text{ (또는 } G) < 754.1$	2.526	-5/4 (-1.25)
천이총류	$754.1 < E < 1594.9$	0.294	-25/27 (-0.926)
완난류	$1594.9 < E < 58\ 823$	0.743	-20/19 (-1.053)
완난류	$5.9 \cdot 10^4 < E < 1.2 \cdot 10^6$	0.609	-30/29 (-1.034)
완난류	$1.2 \cdot 10^6 < E < 2.0 \cdot 10^8$	0.538	-40/39 (-1.026)
완난류	$2.0 \cdot 10^8 < E < 1.3K^{-0.5}$	0.487	-50/49 (-1.020)
천이난류	$1.3K^{-0.4} < E < 13.6K^{-0.4}$	$0.6 K^{4/55}$	-10/11 (-0.909)
전난류	$13.6K^{-0.5} < E < 0.002K^{-1}$	$0.694 K^{1/16}$	-15/16 (-0.938)
전난류	$13.6K^{-0.5} < 0.002K^{-1} < E$	$0.633 K^{1/21}$	-20/21 (-0.952)

주: $S = \epsilon E^\xi$ 또는 $S = \epsilon G^\xi$

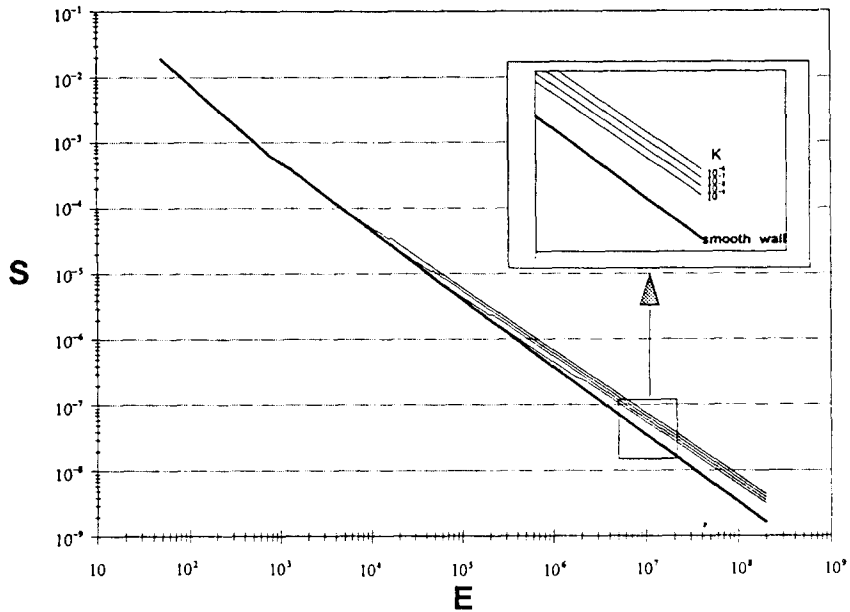


그림 5. 동력 유출 무차원수에 대한 레이놀즈 역수의 변이

이상의 연구결과로 수평관인 경우 펌프의 동력과 요구유출률이 주어질 때 구하고자 하는 관경이 포함된 레이놀즈수는 전적으로 동력-유출 무차원수 E 와 조코의 함수임을 알 수 있고 경계조건식과 상관계수의 수치는 표 6에 요약되어 있는 바와 같다. 그림 5에는 레이놀즈 역수 S 의 분포가 무차원수 E 의 함수로 도시되어 있다. 천이총류 구간에서 완만히 증가하다가 완난류 구간에 접어들면 처음에는 급격한 증가를 보이며 다시 증가율이 감소하는 추세를 보이고 있으며, 천이난류 구간에서는 잠시

경사가 완만해지다가 전난류 구간에 들면 경사가 다시 약간 급해지는 경향을 보인다.

천이총류 구간과 완난류 구간의 산정식은 수리조건에 따라 여러 식으로 관경수가 결정되나 그림 5에 도시된 바와 같이 전대수지상에 도시하였을 때 거의 전구간에서 일정한 기울기를 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서 이를 단일근사식으로 표현하면 다음과 같다.

$$S = 0.686 E^{-1.043} \quad (47)$$

상기식은 표 6에 제시된 바와 같이 여러 조건에 따라 다른 수식을 도입하여 구하는 것에 비하여 정밀산정식의 해와 비교하였을 때 유사한 정밀도를 가지고 있다.

6. 자연경사관의 관경 산정

본절에서 다루는 설계구분은 C-2이며, 이는 펌프는 작동치 않고 경사관에서 유송길이 즉 관길이와 조고, 유출률 등이 조건으로 주어질 때 관경을 결정하는 문제이다. 이 경우 시산과정을 거치지 않고 직접해가 가능하나 경사관에 펌프가 동시에 작동하는 일반적인 경우의 설계구분 C를 고려하기 위하여 이제까지 도입한 무차원수의 관계식으로 도출할 필요가 있다. 관마찰계수가 레이놀즈수의 지수함수 형태로 산정될 때 수두차 $h=il$ 은 손실수두 h_f 와 동일하므로 관계식을 도출할 수 있다.

$$S = \varepsilon G^\xi \quad (48)$$

여기서 비례상수 ε 과 지수 ξ 는 식 (38)에 사용된 수치와 동일하며, G 는 새로운 무차원수로서 유출경사수로 칭하고 다음과 같다.

$$G = \frac{1}{\nu} (Q^3 g_i)^{\frac{1}{5}} \quad (49)$$

각 수리조건은 이제 무차원수 G 로서 구분되며 각 수리구간에 따라 계수 α 와 β 를 식 (48)에 대입하면 무차원수 G 로부터 레이놀즈수의 역수 S 를 구할 수 있다.

층류인 경우 $\alpha=64$, $\beta=-1$, 천이층류인 경우 $\alpha=0.0015$, $\beta=2/5$, 완난류, 천이난류 구간 등에 대하여 각 해당되는 수치를 식 (39)와 (40)에 적용하면 식 (48)의 비례상수와 지수치를 구할 수 있는데 각 수치는 표 6에 제시된 바와 같다. 또한 각 수리 구간의 조건식도 동일한 수치이며 단지 표 6에서 동력유출수 E 대신에 유출경사수 G 를 사용하면 된다. 전난류 구간에서도 비례상수와 지수치는 각각 식 (45)와 (46)으로 구한 수치와 동일하

며, 단지 주요 관계 무차원수가 E 에서 G 로 바뀔 뿐이다. 즉 유출경사수 G 는 동력유출수 E 와 대응한 대응관계가 있다.

7. 결론 및 토의

수평관에 펌프가 작동하는 경우와 자연경사관에 펌프가 작동치 않는 경우, 두 경우에 대하여 각기 유출률 또는 관경을 산출하기 위한 설계구분 4가지를 분류하고 각각의 경우에 대한 양해법 산정방법에 관하여 논하였다. 이를 위하여 새로운 무차원수인 동력-관경수 B 와 레이놀즈-경사후루드수 N , 동력-유출수 E 와 유출-경사수 G 를 도입하였으며, 구하고자 하는 변수가 포함된 경사후루드수나 레이놀즈수 또는 그 역수는 전적으로 조고비와 이들 무차원수의 함수임을 밝혔다. 또한 관련식들의 유효범위를 결정하는 조건식도 이들 무차원수와 조고비의 함수이므로 여러번 시산하여야 하는 반복과정을 거치지 않고 해를 바로 구할 수 있게 되었다.

수평관에 펌프가 작동할 때 유출량을 산정하고자 하면 구하려는 산정치는 레이놀즈수 R 이며 이는 동력-관경수 B 의 함수이다. 펌프가 작동치 않고 자연경사관인 경우 유출량을 산정하고자 할 때 구하려는 산정치는 경사후루드수 F 이며 이는 레이놀즈-경사후루드수 N 의 함수이다. 또한 수평관에 펌프가 작동할 때 관경을 산정하고자 하면 구하려는 산정치는 레이놀즈 수의 역수 S 이며 이는 동력-유출수 E 의 함수이다. 펌프가 작동치 않고 자연경사관인 경우 관경을 산정하고자 할 때 구하려는 산정치는 마찬가지로 레이놀즈수의 역수 S 이며 이는 유출-경사수 G 의 함수이다. 각각의 산정식은 모두 단순한 형태의 지수함수식으로 표현된다. 단지 경사관에서 펌프동력이 동시에 작용하는 경우에 대하여는 본 연구에서 개발된 기준식을 사용하여 추후 보충연구가 있어야 될 것이다.

이상의 연구결과는 Nikuradse의 실험결과에 기초하여 개발된 마찰계수 분포로부터 유추한 것이기 때문에 관로의 수리조건이 Nikuradse 실험조건과 판이하게 다를 때는 적용에 주의를 요한다. 특히 상용관의 마찰계수 분포는 균일조도면의 마찰계수 분포와 판이하게 다른 것으로 나타났으므로 본 연

구결과에 기초하여 새로운 접근방법이 시도되어야 될 줄로 믿는다. 상용관 마찰계수 산정식으로 Hazen-Williams식(Williams와 Hazen, 1933), Colebrook-White식, Weston식, 유동훈(1995)의 영점높이 평균법과 마찰계수 평균법 등이 있으며, 이들의 우열에 대한 논의는 논외로 치더라도 어느 방법이나 본 연구에서 개발된 기준식을 사용하면 양해법 근사식 개발이 가능할 것이다.

참 고 문 헌

유동훈 (1993a). “천이류에서의 관마찰.” 대한토목학회 논문집, 제13권, 제4호, pp. 101-109.
 유동훈 (1993b). “균일조도 원형관 마찰계수.” 대한토목학회 논문집, 제13권, 제5호, pp. 165-172.
 유동훈, 강기훈 (1995). “영점높이와 관마찰계수.” 대한토목학회 논문집, 제15권, 제1호, pp. 139-147.
 유동훈 (1995). “복합면 마찰계수.” 대한토목학회 논문집, 제15권, 제3호, pp. 134-145.
 Barr, D.I.H. (1975). “Two additional methods of direct solution of the Colebrook-White function.” *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part 2, Vol. 59, pp. 827-835.
 Chen, J.J.J. (1985). “Systematic explicit solutions

of the Prandtl and Colebrook-White equations for pipe flow.” *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part 2, Vol. 79, pp. 383-389.
 Colebrook, C.F. (1938). “Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws.” *J. Inst. Civil Eng.* London, Vol. 11, pp. 133-156.
 Douglas, J.F., Gasiorek, J.M., and Swaffield, J.A. (1979). *Fluid mechanics*. Pitman Publ. Ltd.
 Nikuradse, J. (1932). “Gesetzmassigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Rohren.” *Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh.*, Vol. 356.
 Nikuradse, J. (1933). “Strömungsgesetze in rauhen Rohren.” *Ver. Dtsch. Ing. Forsch.*, Vol. 361.
 Prandtl, L. (1925). “Bericht ber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz.” *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 5, No. 2, p. 136.
 Streeter, V.L., and Wylie, E.B. (1983). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill Book Comp.
 Williams, G.S., and Hazen, A. (1933). *Hydraulic tables*. John Wiley & Sons, Inc.

〈접수: 1995년 6월 8일〉