

〈論 文〉

휨과 비틀림이 연계된 채널보의 진동

Coupled Flexural and Torsional Vibration of Channel Beam

김 상 환*

Kim, Sang-Hwan

(1995년 1월 16일 접수 ; 1995년 6월 8일 심사완료)

ABSTRACT

The study deals with the vibration of a beam whose flexural and centroidal axes are not coincident. The elementary bending-twisting theory is employed to derive the equation of motion, in which the effects of rotary inertia are added to the bending displacements and the effects of warping are added to the twist. Bending translation is restricted to one direction so that one bending equation is used instead of two. The equations of motion are solved by using the boundary value problem. The exact natural frequencies are found from the frequency equation, which is obtained from the condition that the homogeneous system of algebraic equations representing the spatial solution shall not yield a trivial solution. The orthogonal conditions are established, and the principal mode equations of forced vibration are derived. As an example, the cantilevered beam is chosen and the first some natural frequencies and their modal shapes are found.

1. 서 론

탄성축과 질량중심축이 일치하지 않으며, 일정하고 균일한 단면을 갖는 보는 휨진동과 비틀림진동이 동시에 일어나는데, 채널형 보가 대표적이다. 이와 같은 형태의 보진동은 휨거동과 비틀림 거동이 연계된 것이다. 그리고, 이같이 진동하는 터빈 날개, 항공기 날개 및 프로펠러 등의 중요성 때문에 이에 대해 다각도로 해석하고 있다.

휨진동과 비틀림진동의 연계성을 고려하는 중요성 때문에 이들 요소의 고유진동수와 고유진동모우드를 계산하는 여러 근사법이 연구되었다. 이 방법 중에

한 방법이 이산화 방법인데, 집중질량을 기초로한 방법과 변형곡선을 이용한 Rayleigh-Ritz 법⁽²⁾과 Galerkin 법^(3,4)이 있다.

휨과 비틀림이 연계된 진동방정식은 Federhofer⁽⁵⁾가 유도하였다. Federhofer는 임의의 단면을 갖는 보의 3-차원 진동문제를 해석하기 위하여 두 방향의 휨거동과 축방향의 비틀림거동이 연계된 식을 유도하였으나, 단면회전관성과 전단변형에 대한 영향은 고려치 않았다.

Bishop과 Price⁽⁶⁾는 Bernoulli-Euler 보이론의 적용에 대하여 자세히 설명하였고, 전단변형, 단면회전관성, 그리고 워핑(warping)을 고려하여 양단이 자유인 보를 해석하였다. Timoshenko, Young, Weaver⁽⁷⁾ 역시 휨-비틀림 연계진동을 채널 보에 적용할 때에, 워핑은 고려하였으나, 전단과 단면회전

*정회원, 한국전력기술(주)

관성을 고려치 않았다.

본 연구의 목적은 휨-비틀림 연계진동하는 보의 주파수함수를 유도하고 이에 따른 모드의 수식해를 얻는데 있다. 또한 적절한 경계조건에 따른 직교조건(orthogonal condition)에 대하여 검토하여 강제진동에 이용하였다.

Federhofer와 다르게 두 휨거동중에서 한 휨거동 그리고 한 비틀림 거동이 연계된 보의 진동만 다루겠다. 왜냐하면, 채널 보의 단면이 휨축에 수직인 축에 대하여 대칭이기 때문이다. 휨진동 방정식은 Bernoulli-Euler 이론에서 유도하였는데 전단과 단면의 회전관성 영향을 포함하였고, 비틀림진동방정식은 Timoshenko 모델과 워핑을 고려하여 유도하였다. 휨에 의한 처짐과 비틀림각은 서로 독립이 아니기 때문에 운동방정식은 연립미분방정식의 형태로 유도되었다.

유도된 주파수 함수가 매우 복잡하여 고유진동수와 고유모드를 계산할 때에는 컴퓨터를 이용하였다. 주파수함수는 8개 적분상수에 대한 계수의 행렬식이 부정해가 되지 않아야 한다는 조건으로부터 구하였고, 또한 강제진동에 대한 수식해도 서술하였다.

2. 이 론

휨축 또는 탄성축과 중심축이 일치하지 않는 보(채널 단면 보)를 Fig. 1에 나타내었다. 여기서, 휨축과 중심축 사이의 거리가 c 이고 단면이 균일한 보이다. 보단면이 z -축에 대해서는 대칭이지만, y -축에 대해서는 비대칭이어서 x -축에 관한 비틀림 진동이 x - y 평면에서 휨진동과 연계된다.

보단면의 치수가 보의 길이에 비하여 매우 작지

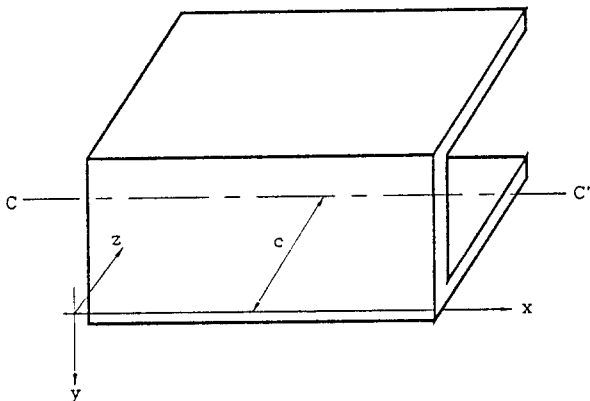


Fig. 1 Relation between flexural axis(x -axis) and centroidal axis($C-C'$)

않다면, 보단면은 병진뿐만 아니라 z -축에 관한 회전운동도 고려하여야 하므로, 휨진동에 단면회전관성의 영향을 고려하였다. 이 때에 회전각은 처짐곡선의 기울기와 같다.

단면이 단혀 있는 경우에 단면의 치수가 길이에 비하여 매우 작지 않다면, 워핑은 비틀림각에 큰 영향을 주지 못한다. 그러나, 단면이 열려 있다면, 비틀림변형중에 플랜지의 휨거동으로 워핑에 의한 변형이 발생하므로 x -축에 관한 비틀림 변형에 영향을 미친다⁽⁸⁾.

비틀림과 휨진동이 연계되어 있지만, 보의 단면이 대칭이 아닌 휨진동에서 하중을 전단중심에 작용시킨다면, 비틀림은 일어나지 않는다. 여기서 휨축 혹은 전단중심축($x-x'$)은 중심축($C-C'$)과 평행함을 Fig. 1에서 알 수 있다.

2.1 운동방정식

Fig. 2에 중심축이 $C-C'$ 이고 보축이 x 임을 나타내었다. 전단력은 V 이고, 휨모멘트는 M_x , 회전력은 T_x , 수직하중에 대한 처짐 $y(x, t)$ 은 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x) \tag{1}$$

여기서 EI_z 은 보의 휨강성이고, $p(x)$ 에는 관성력, 단면회전관성, 외력, 질량분포 효과 등이 포함되었다.

보가 진동할 때에 횡방향 관성력은 다음과 같이 주어진다.

$$-\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y - c\phi) \tag{2}$$

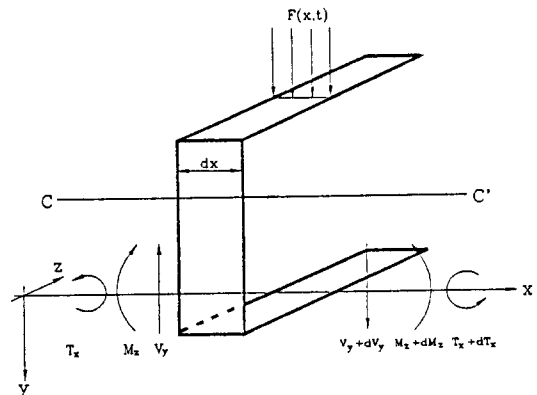


Fig. 2 Slice of beam showing notation and convention ; V =shearing force, M =bending moment, T =torque

여기서, ρ 는 재료의 질량밀도이고, A 는 단면적이며, c 는 보단면의 중심과 전단중심 사이의 거리이다. 만약 단면이 두 축에 대하여 대칭이라면, 전단중심과 단면중심은 일치한다. Fig. 3과 같은 채널보에서 c 는 다음과 같이 주어진다^(9,10).

$$c = \frac{t_f b^2}{ht_w + 2bt_f} + \frac{3t_f b^2 h^2}{t_w h^3 + 2bt_f^2 + 6bt_f h^2} \quad (3)$$

일반적으로 보요소가 휨진동할 때에 z -축에 대한 비틀림진동을 동반한다. 회전각은 보의 처짐곡선의 기울기, $\frac{\partial y}{\partial x}$ 와 같으므로 속도와 가속도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \quad \text{그리고} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \quad (4)$$

그러므로, 질량중심을 통과하고 x - y 평면에 수직방향으로 작용하는 미소길이 dx 의 관성력은 다음과 같이 주어진다.

$$-\rho I_z \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \cos \phi dx \quad (5)$$

여기서 ϕ 는 Fig. 4에서와 같이 z -축에 관한 회전각이다. ϕ 가 매우 작다면 $\cos \phi \approx 1$ 이어서 식 (5)는 다음과 같이 된다.

$$-\rho I_z \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} dx \quad (6)$$

이 모멘트를 미소요소의 평형방정식에 고려하면,

$$V dx + \frac{\partial M_z}{\partial x} dx - \rho I_z \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} dx = 0 \quad (7)$$

전단력을 y -방향에 대한 식에 대입하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} dx &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial M_z}{\partial x} - \rho I_z \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \right] dx \\ &= \rho A dx \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

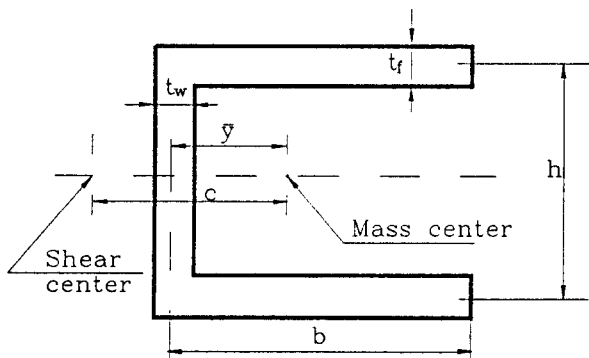


Fig. 3 Cross section of channel beam

기본적인 모멘트-곡률 관계식에서

$$M_z = EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (9)$$

식 (8)을 (9)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) &= -\rho A \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho I_z \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

이 식이 비대칭 단면을 갖는 보의 일반적인 진동방정식이다. 보의 단면적 A 와 휨강성 EI_z 가 x 의 함수가 아니면, 식 (10)은 다음과 같다.

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} + \rho I_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (11)$$

분포하중 $p(x)$ 가 중심축 $C-C'$ 에 작용한다면, 그 하중 자체뿐만 아니라 회전력 $T_x(x) = cp(x)$ 도 고려하여야 한다. 회전력 $T_x(x)$ 와 비틀림각 ϕ 의 관계는 다음 식으로부터 얻는다⁽⁷⁾.

$$T_x(x) = R \frac{\partial \phi}{\partial x} - R_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \quad (12)$$

여기서 R 은 비틀림 강성이고 R_1 은 워핑 강성이다. 비틀림각의 방향은 Fig. 5에서와 같은 방향이다.

비틀림 진동에서 회전관성력은 다음과 같다.

$$-\rho J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{혹은} \quad -m \frac{J}{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (13)$$

여기서 J 는 극관성모멘트이고 m 은 단위 길이당 질량이다. 식 (12)와 (13)을 이용하면 다음 미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - R_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} &= -mc \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} \\ &+ m \frac{J}{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14)$$

그러므로, 휨과 비틀림이 연계된 연립미분방정식

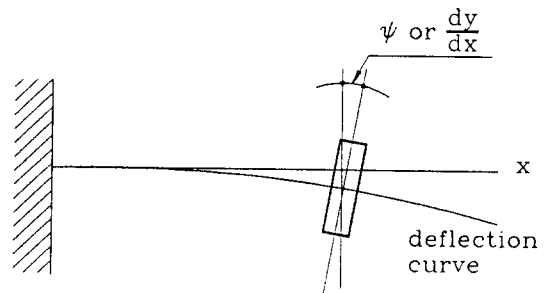


Fig. 4 Rotation of cross section due to the slope of deflection curve

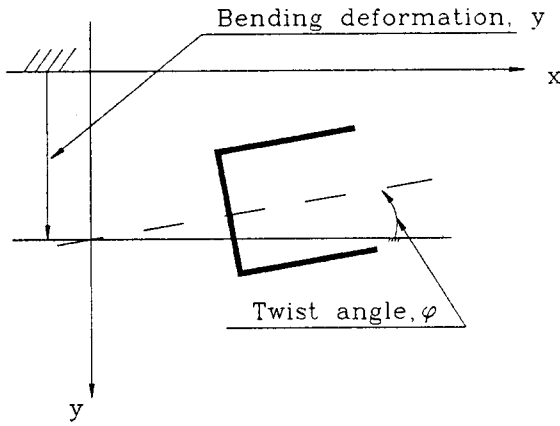


Fig. 5 Coordinate system of bending, y and twist, ϕ

은 다음과 같다.

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} + m \frac{I_z}{A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (15)$$

$$R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - R_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = -mc \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} + m \frac{J}{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (16)$$

2.2 자유진동

식 (15)와 (16)을 해석하려면 다음과 같이 변수분리법을 이용하는 것이 바람직하다.

$$y(x, t) = Y(x) \exp(i\omega t) \quad (17)$$

$$\phi(x, t) = \Phi(x) \exp(i\omega t) \quad (18)$$

여기서 ω 는 주파수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.

식 (17)과 (18)을 식 (15)와 (16)에 대입하면,

$$EI_z \frac{d^4 Y}{dx^4} = m\omega^2 (Y - c\Phi) - m\omega^2 \frac{I_z}{A} \frac{d^2 Y}{dx^2} \quad (19)$$

$$R \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - R_1 \frac{d^4 \Phi}{dx^4} = m\omega^2 c (Y - c\Phi) - m\omega^2 \frac{J}{A} \Phi \quad (20)$$

미분연산자 $D = \frac{d}{dx}$ 을 이용하면, 식 (19)와 (20)은

$$\left[EI_z D^4 + m\omega^2 \frac{I_z}{A} D^2 - m\omega^2 \right] Y + m\omega^2 c \Phi = 0 \quad (21)$$

$$m\omega^2 c Y + \left[R_1 D^4 - RD^2 - m\omega^2 \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \right] \Phi = 0 \quad (22)$$

식 (21)과 (22)는 두 미지수 Y 와 Φ 에 대한 식이어서 다음 연립방정식으로 표현할 수 있다⁽¹¹⁾.

$$L_1 Y + L_2 \Phi = 0 \quad (23)$$

$$L_3 Y + L_4 \Phi = 0 \quad (24)$$

여기서 L_i 는 x 에 대한 선형미분연산자이다. L_1, L_2 와 L_3, L_4 는 교환법칙이 성립하므로 다음 형태로 미분방정식을 표현할 수 있다.

$$\Delta Y = 0 \quad (25)$$

그리고

$$\Delta \Phi = 0 \quad (26)$$

여기서

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix} \quad (27)$$

종속변수인 Y 와 Φ 는 Cramer 법칙으로부터 얻고, 식 (21)과 (22)에서 L_i 는 다음과 같다.

$$L_1 = EI_z D^4 + m\omega^2 \frac{I_z}{A} D^2 - m\omega^2$$

$$L_2 = m\omega^2 c \quad (28)$$

$$L_3 = m\omega^2 c$$

$$L_4 = R_1 D^4 - RD^2 - m\omega^2 \left(c^2 + \frac{J}{A} \right)$$

그리고 행렬식은 식 (28)을 (25)에 대입하여 얻는다.

$$\left\{ EI_z R_1 D^8 - \left(EI_z R - m\omega^2 \frac{I_z}{A} R_1 \right) D^6 - m\omega^2 \left[\left(c^2 + \frac{J}{A} \right) EI_z + R \frac{I_z}{A} + R_1 \right] D^4 - m\omega^2 \left[m\omega^2 \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \frac{I_z}{A} - R \right] D^2 + m^2 \omega^4 \frac{J}{A} \right\} Y = 0 \quad (29)$$

식 (29)와 같은 상미분방정식의 해는 다음과 같은 해를 갖는다고 가정하여 얻는다.

$$Y(x) = C \exp(\lambda x) \quad (30)$$

여기서 C 는 임의상수이고, λ 는 특성치이다. 식 (30)을 (29)에 대입하면,

$$EI_z R_1 \lambda^8 - \left(EI_z R - m\omega^2 \frac{I_z}{A} R_1 \right) \lambda^6 - m\omega^2 \left[\left(c^2 + \frac{J}{A} \right) EI_z + R \frac{I_z}{A} + R_1 \right] \lambda^4 - m\omega^2 \left[m\omega^2 \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \frac{I_z}{A} - R \right] \lambda^2 + m^2 \omega^4 \frac{J}{A} = 0 \quad (31)$$

식 (31)은 λ^2 에 대한 4차방정식이다. 이 4차 방정식은 해석적인 방법으로 풀 수 있다고 널리 알려져 있다⁽¹²⁾.

식 (31)의 네 근, $\lambda_i^2 (i=1, 2, 3, 4)$ 가 실수이면,

두 근은 양수이고 두 근은 음수이므로

$$Y(x) = C_1 \cosh(\lambda_1 x) + C_2 \sinh(\lambda_1 x) + C_3 \cosh(\lambda_2 x) + C_4 \sinh(\lambda_2 x) + C_5 \cos(\lambda_3 x) + C_6 \sin(\lambda_3 x) + C_7 \cos(\lambda_4 x) + C_8 \sin(\lambda_4 x) \quad (32)$$

이 식을 식 (19)에 대입하면, 비틀림각에 대한 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi(x) = a_1 [C_1 \cosh(\lambda_1 x) + C_2 \sinh(\lambda_1 x)] + a_2 [C_3 \cosh(\lambda_2 x) + C_4 \sinh(\lambda_2 x)] + a_3 [C_5 \cos(\lambda_3 x) + C_6 \sin(\lambda_3 x)] + a_4 [C_7 \cos(\lambda_4 x) + C_8 \sin(\lambda_4 x)] \quad (33)$$

여기서,

$$a_1 = \frac{1}{m\omega^2 c} (EI_z \lambda_1^4 + m\omega^2 \frac{I_z}{A} \lambda_1^2 - m\omega^2)$$

$$a_2 = \frac{1}{m\omega^2 c} (EI_z \lambda_2^4 + m\omega^2 \frac{I_z}{A} \lambda_2^2 - m\omega^2)$$

$$a_3 = \frac{1}{m\omega^2 c} (EI_z \lambda_3^4 - m\omega^2 \frac{I_z}{A} \lambda_3^2 - m\omega^2)$$

$$a_4 = \frac{1}{m\omega^2 c} (EI_z \lambda_4^4 - m\omega^2 \frac{I_z}{A} \lambda_4^2 - m\omega^2)$$

식 (32)와 (33)은 보의 휨-비틀림 연계진동에 대한 일반해이다. 만약 보가 균일한 단면을 갖는다면, 식 (31)의 계수들은 상수이므로 4근은 주파수 ω 만의 함수가 된다.

2.3 경계조건

식 (32) 혹은 (33)에 있는 적분상수 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ 는 경계조건에 의하여 결정된다. 외팔보를 예제로 취하여 다음 8가지의 경계조건으로부터 주파수 방정식을 얻었다.

i) $x=0$ 에서 처짐

$$y(0, t) = 0; \quad Y(0) = 0 \quad (34)$$

ii) $x=0$ 에서 처짐곡선의 기울기

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{dY(0)}{dx} = 0 \quad (35)$$

iii) $x=l$ 에서 휨모멘트

$$EI_z \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{d^2 Y(l)}{dx^2} = 0 \quad (36)$$

iv) $x=l$ 에서 전단력

$$EI_z \frac{\partial^3 y(l, t)}{\partial x^3} - m \frac{I_z}{A} \frac{\partial^3 y(l, t)}{\partial x \partial t^2} = 0;$$

$$\frac{EI_z d^3 Y(l)}{dx^3} - m\omega^2 \frac{I_z}{A} \frac{dY(l)}{dx} = 0 \quad (37)$$

v) $x=0$ 에서 비틀림각

$$\phi(0, t) = 0; \quad \Phi(0) = 0 \quad (38)$$

vi) $x=0$ 에서 비틀림각 곡선의 기울기

$$\frac{\partial \phi(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{d\Phi(0, t)}{dx} = 0 \quad (39)$$

vii) $x=l$ 에서 회전력

$$R \frac{\partial \phi(l, t)}{\partial x} - R_1 \frac{\partial^3 \phi(l, t)}{\partial x^3} = 0;$$

$$R \frac{d\Phi(l)}{dx} - R_1 \frac{d^3 \Phi(l)}{dx^3} = 0 \quad (40)$$

viii) $x=l$ 에서 워핑 구속력

$$R_1 \frac{\partial^2 \phi(l, t)}{\partial x^2} = 0; \quad R_1 \frac{d^2 \Phi(l)}{dx^2} = 0 \quad (41)$$

경계조건을 식 (32)와 (33)에 대입하면 다음 연립방정식을 얻는다.

$$C_1 + C_3 + C_5 + C_7 = 0 \quad (42)$$

$$\lambda_1 C_2 + \lambda_2 C_4 + \lambda_3 C_6 + \lambda_4 C_8 = 0 \quad (43)$$

$$\lambda_1^2 C_1 \cosh(\lambda_1 l) + \lambda_1^2 C_2 \sinh(\lambda_1 l) + \lambda_2^2 C_3 \cosh(\lambda_2 l) + \lambda_2^2 C_4 \sinh(\lambda_2 l) + \lambda_3^2 C_5 \cos(\lambda_3 l) + \lambda_3^2 C_6 \sin(\lambda_3 l) + \lambda_4^2 C_7 \cos(\lambda_4 l) + \lambda_4^2 C_8 \sin(\lambda_4 l) = 0 \quad (44)$$

$$\left(EI_z \lambda_1^3 + m\omega^2 \lambda_1 \frac{I_z}{A} \right) [C_1 \sinh(\lambda_1 l) + C_2 \cosh(\lambda_1 l)] + \left(EI_z \lambda_2^3 + m\omega^2 \lambda_2 \frac{I_z}{A} \right) [C_3 \sinh(\lambda_2 l) + C_4 \cosh(\lambda_2 l)] + \left(EI_z \lambda_3^3 - m\omega^2 \lambda_3 \frac{I_z}{A} \right) [C_5 \sin(\lambda_3 l) - C_6 \cos(\lambda_3 l)] + \left(EI_z \lambda_4^3 - m\omega^2 \lambda_4 \frac{I_z}{A} \right) [C_7 \sin(\lambda_4 l) + C_8 \cos(\lambda_4 l)] = 0 \quad (45)$$

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 = 0 \quad (46)$$

$$\lambda_1 a_1 C_2 + \lambda_2 a_2 C_4 + \lambda_3 a_3 C_6 + \lambda_4 a_4 C_8 = 0 \quad (47)$$

$$a_1 (R\lambda_1 - R_1 \lambda_1^3) [C_1 \sinh(\lambda_1 l) + C_2 \cosh(\lambda_1 l)] + a_2 (R\lambda_2 - R_1 \lambda_2^3) [C_3 \sinh(\lambda_2 l) + C_4 \cosh(\lambda_2 l)] - a_3 (R\lambda_3 - R_1 \lambda_3^3) [C_5 \sin(\lambda_3 l) - C_6 \cos(\lambda_3 l)] - a_4 (R\lambda_4 - R_1 \lambda_4^3) [C_7 \sin(\lambda_4 l) - C_8 \cos(\lambda_4 l)] = 0 \quad (48)$$

$$\lambda_1^2 a_1 [C_1 \cosh(\lambda_1 l) + C_2 \sinh(\lambda_1 l)] + \lambda_2^2 a_2 [C_3 \cosh(\lambda_2 l) + C_4 \sinh(\lambda_2 l)] - \lambda_3^2 a_3 [C_5 \cos(\lambda_3 l) + C_6 \sin(\lambda_3 l)] - \lambda_4^2 a_4 [C_7 \cos(\lambda_4 l) + C_8 \sin(\lambda_4 l)] = 0 \quad (49)$$

적분상수 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ 에 대한 연립방정식으로부터 부정해가 산출되므로 이 상수들에 대한 행렬식이 0이어야 한다. 즉,

$$\det[A] = 0 \quad (50)$$

여기서 $[A]$ 는 적분상수의 계수들로 구성된 행렬이다.

식 (50)에서 계산된 고유치 $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}, \lambda_{4i}$ 들로

각 모드에 대한 식은 다음과 같다.

$$Y_i(x) = C_{8i}[\beta_{1i}\cosh(\lambda_{1i}x) + \beta_{2i}\sinh(\lambda_{1i}x) + \beta_{3i}\cosh(\lambda_{2i}x) + \beta_{4i}\sinh(\lambda_{2i}x) + \beta_{5i}\cos(\lambda_{3i}x) + \beta_{6i}\sin(\lambda_{3i}x) + \beta_{7i}\cos(\lambda_{4i}x) + \beta_{8i}\sin(\lambda_{4i}x)] \quad (51)$$

$$\Phi_i(x) = C_{8i}[\beta_{1i}\alpha_{1i}\cosh(\lambda_{1i}x) + \beta_{2i}\alpha_{1i}\sinh(\lambda_{1i}x) + \beta_{3i}\alpha_{2i}\cosh(\lambda_{2i}x) + \beta_{4i}\alpha_{2i}\sinh(\lambda_{2i}x) + \beta_{5i}\alpha_{3i}\cos(\lambda_{3i}x) + \beta_{6i}\alpha_{3i}\sin(\lambda_{3i}x) + \beta_{7i}\alpha_{4i}\cos(\lambda_{4i}x) + \beta_{8i}\alpha_{4i}\sin(\lambda_{4i}x)] \quad (52)$$

여기서,

$$\beta_{ki} = \frac{C_{ki}}{C_{8i}}, \quad (k=1, \dots, 7) \quad (53)$$

그러므로, 보의 횡진동과 비틀림진동은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \exp(i\omega_i t) \quad (54)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \exp(i\omega_i t) \quad (55)$$

2.4 직교 조건

보가 자유진동할 때에 횡운동을 지배하는 방정식은 다음과 같다.

$$\text{전단력; } V = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \rho I_z \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \quad (56)$$

$$\text{모멘트; } M_x = EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (57)$$

$$\text{회전력; } T_x = R \frac{\partial \phi}{\partial x} - R_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \quad (58)$$

i -번째 모드에 대한 진동을 가정하면,

$$y_i(x, t) = Y_i(x) \exp(i\omega_i t) \quad (59)$$

$$\phi_i(x, t) = \Phi_i(x) \exp(i\omega_i t) \quad (60)$$

식 (59)와 (60)을 (15), (16), (56)과 (57)에 대입하면,

$$EI_z Y_i^{iv} = m\omega_i^2(Y_i - c\Phi_i) - m\omega_i^2 \frac{I_z}{A} Y_i'' \quad (61)$$

$$R\Phi_i'' - R_1\Phi_i^{iv} = m\omega_i^2 c(Y_i - c\Phi_i) - m\omega_i^2 \frac{J}{A} \Phi_i \quad (62)$$

$$V_i = EI_z Y_i''' + m\omega_i^2 \frac{I_z}{A} Y_i' \quad (63)$$

$$M_i = EI_z Y_i'' \quad (64)$$

j -번째 모드 $Y_j(x)$ 를 식 (61)에 곱한 후 x 에 대하여 적분하고, 외팔보의 경계조건을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^l EI_z Y_i'' Y_j'' dx - m\omega_i^2 \frac{I_z}{A} \int_0^l Y_i' Y_j' dx = m\omega_i^2 \int_0^l Y_i Y_j dx - m\omega_i^2 c \int_0^l \Phi_i Y_j dx \quad (65)$$

이 결과는 첨자 i 와 j 를 서로 바꾸더라도 성립하므로

$$\int_0^l EI_z Y_i'' Y_j'' dx - m\omega_i^2 \frac{I_z}{A} \int_0^l Y_i' Y_j' dx = m\omega_j^2 \int_0^l Y_i Y_j dx - m\omega_j^2 c \int_0^l \Phi_i Y_j dx \quad (66)$$

식 (65)에서 (66)을 빼면, 다음 결과를 얻는다.

$$-(\omega_i^2 - \omega_j^2) m \frac{I_z}{A} \int_0^l Y_i' Y_j' dx = (\omega_i^2 - \omega_j^2) m \int_0^l Y_i Y_j dx - m\omega_i^2 c \int_0^l \Phi_i Y_j dx + m\omega_j^2 c \int_0^l \Phi_j Y_i dx \quad (67)$$

마찬가지로 식 (62)에 Φ_i 를 곱한 후에 x 에 대하여 적분하고 경계조건을 대입하면,

$$m\omega_i^2 c \int_0^l Y_i \Phi_j dx - m\omega_j^2 c \int_0^l Y_j \Phi_i dx - (\omega_i^2 - \omega_j^2) m \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \int_0^l \Phi_i \Phi_j dx = 0 \quad (68)$$

식 (68)를 (67)에 대입하면,

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \left[\frac{J}{A} m \int_0^l Y_i' Y_j' dx - m \int_0^l Y_i Y_j dx - mc \int_0^l \Phi_i Y_j dx - mc \int_0^l \Phi_j Y_i dx + m \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \int_0^l \Phi_i \Phi_j dx \right] = 0 \quad (69)$$

그러므로, 다음과 같은 직교조건을 얻는다.

$$\int_0^l m \left[\frac{I_z}{A} Y_i' Y_j' + Y_i Y_j - c(\Phi_i Y_j + \Phi_j Y_i) + \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \Phi_i \Phi_j \right] dx = a_{ij} \delta_{ij} \quad (70)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta 함수이다.

동일한 방법으로 얻은 두 번째 직교조건은

$$\int_0^l EI_z Y_i'' Y_j'' dx + \int_0^l T_i \Phi_j dx = m\omega_i^2 \int \left[\frac{I_z}{A} Y_i' Y_j' + Y_i Y_j - c(\Phi_i Y_j + \Phi_j Y_i) + \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) \Phi_i \Phi_j \right] dx = k_{ij} \delta_{ij} \quad (71)$$

그러므로, 각 모드에 따른 모드 질량과 강성은 직교방정식에서 $i=j$ 로 놓으면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$a_{ij} = \int_0^l m \left[\frac{I_z}{A} (Y_i')^2 + (Y_i)^2 - 2cY_i\Phi_i + \left(c^2 + \frac{J}{A} \right) (\Phi_i^2) \right] dx \quad (72)$$

그리고,

$$k_{ii} = \int_0^l [EI_z(Y_i'')^2 + T_i\Phi_i'] dx \quad (73)$$

2.5 강제 진동

하중 $F(x, t)$ 가 중심축에 작용할 때에 식 (15)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} - m \frac{I_z}{A} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} = F(x, t) \quad (74)$$

그리고

$$R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - R_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + mc \frac{\partial^2 (y - c\phi)}{\partial t^2} - m \frac{J}{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = cF(x, t) \quad (75)$$

보의 비대칭 변형은 각 모드중첩법으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) Y_i(x) \quad (76)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) \Phi_i(x) \quad (77)$$

여기서 $P_i(t)$ 는 i -번째 모드좌표이다.

식 (76)과 (77)를 (74)와 (75)에 대입하면,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i EI_z Y_i^{iv} + \sum_{i=1}^{\infty} m \dot{P}_i (Y_i - c\Phi_i) - \sum_{i=1}^{\infty} m \frac{I_z}{A} \dot{P}_i Y_i'' = F(x, t) \quad (78)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (RP_i \Phi_i'' - R_1 P_i \Phi_i^{iv}) = -mc \sum_{i=1}^{\infty} \dot{P}_i (Y_i - c\Phi_i) + \sum_{i=1}^{\infty} m \frac{J}{A} \dot{P}_i \Phi_i + cF(x, t) \quad (79)$$

식 (78)에 Y_j 를 곱한 식 및 식 (79)에 Φ_j 곱한 식을 적분한 후에 직교조건을 적용하고 정리하면, 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$\ddot{P}_i + \omega_i^2 P_i = \frac{1}{a_{ii}} \int_0^l F(x, t) (Y_i - c\Phi_i) dx \quad (80)$$

변수분리를 이용하여 미분방정식의 해를 구했으므로 하중도 다음과 같이 변수분리 형식으로 분리하는 것이 바람직하다.

$$F(x, t) = F_0 f(x) g(t)$$

이 때 식 (80)은 다음과 같다.

$$\ddot{P}_i + \omega_i^2 P_i = F_0 \frac{\Gamma_i}{a_{ii}} g(t) \quad (81)$$

여기서 Γ_i 는 모드 i 가 전체의 운동에 기여하는 참여도로 다음과 같이 표현된다.

$$\Gamma_i = \int_0^l f(x) Y_i(x) dx - \int_0^l c f(x) \Phi_i(x) dx \quad (82)$$

그러므로 모드 i 에 대한 해는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$P_i(t) = P_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \dot{P}_i(0) \sin(\omega_i t) + F_0 \frac{\Gamma_i}{k_{ii}} \omega_i \int_0^t g(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \quad (83)$$

여기서 $P_i(0)$ 와 $\dot{P}_i(0)$ 는 각 모드의 초기조건이다.

식 (83)를 식 (76)과 (77)에 대입하여 얻은 정상상태에 대한 해는 다음과 같다.

$$y(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i F_0 \frac{\Gamma_i}{k_{ii}} \omega_i \int_0^t g(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (84)$$

그리고

$$\phi(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i F_0 \frac{\Gamma_i}{k_{ii}} \omega_i \int_0^t g(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (85)$$

3. 예제 및 해석

식 (31)과 (50)으로부터 고유진동수와 고유모드를 구하려면 수식의 복잡성 때문에 컴퓨터로 계산하는 것이 바람직하여 다음과 같은 계산절차를 이용하였다.

- (1) 주파수 0에서부터 주파수증분을 Δf 라 놓는다.
- (2) 식 (30)에서 근 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 을 구한다.
- (3) $F_1(f_1)$ 을 계산한다.
- (4) $f_2 = f_1 + \Delta f$
- (5) (2)에서와 같이 식 (30)에서 f_2 에 대한 근 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 를 구한다.
- (6) $F_2(f_2)$ 를 계산한다.
- (7) 만약 $F_1 \cdot F_2 > 0$, $f_1 \leftarrow f_2$, $F_1 \leftarrow F_2$ 로 하고 (4)로 돌아간다.
- (8) 만약 $F_1 \cdot F_2 < 0$ 이면, f_1 과 f_2 사이에 있는 고유진동수를 Bi-sectional method로 구한다.
- (9) 고유치로 고유모드를 계산하기 위하여 적분상수 $C_i (i=1, \dots, 8)$ 를 구한다.
- (10) 다음 고유치를 구하려면, $f_1 \leftarrow f_2$, $F_1 \leftarrow F_2$ 라 놓고 (4)로 돌아간다.

채널 단면을 갖는 외팔보를 예제로 취하여 고유진동수와 고유모드를 앞에서 제시한 계산절차에 따라 구할 때에 사용한 외팔보의 제원은 다음과 같다.

- 재 질 Aluminum
- 탄성계수 $E=10. \times 10^6 \text{ psi}$
- 전단탄성계수 $G=3.8 \times 10^6 \text{ psi}$
- 질량밀도 $\rho=.234 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{sec}^2/\text{in}^3$
- 길이 $l=40 \text{ in}$
- 플랜지 폭 $b=1.0 \text{ in}$
- 플랜지 두께 $t_f=.025 \text{ in}$
- 웹 높이 $h=0.5 \text{ in}$
- 웹 두께 $t_w=0.025 \text{ in}$
- 단면적 $A=0.0625 \text{ in}^2$
- 단면이차모멘트 $I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{b h^2 t_f}{2}$
- 극관성모멘트 $J = h t_w^3 + 2 \frac{b t_f^3}{3}$
- 위핑 강성 $R_1 = \frac{t_f h^2 b^3 (2 h t_w + 3 b t_f)}{12 (h t_w + 6 b t_f)} E$
- 비틀림 강성 $R = GJ$

해석적인 방법으로 구한 4개 고유진동수를 Table 1에 나타내었다. 휨-비틀림이 연계된 본 연구의 결과와 두 진동이 연계되지 않은 경우에 대한 고유진동수를 Table 1에 나타내었다. 연계되지 않은 경우에, 휨진동의 고유진동수는 휨강성 EI_z 와 보길이 l 을 이용하고, 비틀림진동의 고유진동수는 비틀림강

Table 1 Natural frequencies(Hz)

Mode	Coupled	Uncoupled	
		Bending	Twisting
1	9.61	16.51	15.48
2	143.94	103.48	54.78
3	462.28	289.77	117.79
4	964.32	507.85	210.18

성인 GJ 와 보길이 l 을 가지고 구한 고유진동수이다. 연계된 경우에 일차고유진동수는 연계되지 않은 경우의 휨 및 비틀림 고유진동수보다 작아서 이들의 1/2정도인 반면에, 이차이상의 고유진동수는 연계되지 않은 경우의 고유진동수보다 매우 작은 값이 계산되었다. 따라서 채널보와 같이 휨축과 중심축이 일치하지 않는 구조물의 진동해석은 휨-비틀림 연계진동을 고려하여야함을 알 수 있다.

Fig. 6에 모드 1, 2, 3 그리고 4를 나타내었다. 첫 번째 모드에서 비틀림과 휨이 동일한 양상을 가지나 위상이 반대임을 알 수 있다. 그리고 두 번째 모드에서 보면, 비틀림은 2차 모드의 형상이나 휨진동은 아직도 일차 모드와 비슷한 양상을 보인다. 또한 3차와 4차에서도 비틀림은 차수에 상응하는 형상을 가지나, 휨은 차수보다 작은 모드 형태를 보여준다.

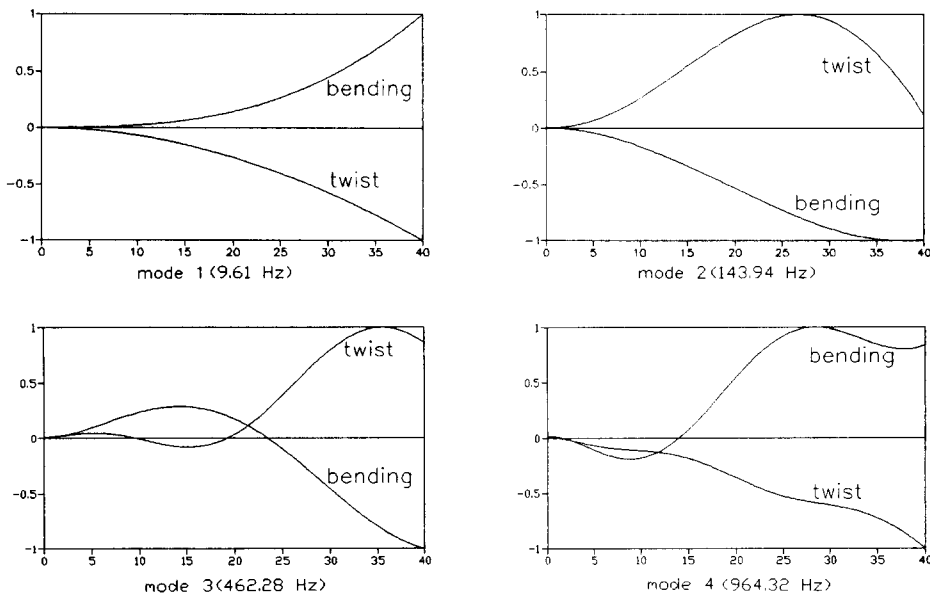


Fig. 6 Natural mode shapes

4. 결 론

단순한 Bernoulli-Euler 보이론을 적용하여 휨-비틀림 연계진동에 대한 수식해를 유도하였고, 중심축과 휨축이 일치하지 않는 보의 고유진동수와 고유모드를 얻을 수 있도록 하였다. 그리고 일반적인 보이론과 동일한 방법으로 외팔보의 직교성 및 강제진동에 대한 해를 전개하였으므로 휨-비틀림 진동이 일어날 수 있는 구조요소의 진동을 용이하게 해석할 수 있다고 사료된다. 또한 휨과 비틀림이 연계된 경우의 고유진동수와 연계되지 않은 경우의 고유진동수의 차가 크므로 구조물의 진동을 해석할 때 주의할 기울이는 것이 바람직하다.

참 고 문 헌

- (1) W.C. Herty and M.F. Rubinstein, 1964, Dynamics of Structure, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, pp. 161~166.
- (2) R.L. Sishplinghoff, H. Ashley and R.L. Halfman, 1955, Aeroelasticity, Massachusetts, Addison-Wesley, pp. 105~106 and 555~563.
- (3) C.F. Garland, 1940, "The Normal Modes of Vibrations of Beams having Noncollinear Elastic and Mass Axes", Journal of Applied Mechanics, vol. 7.
- (4) J.S. Rao and W. Caregie, 1970, "Solution of the Equations of Motion of Coupled Bending and Torsion Vibrations of Turbine Blades by the Method of Ritz-Galerkin", International Journal of Mechanical Science, vol. 12, pp. 875~882.
- (5) K. Federhofer, 1947, "Eigenschwingungen von geraden Staben mit dunwandigen und offenen Querschnitten", Sitzber. Akad. Wiss. wien, Abt. IIA, vol. 156, pp. 393~416.
- (6) R.E.D. Bishop and W.G. Price, 1977, "Coupled Bending and Twisting of a Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, 50(4), pp. 469~477.
- (7) S. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver, 1974, Vibration Problems in Engineering, New York, John-Wiley and Son, Fourth Editions, pp. 471~475.
- (8) S. Timoshenko, 1956, Strength of Material, Vol. II, New York : Van Nostrand, Third Edition, pp. 255~265.
- (9) H. Wagner and W. Preschner, 1936, NACA T.M. No. 784.
- (10) C. Mei, 1970, "Coupled Vibrations of Thin Walled Beams of Open Section using the Finite Element Method", International Journal of Mechanical Science, 12, pp. 883~891.
- (11) F.B. Hilderbrand, 1958, Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- (12) H.R. Spiegel, 1968, Mathematical Handbook of Formulas and Tables, New York, McGraw-Hill, pp. 33.