

## 유한차분 모형에 의한 일차원 이송-확산방정식 계산결과의 비교

### Comparison of the Results of Finite Difference Method in One-Dimensional Advection-Dispersion Equation

이희영\* · 이재철\*\* · 장석환\*\*\* · 정선길\*\*\*\*  
Lee, Hee Young · Lee, Jae Cheoul · Jang, Suk Huan · Jeoung, Sun Kil

#### Abstract

ELM, a characteristic line based method, was applied to advection-dispersion equation, and the results obtained were compared with those of Eulerian schemes(Stone-Brian and QUICKEST). The calculation methods consisted of Lagrangian interpolation scheme and cubic spline interpolation scheme for the advection calculation, and the Crank-Nicholson scheme for the dispersion calculation. The results of numerical methods were as follows: (1) for Gaussian hill: ELM, using Lagrangian interpolation scheme, gave the most accurate computational result. ELM, using cubic spline interpolation scheme, and QUICKEST scheme gave numerical damping for Peclet number 50. Stone-Brian scheme gave phase shift introduced in the numerical solution for Peclet number 10 and 50. (2) for advanced front: All schemes gave accurate computational results for Peclet number 1 and 4. ELM, Lagrangian interpolation scheme, and Stone-Brian scheme gave dissipation error and ELM, using cubic spline interpolation scheme, and QUICKEST scheme gave numerical oscillation for Peclet number 50.

#### 요지

특성곡선을 고려한 ELM을 이송-확산방정식에 적용하여 그 결과를 Eulerian 기법(Stone-Brian, QUICKEST)과 비교하였다. 이송항의 계산을 위해서는 Lagrangian 보간법과 Cubic spline 보간법을 이용하였고 확산항의 계산에 있어서는 Crank-Nicholson 방법을 이용하였다. 수치모형의 적용결과는 다음과 같다. (1) Gaussian hill에의 적용: Lagrangian 보간법을 사용하여 계산한 경우가 가장 정확한 결과를 보였다. Cubic spline 보간법을 사용한 경우와 QUICKEST 방법의 경우에는 Peclet수가 50인 경우에 감쇠현상을 보였다. Stone-Brian 방법은 Peclet수 10, 50에서 위상오차가 발생하였다. (2) Advanced front에의 적용: 모든 방법이

\* 서울시립대학교 토목공학과 교수

\*\* 한국토지개발공사 토지연구원 기술개발실

\*\*\* 서울시립대학교 강사

\*\*\*\* 서울시립대학교 토목공학과 박사과정

Peclet수 1, 4에서 정확한 결과를 얻었다. Peclet수가 50인 경우에 Lagrangian 보간법을 사용하여 계산한 경우와 Stone-Brian 방법은 종폭오차가 발생하였고 Cubic spline 보간법을 사용한 경우와 QUICKEST 방법의 경우는 수치진동 현상을 보였다.

---

## 1. 서 론

최근 환경문제의 심각성이 점증되고 있다. 오염현상의 정확한 예측 및 적절한 유지관리를 위해서는 우선 오염물의 이송-확산 현상의 물리적 거동을 보다 정확히 파악하는 것이 선행되어야 한다. 이송-확산방정식의 해석을 위한 여러 수치기법들에 관하여 현재까지 많은 연구가 진행되어 왔으나 여러 수치기법들에 의한 계산결과가 실제의 물리적 현상과는 거리가 있는 수치진동이나 수치분산을 나타내며, 특히 이송현상이 지배적인 경우에는 이런 현상들이 더욱 심해진다. 이는 이송-확산방정식이 쌍곡선형 특성과 포물선형 특성을 동시에 지니고 있기 때문에 고정된 계산격자점을 이용하는 Eulerian 방법은 다음 시간단계를 계산하는 과정에서 이전 시간단계의 정보들의 전달이 제대로 이루어지지 않기 때문이다. 이 때문에 최근에는 Eulerian 방법의 단점을 보완하기 위하여 특성곡선 통과지점 주위 격자점에서의 농도와 농도의 공간미분값을 계수로 하는 Courant수의 함수인 보간다항식을 도입하여 특성곡선을 따르는 시간에 따른 전미분 형태로 근사시킴으로써 방정식의 쌍곡선형 특성을 반영하는 ELM(Eulerian-Lagrangian Method)이 이용되고 있다.

Holly와 Preissmann(1977), Holly와 Usseglio-Polatera(1984)는 양측 두 격자점에서의 농도 및 그 공간미분값들을 이용한 보간다항식을 도입하여 시간에 따른 전미분 형태로 근사시켜 방정식의 쌍곡선 특성을 반영하여 이송방정식을 풀고 이어서 확산방정식은 항상 안정한 Crank-Nicholson 기법을 이용하여 계산하였다. Cheng 등(1984)은 Eulerian-Lagrangian 방법의 이송-확산에의 적용에서 이차의 Lagrangian 보간함수를 적용하면 수치확산이 발생하지 않음을 보였으며 이를 upwind

유한차분모형과 비교하고 실제의 비등방성 이차원 문제에 적용하였다. Neuman(1984)은 Eulerian-Lagrangian 개념을 유한요소법에 적용하여 해석해가 존재하는 경우의 일, 이차원 이송-확산문제에 적용하여 Peclet 수가  $0 \sim \infty$ 의 범위에서 Courant 수가 1을 넘는 경우에도 정도 높은 결과를 얻을 수 있음을 보였다. Yeh(1990)는 sharp front 영역에 격자를 세분화시키는 기법을 이용하는 LEZOOM (Lagrangian-Eulerian method with zoomable hidden fine mesh approach)을 이용하여 Courant수가 1이 넘는 경우에도 Peclet 수의 제약없이 안정하고 정확하게 이송-확산 문제에 적용하였으나 격자의 증가로 인한 과대한 계산시간 증대의 문제점을 지니고 있다. 서일원과 김대근(1994)은 Eulerian-Lagrangian 방법을 이용하여 1차원 종확산방정식을 비교, 분석하였다. 보간법으로는 Lagrangian 3, 4, 5차 보간다항식과 Hermite 3, 5차 보간다항식을 사용하였으며 Hermite 보간다항식을 사용한 경우에 오차를 최소화할 수 있음을 보였다. 전경수와 이길성(1993)은 5차 보간다항식을 사용한 Holly-Preissmann 기법과 Crank-Nicholson 기법을 결합한 혼합모형을 사용하여 순간적으로 부하된 오염원의 종확산 문제에 적용하였으며 이송항이 지배적일수록 정확해와 가장 근사한 결과를 얻었다. 또한 전경수와 이길성(1994)은 일차원의 종확산에 특성곡선을 고려한 세가지 연산자 분리방법을 적용하여 그 결과를 Eulerian 기법들의 계산결과와 비교하여 ELM이 우수함을 입증하였다. 연산자 분리방법으로는 generalized upwind, two-point fourth-order 및 sixth-order Holly-Preissmann 기법을 사용하였다.

본 연구에서는 이송-확산문제에 대하여 특성곡선을 고려한 ELM을 적용하여 해석해가 존재하는 경우에 정도가 높은 방법으로 알려진 Eulerian 기법들과 계산결과를 비교하여 ELM의 장점과 단점

을 평가하였다. 보간방법으로는 Lagrangian 보간 함수와 Cubic spline 보간함수를 사용하였으며 Gaussian hill과 Advanced front에 적용하여 비교, 분석하였다.

## 2. 수치모형의 구성

일정한 단면에 대해 일정한 유속을 갖는 수로에서의 1차원 이송-확산방정식은 다음과 같다 (Fischer 등, 1979).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서  $x$ 와  $t$ 는 공간위치와 시간,  $C$ 는 농도,  $u$ 는 단면평균유속,  $D_L$ 은 일정한 상수로 가정한 종 방향확산계수를 나타낸다.

### 2.1 ELM에 의한 수치모형의 구성

식 (1)은 쌍곡선형 특성과 포물선형 특성이 동시에 내재되어 있는데 이 두가지 형태의 방정식이 가지는 물리적 성질과 그에 따른 수치해법이 각기 다르므로 이송항과 확산항으로 분리하여 별도로 취급하여 해를 구하는 것이 ELM이다. 식 (1)을 이

송항과 확산항으로 분리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 2u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - 2D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

1차원 이송-확산방정식 해석을 위한 격자는 Fig. 1과 같으며 쌍곡선형 방정식 (2)는 특성곡선을 고려하여 다음식 (4)와 같이 나타낼 수 있다. 식 (4)는 시간단계  $n$ 에서의  $p$ 점의 농도  $C$ 가 확산이 전혀 없이 시간단계  $n+1/2$ 의  $i$ 점으로 이송되는 것을 의미한다.

$$\frac{DC}{Dt} + \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (4a)$$

$$C_i^{n+1/2} + C_p^n \quad (4b)$$

여기서  $p$ 점은 시간단계  $n+1/2$ 에서 이송만 일어난 단계  $i$ 점을 지나는 특성곡선의 시간단계  $n$ 에서의 위치이다. 일반적으로 위치점  $p$ 는 격자점상에 위치하지 않기 때문에  $p$ 점에서의 농도는 가장 가까운 위치에 있는 두 격자점에서의 값들로부터 보간하여 구하게 되는데, 본 연구에서는 다음과 같은 수치보간법을 사용하였다.

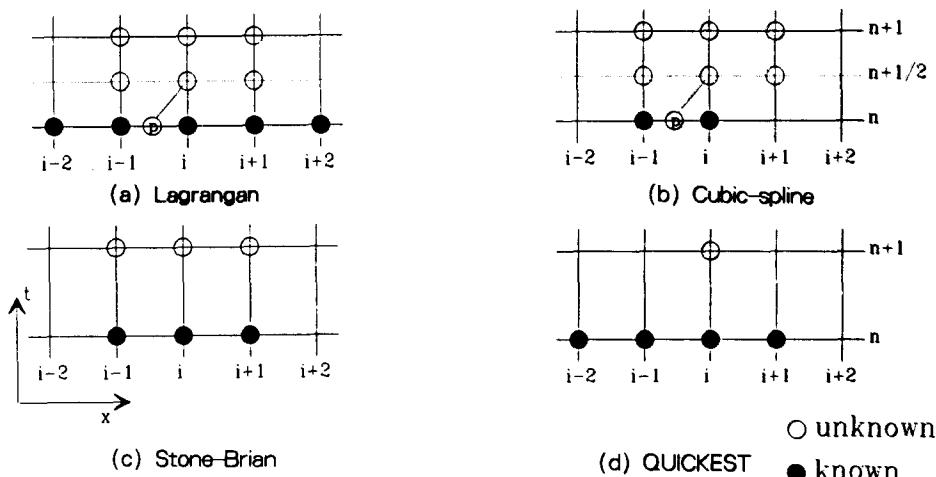


Fig. 1. Schematic Representation of the Numerical Schemes

### 2.1.1 Lagrangian 보간법

Lagrangian 4차 보간다항식을 이용하는 경우의 이송모형은 다음과 같다(Al-Khafaji와 Tooley, 1986).

$$C_i^{n+1/2} = C_p^n = L_1 C_{i-2}^n + L_2 C_{i-1}^n + L_3 C_i^n + L_4 C_{i+1}^n + L_5 C_{i+2}^n \quad (5)$$

여기서

$$L_1 = -\frac{(C_R-1)C_R(C_R+1)(C_R+2)}{24} \quad (6)$$

$$L_2 = -\frac{(C_R-2)C_R(C_R+1)(C_R+2)}{6} \quad (7)$$

$$L_3 = -\frac{(C_R-2)(C_R-1)(1+C_R)(C_R+2)}{4} \quad (8)$$

$$L_4 = -\frac{(C_R-2)(C_R-1)C_R(C_R+2)}{6} \quad (9)$$

$$L_5 = -\frac{C_R(C_R+1)(C_R-1)(C_R-2)}{24} \quad (10)$$

$$C_R = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (11)$$

Lagrangian 보간다항식은 주위 농도값만을 이용하여 보간하기 때문에 차수를 높이려면 보다 많은 기지점이 필요하므로 경계처리에서 차수를 낮추거나 여러지점의 값을 사용하여야 한다는 어려움이 있다. 본 연구에서는 실제로는 경계지점에서의 여러 기지값을 알기 어려우므로 경계지점에서 보간차수를 2차로 낮추어 적용하였다.

### 2.1.2 Cubic spline 보간법

Cubic spline 보간법은 p점의 양측 격자점의 농도와 농도의 공간에 대한 2계 미분값으로 다음과 같이 구성된다(Al-Khafaji와 Tooley, 1986).

$$C_i^{n+1/2} = C_p^n = A_i C_{i-1}^n + A_i C_i^n + B_i C_{i-1}^n + B_i C_i^n \quad (12)$$

여기서

$$A_i = C_R \quad (13)$$

$$A_i = 1 - C_R \quad (14)$$

$$B_i = -\frac{\Delta x^2}{3}(1-C_R) + \frac{\Delta x^2}{2}(1-C_R)^2 - \frac{\Delta x^2}{6}(1-C_R)^3 \quad (15)$$

$$B_i = -\frac{\Delta x^2}{6}(1-C_R) + \frac{\Delta x^2}{6}(1-C_R)^3 \quad (16)$$

이며  $C_{xx}$ 는 농도의 공간 2계 미분값이다.

공간에 대한 2계도함수는 각 절점에서의 1계도 함수가 연속임을 이용하면 다음과 같이 삼중대각행렬로 구성되어 Thomas algorithm을 사용하여 해를 구할 수 있다.

$$(x_i - x_{i-1})C_{xx,i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})C_{xx,i} + (x_{i+1} - x_i)C_{xx,i+1} = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}(C_{i+1} - C_i) + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}(C_{i-1} - C_i) \quad (17)$$

상, 하류 경계단에서의 2계도함수값은 0으로 사용하였다.

Cubic spline 보간법은 p점의 양측 격자점의 농도와 농도의 공간미분값으로 구성되기 때문에 적용문제에서 완벽하게 초기조건을 알아야 하고 경계지점에서의 농도값과 농도의 공간미분값을 알아야 한다는 어려움이 있고 매 시간단계마다 구성되는 농도와 농도의 공간미분값의 행렬연산으로 인하여 계산시간이 많이 소비된다.

확산방정식 (3)에 대한 수치기법으로는 포물선형 방정식에 대한 해석으로 널리 이용되고 있는 다음과 같은 Crank-Nicholson 차분식을 이용하였다.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{D_L}{2} \left( \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{C_{i+1}^{n+1/2} - 2C_i^{n+1/2} + C_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) \quad (18)$$

식 (18)을 상류 및 하류 경계조건과 함께 정리하면

$$\begin{aligned} & -\frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} C_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2}\right) C_i^{n+1} - \frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} C_{i+1}^{n+1} = \\ & -\frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} C_{i-1}^{n+1/2} + \left(1 - \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2}\right) C_i^{n+1/2} + \\ & \frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} C_{i+1}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $C_{i-1}^{n+1/2}$ ,  $C_i^{n+1/2}$ ,  $C_{i+1}^{n+1/2}$ 는 이송방정식에서 계산한 농도값들이다. 식 (19)에서 시간단계  $n+1$ 에서의 농도에 대한 삼중대각행렬이 구성되며 이는 Thomas algorithm을 이용하여 해를 구할 수 있다.

## 2.2 Stone-Brian's Method

1차원 이송-확산방정식 (1)을 Eulerian 기법으로 차분화 하면 다음과 같다(Fischer 등, 1979).

$$\begin{aligned} & (1-\theta) \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \\ & + \frac{\theta}{2} \left( \frac{C_{i-1}^{n+1} - C_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i+1}^n}{\Delta t} \right) \\ & + \frac{u}{2} \left( \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} + \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) \\ & - \frac{D_L}{2} \left( \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)을 정리하면,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\theta}{2} - \frac{u \Delta t}{4 \Delta x} - \frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} \right) C_{i-1}^{n+1} + \\ & \left( (1-\theta) + \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} \right) C_i^{n+1} \\ & + \left( \frac{\theta}{2} + \frac{u \Delta t}{4 \Delta x} - \frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} \right) C_{i+1}^{n+1} \\ & = \left( \frac{\theta}{2} + \frac{u \Delta t}{4 \Delta x} + \frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} \right) C_i^n + \\ & + \left( (1-\theta) + \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} \right) C_i^n + \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\theta}{2} - \frac{u \Delta t}{4 \Delta x} + \frac{D_L \Delta t}{2 \Delta x^2} \right) C_{i+1}^n \quad (21)$$

여기서  $\theta$ 는 가중치로서  $1/3$ 이 최적값으로 알려져 있으며 위식 역시 삼중대각행렬 형태이며 앞에서와 같은 방법으로 해를 구할 수 있다.

## 2.3 QUICKEST Method

Leonard(1979)가 구성한 3차의 정도를 가지는 방법으로써 1차원 이송-확산방정식을 차분화 하면 다음과 같다(Abbott와 Basco, 1989; Leonard, 1979).

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &= C_R \left( \gamma + \frac{1}{6} C_R^2 - \frac{1}{6} \right) C_{i-2}^n \\ &+ \left( C_R \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_R - 3\gamma - \frac{1}{2} C_R^2 + \frac{1}{2} \right) + \gamma \right) C_{i-1}^n \\ &+ \left( C_R \left( 3\gamma - C_R + \frac{1}{2} C_R^2 - \frac{1}{2} \right) + 1 - \gamma \right) C_i^n \\ &+ \left( C_R \left( \frac{1}{2} C_R - \frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{6} C_R^2 + \frac{1}{6} \right) + \gamma \right) C_{i+1}^n \end{aligned} \quad (22)$$

여기서

$$\gamma = D_L \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2} \quad (23)$$

QUICKEST방법은 차수를 높인 대신 상류에서의 기지점이 하나 더 사용되므로 상류경계에서의 처리가 문제시 된다. 본 연구에서는 상류단에서의 2개의 경계값을 경계에서 가장 가까운 지점의 값과 같다고 놓고 계산하였다.

## 3. 모형의 적용

앞에서 기술한 각 방법들을 정확해가 존재하는 오염원의 1차원 종확산 문제에 적용하였다.

### 3.1 Gaussian hill에의 적용

단면이 일정하고 일정한 유속으로 흐르는 1차원

흐름에서의 Gaussian hill에 적용하였다. 초기조건 및 경계조건은 다음과 같다.

$$C(x,0) = C_0(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (24)$$

$$C(x,t) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \quad (25)$$

여기서  $\sigma_0$ 은 표준편차이고,  $x_0$ 는 오염원의 초기위치이다.

위 초기조건과 경계조건에서의 정확하는 다음과 같다(Yeh, 1990).

$$C(x,t) = \frac{\sigma_0}{\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (26)$$

여기서

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + 2D_L t \quad (27)$$

$$\bar{x}_0 = x_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (28)$$

수치모형의 적용조건으로는 단면평균유속  $u=1$  m/s, 확산계수  $D_L=100, 25, 10, 2$  m<sup>2</sup>/s, 표준편차  $\sigma_0=264$ , 공간격자간격  $\Delta x=100$  m, 시간증분간격  $\Delta t=20, 50, 80, 100$  초를 사용하였으며 초

기농도분포의 평균치의 위치를 2000 m에 놓고  $t=7000$  초까지 계산을 수행하였다. 계산된 결과들의 정도 평가로는 Table 1에 나타낸 것과 같은 무차원 척도를 사용하였다(Quamrul Ahsan과 Bruno, 1992).

Fig. 2는 시간 7,000초에서의 이송-확산된 Gaussian hill 농도분포를 도시한 것으로 Peclet수는 이송 또는 확산이 지배적인 범위를 선정하여 각각 1, 4, 10, 50으로 하여 계산하였고 Courant수는 0.5 일때 계산된 결과이다. 그럼에서 종축의  $C_0$ 는 초기농도분포의 평균값을 의미하며 Peclet수가 1일때 위상오차와 수치진동은 모형 모두 발생하지 않았으며 정확해와 잘 일치하였다. Stone-Brian 방법이 전체오차가 타 방법에 비해 약간 발생하였으나 수치감쇠는 제일 작게 나타났고 QUICKEST 방법이 수치감쇠가 가장 크게 나타났다. Peclet수가 4일때도 역시 위상오차와 수치진동은 모두 발생하지 않았으며 전체오차로 볼때 Stone-Brian 방법이 가장 오차가 컸으며 이외의 모형은 모두 비슷한 정도의 계산결과를 얻었으며 수치감쇠의 크기는 Stone-Brian 방법이 가장 작았다. Peclet수가 10일때 위상오차는 모두 발생하지 않았으며 전체적인 오차와 농도의 peak점의 수치감쇠의 정도에서는 ELM(Lagrangian)이 가장 정확해와 잘 일치하였

Table 1. Definition of Error Measures

Symbol	Definition	Comments	Value of exact sol.
$\phi$	$\frac{1}{M(t)} \left( \int (C(x,t)^{nu} - C(x,t)^{ex})^2 dx \right)^{1/2}$	Integral of overall error of numerical sol.	0
$\epsilon$	$\frac{C(t)_{max}^{ex} - C(t)_{max}^{nu}}{C(t)_{max}^{ex}}$	Measure of the artificial damping of numerical sol.	0
$\psi$	$\left  \frac{C(t)_{min}^{nu} - C(t)_{max}^{nu}}{C(t)_{max}^{ex}} \right $	Measure of the spurious oscillation in numerical sol.	0
$\mu$	$\frac{1}{M(t)} \int C(x,t)^{nu} dx$	Measure of mass conservation	1
$\xi$	$1 - \frac{\sqrt{(x_{max}^2)^{nu}}}{\sqrt{(x_{max}^2)^{ex}}}$	Measure of the phase shift introduced in the numerical sol.	0

$M(t)$ : initial total mass

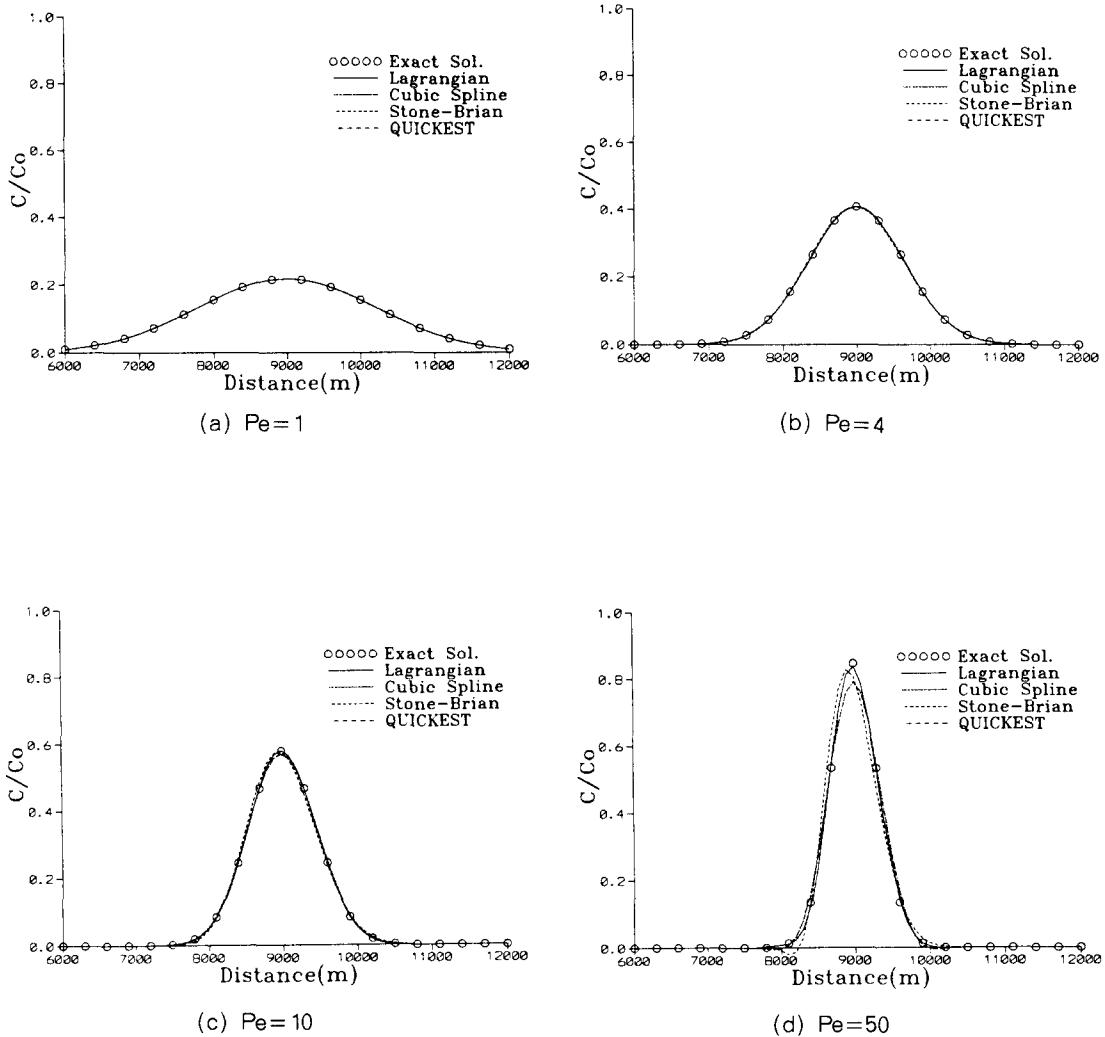


Fig. 2. Comparison of Results Obtained with Numerical Methods for Gaussian Hill

다. ELM(Cubic Spline)은 수치진동 오차가 약간 발생하였으며 QUICKEST 방법과 같이 수치감쇠가 생겼다. Peclet수가 50일때 Stone-Brian 방법만 위상오차가 발생하였으며 ELM(Lagrangian)이 제일 정확해와 잘 일치하였다. Stone-Brian 방법이 수치진동 오차가 가장 많이 발생하였으며 ELM(Cubic Spline)과 QUICKEST 방법은 농도의 peak 값의 수치감쇠가 타 방법에 비해 크게 발생하였다.

각 방법의 Peclet수와 Courant수의 변화에 따른 각각의 오차 비교는 Table 2-5에 나타내었다. 표에서  $\phi$ 는 수치모형의 전체적인 오차 평가의 척도로서 비교한 모형중 Stone-Brian 방법이 오차가 가장 크게 발생하였으며 Peclet수가 1, 50일때에는 ELM(Lagrangian) 방법이 가장 오차가 작았으며 Peclet수가 4일때에는 Stone-Brian 방법을

Table 2. Comparison of Error Measures for Various Methods (Peclet Number 1)

	Courant 수	$\phi$	$\epsilon$	$\psi$	$\mu$	$\xi$
Lagrangian	0.2	0.00000	-0.00078	0.00000	1.00000	0.00000
	0.5	0.00000	-0.00078	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00016	-0.00294	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00000	-0.00079	0.00000	1.00000	0.00000
Cubic spline	0.2	0.00000	-0.00009	0.00000	0.99999	0.00000
	0.5	0.00000	-0.00032	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00016	-0.00280	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00000	-0.00078	0.00000	1.00000	0.00000
Stone Brian	0.2	0.00000	0.00055	0.00000	1.00000	0.00000
	0.5	0.00001	0.00009	0.00000	0.99999	0.00000
	0.8	0.00018	-0.00276	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00004	-0.00165	0.00000	0.99999	0.00000
QUICKEST	0.2	0.00000	0.00009	0.00000	1.00000	0.00000
	0.5	0.00000	0.00087	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00018	-0.01176	0.00000	1.00000	0.01111
	1.0	—	—	—	—	—

Table 3. Comparison of Error Measures for Various Methods (Peclet Number 4)

	Courant 수	$\phi$	$\epsilon$	$\psi$	$\mu$	$\xi$
Lagrangian	0.2	0.00002	-0.00240	0.00000	0.99999	0.00000
	0.5	0.00002	-0.00236	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00040	-0.00280	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00002	-0.00248	0.00000	0.99999	0.00000
Cubic spline	0.2	0.00005	0.00582	0.00000	0.99999	0.00000
	0.5	0.00002	0.00302	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00040	-0.00083	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00002	-0.00248	0.00000	0.99999	0.00000
Stone Brian	0.2	0.00007	0.00189	0.00000	0.99999	0.00000
	0.5	0.00012	0.00083	0.00000	0.99999	0.00000
	0.8	0.00059	-0.00341	0.00000	0.99999	0.01111
	1.0	0.00032	-0.00049	0.00000	0.99999	0.00000
QUICKEST	0.2	0.00003	0.00432	0.00000	0.99999	0.00000
	0.5	0.00001	0.00125	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00040	-0.00022	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00001	0.00125	0.00000	1.00000	0.00000

Table 4. Comparison of Error Measures for Various Methods (Peclet number 10)

	Courant 수	$\phi$	$\epsilon$	$\psi$	$\mu$	$\xi$
Lagrangian	0.2	0.00007	-0.00290	0.00000	1.00000	0.00000
	0.5	0.00005	-0.00267	0.00000	1.00000	0.00000
	0.8	0.00069	-0.00085	0.00000	0.99999	0.00000
	1.0	0.00004	-0.00404	0.00000	1.00000	0.00000
Cubic spline	0.2	0.00025	0.02578	0.00056	1.00000	0.00000
	0.5	0.00016	0.01646	0.00005	1.00000	0.00000
	0.8	0.00067	0.00600	0.00000	1.00001	0.00000
	1.0	0.00004	-0.00404	0.00000	1.00000	0.00000
Stone Brian	0.2	0.00023	0.00448	0.00000	1.00000	0.00000
	0.5	0.00041	0.00595	0.00000	0.99999	0.00000
	0.8	0.00134	0.00139	0.00085	1.00000	0.01111
	1.0	0.00107	0.00572	0.00770	1.00000	0.01111
QUICKEST	0.2	0.00023	0.02333	0.00038	1.00000	0.00000
	0.5	0.00012	0.01259	0.00000	1.00001	0.00000
	0.8	0.00067	0.00439	0.00000	1.00000	0.00000
	1.0	0.00002	-0.00163	0.00000	1.00000	0.00000

Table 5. Comparison of Error Measures for Various Methods (Peclet Number 50)

	Courant 수	$\phi$	$\epsilon$	$\psi$	$\mu$	$\xi$
Lagrangian	0.2	0.00047	0.01174	0.00152	1.00000	0.00000
	0.5	0.00034	0.01010	0.00031	1.00000	0.00000
	0.8	0.00127	0.01366	0.00000	1.00001	0.00000
	1.0	0.00004	-0.00368	0.00000	1.00000	0.00000
Cubic spline	0.2	0.00115	0.09236	0.01083	1.00000	0.00000
	0.5	0.00082	0.06740	0.00593	0.99999	0.00000
	0.8	0.00119	0.03444	0.00098	1.00000	0.00000
	1.0	0.00004	-0.00368	0.00000	1.00000	0.00000
Stone Brian	0.2	0.00091	0.02117	0.00034	1.00000	0.00000
	0.5	0.00157	0.02317	0.02371	1.00000	0.01111
	0.8	0.00362	0.04726	0.08503	1.00000	0.02222
	1.0	0.00359	0.07014	0.13492	1.00000	0.02222
QUICKEST	0.2	0.00113	0.09102	0.01054	1.00000	0.00000
	0.5	0.00079	0.06487	0.00548	1.00000	0.00000
	0.8	0.00118	0.03244	0.00078	1.00000	0.00000
	1.0	0.00004	-0.00326	0.00000	1.00000	0.00000

제외한 나머지 방법들이 거의 같은 정도의 오차가 나타났고 Peclet수가 10일때에는 Courant수가 작은 경우(0.2, 0.5)에는 ELM(Lagrangian) 방법의 정도가 가장 높았으며 Courant수 큰 경우(0.8, 1.0)에는 QUICKEST 방법의 오차가 가장 작았다.  $\epsilon$ 은 농도의 peak 값의 수치감쇠의 정도를 나타내는 값으로 Peclet수가 1, 4일때에는 Stone-Brian 방법이 가장 작게 나타났고 Courant수가 1일때는 ELM이 가장 작았다. Peclet수가 10, 50일때에는 Cr 수가 1일 경우에는 QUICKEST 방법의 오차가 가장 작았고 그외에는 ELM(Lagrangian) 방법이 제일 정확하게 계산되었다.  $\Psi$ 는 음의 해의 발생여부를 나타내는 수치진동오차를 나타낸다. Peclet수 1, 4에서는 모두 수치진동이 발생하지 않았으며 Peclet수 10, 50에서 ELM(Lagrangian) 방법이 수치진동이 거의 발생하지 않았으나 Stone-Brian 방법은 수치진동오차가 다른 모형에 비해 상대적으로 크게 발생하였고 QUICKEST 방법과 ELM(Cubic Spline)도 약간 발생하였다.  $\mu$ 는 질량보존성을 나타내는 값으로 모두 전 영역에 걸쳐 정도 높게 계산되었다.  $\xi$ 는 농도의 peak 발생지점의 오차를 나타내는 값이다. ELM(Lagrangian)과 ELM(Cubic Spline) 방법은 전 영역에서 위상오차는 전혀 발생하지 않았으며 Stone-Brian 방법은 Peclet수가 1인 경우를 제외하고는 Peclet수가 증

가할수록 위상오차가 증가하는 경향을 보였으며 QUICKEST 방법은 Peclet수가 1인 경우에 약간의 위상오차가 발생하였다. 이상 오차비교를 통하여 각 수치기법들의 Peclet수와 Cr에 따른 정도를 평가하였다.

각 방법의 계산시간 검사에서는 QUICKEST 방법이 가장 빠르고 Lagrangian 보간법을 사용한 경우와 Stone-Brian 방법이 그 다음으로 비슷하였으며 Cubic spline 보간법을 사용한 경우가 가장 계산시간이 많이 걸렸다. QUICKEST 방법을 기준으로 1로 놓았을 때 Lagrangian 보간법을 사용한 경우는 1.66, Stone-Brian 방법이 1.64, Cubic spline 보간법을 사용한 경우가 1.74였다.

### 3.2 Advanced front에의 적용

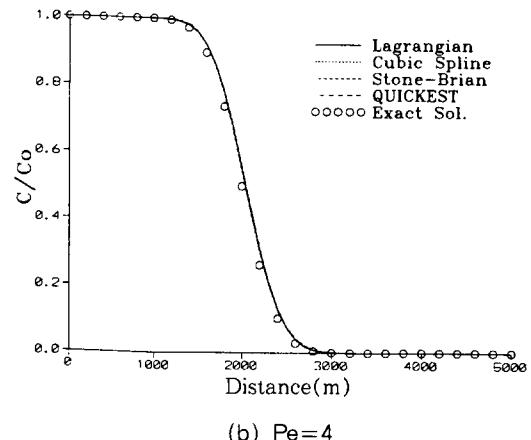
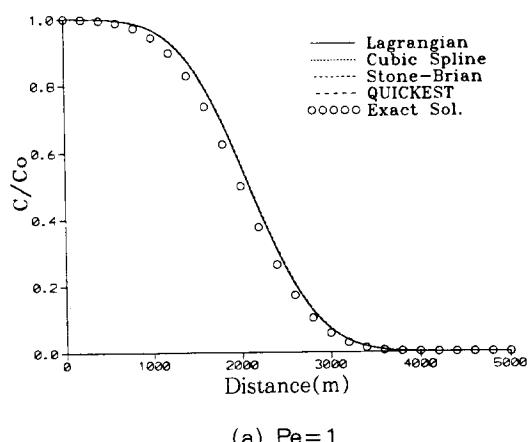
단면이 일정하고 일정한 유속으로 흐르는 1차원 흐름에서의 advanced front에 적용하였다. 초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$C(x,0)=0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (29)$$

$$C(x,t)=1 \quad t > 0 \quad x=0 \quad (30)$$

$$C(x,t) \rightarrow 0 \quad t > 0 \quad x \rightarrow \infty \quad (31)$$

식 (29)–(31)과 같은 초기조건과 경계조건 하에



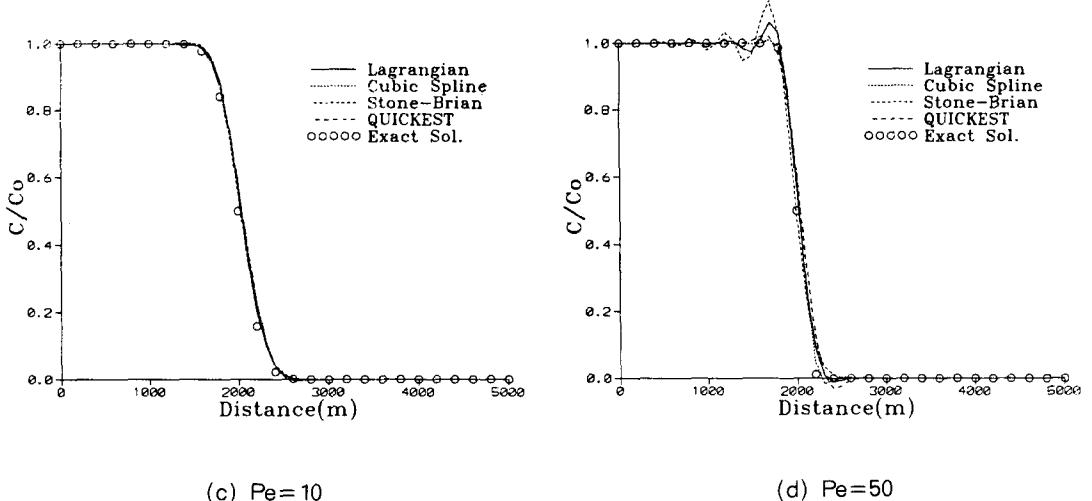


Fig.3. Comparison of Results Obtained with Numerical Methods for Advanced Front

서 정확히는 다음과 같다(Leu와 Dane, 1990).

$$C(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ erfc\left(\frac{x-ut}{2(D_L t)^{1/2}}\right) + \exp\left(\frac{ux}{D_L}\right) erfc\left(\frac{x-ut}{2(D_L t)^{1/2}}\right) \right\} \quad (32)$$

수치모형의 적용조건은 앞의 Gaussian hill에서의 적용조건과 같으며  $t=2000$ 초까지 계산을 수행하였다.

Fig. 3에서 보듯이 Peclet수가 1, 4인 경우는 모두 해석해와 잘 일치하였으며 Peclet수 10인 경우는 Stone-Brian 방법이 front 상단 부분에서 해의 불안정을 나타나기 시작하여 Peclet수 50인 경우에는 front 상단 부분에서 Stone-Brian 방법은 타 방법에 비하여 상당히 큰 수치진동이 발생하였으며 Lagrangian 보간법을 사용한 ELM의 경우도 어느 정도의 수치진동 현상이 나타났다. 이는 front 전후의 농도값들의 큰 차이 때문에 발생되는 보간함수의 제약 때문이라고 생각된다. QUICKEST 방법은 front 상단부에서 해의 진동현상은 발생하지 않아 해석해에 가까운 거동을 보였으나 감쇠현상이 나타났고 front 하단부에서는 음의 해가 발생하는 수치진동 현상이 나타났다. Cubic spline

보간법을 사용한 ELM이 Peclet수가 큰 경우에도 가장 해석해에 일치하는 거동을 나타냈다.

#### 4. 결 론

Eulerian-Lagrangian 방법과 Eulerian 방법을 이송-화산 방정식에 적용하여 비교하여 본 결과는 다음과 같다.

(1) Gaussian hill에의 적용의 경우 Lagrangian 보간법을 사용하여 계산한 ELM의 경우는 전 영역에서 해석해와 거의 일치하는 거동을 보였고 Cubic spline 보간법을 사용한 ELM의 경우와 QUICKEST 방법은 Peclet수가 1, 4, 10인 경우에는 정도 높은 결과를 얻었으나 Peclet수가 50인 경우에는 농도의 peak점의 수치감쇠 현상을 보였다. Stone-Brian 방법은 Peclet수가 1, 4인 경우에는 비교적 정확히 계산되었으나 Peclet수가 10에서는 위상오차가 발생하였으며 Peclet수 50에서 위상오차와 감쇠현상이 비교적 크게 나타났다.

(2) Advanced hill에의 적용의 경우 Cubic spline 보간법을 사용한 ELM의 경우는 전 영역에 걸쳐 해석해와 가장 잘 일치하였다. Peclet수가 1, 4인 경우는 모두 해석해와 잘 일치하였으며 Peclet수가 10, 50인 경우 Lagrangian 보간법을

사용한 ELM의 경우와 Stone-Brian 방법은 front 상단 부분에서 해의 진동현상이 발생하였다. QUICKEST 방법은 front 상단부에서는 안정하나 해의 감쇠현상이 나타났고 front 하단부에서는 음의 해가 가장 크게 발생하였다.

(3) Gaussian hill에서는 Lagrangian 보간법을 사용한 ELM이 전 영역에 걸쳐서 안정적이고 정확한 해의 거동을 보이나 Advanced hill에서는 Cubic-spline 보간법을 사용한 ELM의 경우가 가장 정확한 거동을 나타냈고 Lagrangian 보간법을 사용한 경우 front부분 전후의 값들의 큰 차이 때문에 생기는 보간함수의 제약 때문에 front 부분에서 수치적 불안정이 나타나고 있다.

## 참 고 문 헌

- 서일원, 김대근 (1994). “Eulerian-Lagrangian 방법을 이용한 1차원 종확산방정식의 수치모형.” 한국수문학회지, 제27권, 제2호, pp. 156-165.
- 전경수, 이길성 (1993). “Eulerian-Lagangian 혼합모형에 의한 종확산방정식의 수치해법.” 한국수문학회지, 제26권, 제3호, pp. 127-148.
- 전경수, 이길성 (1994). “종확산방정식에 대한 Eulerian-Lagangian 연산자 분리방법.” 대한토목학회논문집, 제14권, 제1호, pp. 131-141.
- Abbott, M.B., and Basco, D.R. (1989). *Computational fluid dynamics*. Longman Scientific & Technical.
- Al-Khafaji, A.W., and Tooley, J.R. (1986). *Numerical methods in engineering practice*. Holt, Rinehart and Winston.
- Cheng, R.T., Casulli, V., and Nevill, M.S. (1984). “Eulerian-Lagrangian solutin of the convection-dispersion equation in natural coordi-

- nates.” *WRR*, Vol. 20, No. 7, pp. 944-952.
- Holly, F.M., and Usseglio-Polatera, J.M. (1984). “Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow.” *J. of Hydraulic Engineering*, Vol. 110, No. 7, pp. 905-926.
- Holly, F.M., and Preissmann, A. (1977). “Accurate calculation of transport in two dimensions.” *J. of Hydraulics Division*, Vol. 103, No. 11, pp. 1259-1277.
- Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H. (1979). *Mixing in inland and coastal waters*. Academic Press.
- Leonard, B.P. (1979). “A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, pp. 59-98.
- Leu, F.J., and Dane, J.H. (1990). “Analytical solution of the one-dimentional advection equation and two- or three-dimensional dispersion equation.” *WRR*, Vol. 26, No. 7, pp. 1475-1482.
- Neuman, S.P. (1984). “Adaptive Eulerian-Lagrangian finite element method for advection-dispersion.” *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, Vol. 20, pp. 321-337.
- Quamrul Ahsan, A.K.M., and Bruno, M.S. (1992). “Three-dimensional Eulerian-Lagrangian transport model.” *Estuarine and Coastal Modeling*, pp. 1-12.
- Yeh, G.T. (1990). “A Lagrangian-Eulerian method with zoomable hidden fine-mesh approach to solving advection-dispersion equation.” *WRR*, Vol. 26, No. 6, pp. 1133-1144.

〈접수 : 1995년 1월 27일〉