

항공기 재료 성형시의 손상진전에 관한 연구

김위대* · 김진희** · 김승조**

A Study on the Damage Propagation of an Aircraft Material During Forming

Wie-Dae Kim, Jin-Hee Kim and Seung-Jo Kim

Abstract

In this paper damage propagation of a material during forming is investigated with the concept of continuum damage mechanics. An isotropic damage model based on the theory of materials of type N is adopted to describe the damage process of a ductile material with large elasto-viscoplastic deformation. The stiffness degradation of the loaded material is chosen as a damage measure. The highly nonlinear equilibrium equations are reduced to the incremental weak form and approximated by the total Lagrangian finite element method. To simulate contact condition, extended interior penalty method with modified coulomb friction law is adopted. The displacement control method along with the modified Riks' continuation technique is used to solve the incremental iterative equations. As numerical examples, upsetting problem and backward extrusion problem are simulated and the results of damage propagation and J_2 stress contours with and without friction are presented.

Key Words : Continuum Damage Mechanics, Total Lagrangian Finite Element, Stiffness Degradation, Upsetting, Backward Extrusion

1. 서 론

최근 20년 동안, 유한요소법은 소성가공 해석의 강력한 도구로서 각광을 받아왔다. 소성가공은 본질적으로 매우 복잡한 현상이며 이를 해석하기 위해서는 여러 가지 인자를 고려해야 한다. 또한 대변형을 해석하

기 위한 적절한 기하학도 요구된다.

소성가공은 일반적으로 소성을 수반하는 대변형 상태에서 수행되고, 이러한 소성 변형은 물질의 손상을 가져오게 된다. 즉, 소성 변형동안 미소 균열이나 결함들이 발생하고 변형이 커짐에 따라 증가하게 된다. 이런 미소균열들은 재료의 파괴를 가져오는 주균열로 발전할 수 있으므로, 가공 중에 재료의 파괴 시작에 대한 조건을 알아내는 것은 매우 중요하게 된다. 이런 관점에서,

*부산대학교 항공우주공학과, 기계기술연구소

**서울대학교 항공우주공학과

지금까지 여러 연구가들이 파괴의 시작에 대한 연구를 수행하였다.^(1~6)

이런 파괴 개시에 대한 연구와 더불어, 재료가 입체 되는 손상의 정도를 파악하는 일 또한 매우 중요하다. 이런 재료의 손상은 재료의 기계적 성질을 저하시켜, 비록 소성가공 중에는 파괴가 발생하지 않았지만 실제 운용시에 예기치 않은 재료의 파괴가 일어날 수도 있기 때문이다. 따라서 파괴 개시점과 내부손상에 관한 연구는 성형성 문제 뿐만 아니라 실제 운용상의 안전을 위해 모두 필요하다고 할 수 있다. 또한 최근의 연구 결과에 의하면 재료의 기계적 성질의 저하와 파괴 개시는 서로 밀접한 관계가 있음이 알려졌다.⁽⁷⁾ 이런 관점에서 연속체 손상역학(continuum damage mechanics)은 효율적인 방법중의 하나라 할 수 있으며, 근래에 연속체 손상역학에 대한 많은 연구^(8~11)가 진행되었다. 그러나 소성가공 중에 발생하는 손상에 대한 연구는 그리 많이 수행되지는 않았다.^(12~14)

본 연구에서는 연속체 손상역학의 관점에서 소성가공시 구조재료가 입체 되는 손상의 효과에 대해 기존의 연구⁽¹⁴⁾를 확장하여 실제 접촉면에서 나타나는 마찰의 효과를 고려하여 해석하였다. 손상모델로는 N 형 재료이론^(15~17)에 근간을 둔 탄성소성 손상이론⁽¹⁸⁾이 사용되었다. 소성가공시 사용된 접촉조건의 처리를 위해 확장된 내부 별칙 함수법⁽¹⁹⁾과 수정된 쿠롱의 마찰법칙⁽²⁰⁾이 사용되었다. 구성된 비선형 평형방정식은 충분형 total Lagrangian법으로 근사되었으며 해법으로는 수정된 Riks의 호장충분법⁽²¹⁾과 연계된 변위제어가 사용되었다. 수치 예제로 업세팅(upsetting) 문제와 후방압출(backward extrusion) 문제가 해석되었다. 각 예제에 대해 J_2 응력이 손상이 있는 경우와 없는 경우에 대해 비교되었으며 마찰의 유무에 따른 손상진전의 정도의 차이도 비교되었다.

2. 이론

2.1 변형 기하학

소성가공은 대변형을 수반하므로, 이를 적절히 모사할 수 있는 변형률의 정의가 필요하다. 변형전 위치 \mathbf{X} 와 변형후 위치 \mathbf{x} 에 대한 변형구배텐서 \mathbf{F} 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.⁽²²⁾

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (1)$$

Fig. 1과 같은 기준형상의 설정 위에 극분해 정리를 적용하면 우신장텐서 \mathbf{U} 는 다음과 같이 탄성, 소성 신장텐서로 분해된다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^e + \mathbf{U}^p - \mathbf{I} \quad (2)$$

여기서 C_t 는 현재 형상, C_{t-} 는 현재의 회전자유 형상 그리고 C_{p-} 는 적절한 중간형상을 나타낸다. 속도구배 텐서와 그 대칭부(deformation rate tensor)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^t + \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^{-1} + \dot{\mathbf{U}}^p \mathbf{U}^{-1}) \mathbf{R}^t \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{L} |_{sym} \\ &= \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^{-1} |_{sym} + \dot{\mathbf{U}}^p \mathbf{U}^{-1} |_{sym}) \mathbf{R}^t \end{aligned} \quad (4)$$

이상의 결과를 이용하면 다음과 같은 탄성,

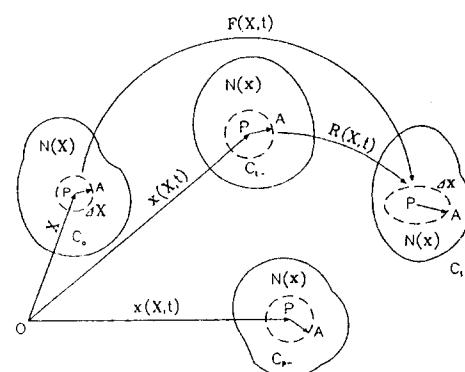


Fig. 1 Configuration by the right polar decomposition

소성 변형률을 정의할 수 있다.^(14,17,18)

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^{-1} |_{sym} \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{U}}^p \mathbf{U}^{-1} |_{sym} \quad (6)$$

그리고

$$\mathbf{R}^t \mathbf{D} \mathbf{R} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} \quad (7)$$

이로부터 탄성, 소성 변형도 텐서는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\mathbf{E} = \int_0^t \dot{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^{-1} |_{sym} dt \quad (8)$$

$$\mathbf{P} = \int_0^t \dot{\mathbf{U}}^p \mathbf{U}^{-1} |_{sym} dt \quad (9)$$

2.2 구성 방정식의 유도

탄점소성을 기술하는 구성방정식을 얻기 위해 N 형 재료이론^(15~17)을 도입한다. N 형 재료이론은 역학의 5개의 기본방정식(질량 보존, 선 및 각 운동량 보존, 에너지 보존, 엔트로피 생성법칙)과 두개의 장포텐셜로 이루어져 있다.

N 형 재료이론의 기본적인 공리는 다음과 같이 기술될 수 있다.

(1) 등출현성의 원칙⁽²³⁾을 만족하는 자유 에너지(ϕ), 응력, 엔트로피 그리고 열류량이 물체의 각각의 질점과 각각의 시간에 대해 (\mathbf{E} , θ , \mathbf{g} , α , \mathbf{d})의 함수로 존재한다. 여기서 θ 는 절대온도, \mathbf{g} 는 온도구배, α , \mathbf{d} 는 각각 소성경화와 손상을 나타내는 내부상태 변수이다.

(2) 내부상태변수들의 발전식이 미분으로 정의되는 소산포텐셜(ϕ)이 존재한다. 각각의 내부상태변수들의 대한 발전식은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}}, \\ \dot{\mathbf{d}} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{B}}, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, \mathbf{A} , \mathbf{B} 는 내부상태변수 α , \mathbf{d} 에 대한

각각의 열역학적 공액력들이다.

\mathbf{S} 는 위의 절에서 정의된 변형도와 적합한 회전 자유응력(Dienes 응력)으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}' \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} \quad (11)$$

다음으로, 에너지 보존법칙과 엔트로피 생성법칙에 열역학적 제한조건⁽²⁴⁾을 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}}, \quad \eta = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{B} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{d}} \quad (13)$$

두개의 장포텐셜로는 Kim 등⁽¹⁷⁾이 제안한 수정된 Bodner와 Partom⁽²⁵⁾ 포텐셜을 손상효과를 포함하도록 수정하여 구성하였다.

자유에너지 복함수(free energy functional):

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(1-d)}{\rho_0} \left\{ \frac{1}{2} [\lambda (tr \mathbf{E})^2 + 2\mu tr \mathbf{E}^2] \right. \\ &\quad \left. + h_1 z + \frac{1}{m} (h_1 - h_0) \exp(-mz) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

유동포텐셜 복함수(flow potential functional):

$$\begin{aligned} \phi &= D_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(\beta^i h^{2i-1})}{i! (2i-1) J_2^{i-1/2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} C_1 B^2 \exp\left(\frac{1}{1-d}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

J_2 는 편차응력 S' 의 2차 불변량, $\beta = \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)$ 그리고 n 은 경화의 정도를 나타내며, 보통 1을 취한다. h 는 경화변수로 z 의 공액력에 해당한다. λ 와 μ 는 각각 Lame의 상수이다.

여기서, 내부상태변수 α , \mathbf{d} 와 열역학적 공액력 \mathbf{A} , \mathbf{B} 는 다음과 같이 스칼라 텐서로 고려되었다.

$$\alpha = zI, \quad d = dI \quad (16)$$

$$A = hI, \quad B = BI \quad (17)$$

식 (16), (17)은 본 연구의 구성방정식이 등방성 경화와 등방성 손상을 나타냄을 의미한다. 이상의 결과를 종합하면 다음의 구성방정식이 얻어진다.

$$S = \frac{\rho}{\rho_0} (1-d) [\lambda(\text{tr}E) I + 2\mu E] \quad (18)$$

$$B = -\frac{\rho}{\rho_0} \left\{ \frac{1}{2} [\lambda(\text{tr}E)^2 + 2\mu(\text{tr}E^2)] + h_1 z + \frac{1}{m} (h_1 - h_0) \exp(-mz) \right\} \quad (19)$$

$$h = \frac{\rho}{\rho_0} (1-d) [h_1 + (h_0 - h_1) \exp(-mz)] \quad (20)$$

$$\dot{P} = D_0 \frac{1}{2h\sqrt{J_2}} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{J_2}\right) S' \quad (21)$$

$$\dot{d} = -C_1 B \exp\left(\frac{1}{1-d}\right) \quad (22)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{h} S' : \dot{P} \quad (23)$$

식 (22)가 손상진전을 나타내는 식이다. 본 연구에서의 구성방정식은 식 (21), (22)에서 알 수 있듯이 소성 변형도의 점성효과뿐 아니라 손상변수도 마찬가지로 점성효과를 기술할 수 있다. 여기서, D_0 , h_0 , h_1 , m , C_1 은 실험으로 결정되는 재료 상수이며

Table 1에 나타나 있다. 실험방법에 대한 자세한 설명은 참고문헌[17, 18]에 나타나 있다.

3. 유한 요소 정식화

이상에서 유도된 비선형방정식을 풀기 위해 채적력과 온도효과를 무시하고 total Lagrangian의 개념하에서 증분이론을 도입하여 1차 Piola-Kirchhoff 응력을 이용하여 평형방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\nabla_x \cdot T = 0 \quad \text{in } C_0 \quad (24)$$

윗식의 약형은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} T : \nabla q dx &= \int_{\partial\Omega} TN \cdot q ds \\ &+ \int_r c_N \cdot q ds + \int_r c_F \cdot q ds \\ \forall q \in V \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, $\Omega_0 \equiv \mathbf{k}_0(B)$, $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_U + \partial\Omega_F + \Gamma$ 로 각각 변위기술 경계, 하중 경계, 접촉후보 경계를 나타낸다.

다음으로, ($n-1$) 번째 단계에서 평형이 이루어졌다고 보자. 그때 (n) 단계에서는

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta T_i = T_{n-1} + \Delta T_n \quad (26)$$

$$t_n = T_n N = t_{n-1} + \Delta t_n \quad \text{on } \partial\Omega_F \quad (27)$$

$$c_{Nn} = T_n N = c_{N(n-1)} + \Delta c_{Nn} \quad \text{on } \Gamma \quad (28)$$

$$c_{Fn} = T_n N = c_{F(n-1)} + \Delta c_{Fn} \quad \text{on } \Gamma \quad (29)$$

여기서, t 는 트랙션 벡터, c_N , c_F 는 각각 수직, 마찰 접촉응력을 나타낸다. 그리고

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \Delta T_n : \nabla q dx &= \int_{\partial\Omega} \Delta T_n N \cdot q ds \\ &+ \int_T \Delta c_{Nn} \cdot q ds + \int_r \Delta c_{Fn} \cdot q ds \\ \forall q \in V \end{aligned} \quad (30)$$

1차 Piola-Kirchhoff 응력의 정의를 이용하고, 증분단계내에서 접선강성의 개념을 이용하면 다음식이 얻어진다.

Table 1 The material properties of aluminum 2024

Young's modulus	E	7.24E4 N/mm ²
Poisson's ratio	ν	0.32
Shear modulus	G	2.74E4 N/mm ²
Initial damage threshold	D_0	1.35E7 N/mm ² sec ⁻¹
Hardening constant	m	25
Initial hardness constant	h_0	1150 N/mm ²
Ultimate hardness constant	h_1	1450 N/mm ²
Damage constant	C_1	0.000185 N ⁻¹ mm ² sec ⁻¹

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} (1-d) [\lambda \operatorname{tr}(\Delta t \mathbf{D}_n^i) \mathbf{I} + 2\mu \Delta t \mathbf{D}_n^i] (\mathbf{F}^{-t})_n^{i-1} : \nabla \mathbf{q} dx \\
& - \int_r \Delta \mathbf{c}_{Nn} (\Delta \mathbf{u}_n^i) \cdot \mathbf{q} ds - \int_r \Delta \mathbf{c}_{Fn} (\Delta \mathbf{u}_n^i) \cdot \mathbf{q} ds \\
& = \int_{\Omega_0} (1-d) [\lambda \operatorname{tr}(\Delta \mathbf{P}) \mathbf{F}^{-t} + 2\mu (\mathbf{R} \Delta \mathbf{P} \mathbf{U}^{-1})]_n^{i-1} : \nabla \mathbf{q} dx \\
& - \int_{\Omega_0} (1-d) [\lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \Delta \mathbf{F}^{-t} + 2\mu (\Delta \mathbf{R} \mathbf{E} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{E} \Delta \mathbf{U}^{-1})]_n^{i-1} : \nabla \mathbf{q} dx \\
& + \int_{\Omega_0} \Delta d [\lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{F}^{-t} + 2\mu \mathbf{R} \mathbf{E} \mathbf{U}^{-1}]_n^{i-1} : \nabla \mathbf{q} dx \\
& + \int_{\partial \Omega} \Delta \mathbf{t}_n^i \cdot \mathbf{q} ds - \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{T}_n^{i-1} : \nabla \mathbf{q} dx \quad \forall \mathbf{q} \in V
\end{aligned} \tag{31}$$

여기서, 접촉문제는 확장된 내부벌칙함수법⁽¹⁹⁾과 수정된 쿨롱의 마찰법칙⁽²⁰⁾을 이용하

여 해결하였으며 접촉관계항은 다음과 같은 꼴로 나타난다.

$$\begin{aligned}
\int_r \Delta \mathbf{c}_{Nn} \cdot \mathbf{q} ds &= \begin{cases} -\varepsilon \int_r \frac{\mathbf{q}^h \cdot \mathbf{N}}{(s - \Delta \mathbf{u}_\varepsilon^h \cdot \mathbf{N})} ds & \Delta \mathbf{u}_\varepsilon^h \cdot \mathbf{N} - s \leq \varepsilon' \\ \varepsilon \int_r \frac{1}{\varepsilon'} \left\{ \frac{2(\Delta \mathbf{u}_\varepsilon^h \cdot \mathbf{N} - s)}{\varepsilon'^2} - \frac{3}{\varepsilon'} \right\} (\mathbf{q}^h \cdot \mathbf{N}) ds & \Delta \mathbf{u}_\varepsilon^h \cdot \mathbf{N} - s > \varepsilon' \end{cases} \\
|\Delta \mathbf{c}_{Fn}| &= \mu |\Delta \mathbf{c}_{Nn}| \left\{ \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{|u_s|}{u_0} \right) \right\}
\end{aligned}$$

ε' 는 확장된 벌칙 변수이고, ε 는 벌칙 변수이다. 이를 식을 정리하여 (n) 단계까지 풀게 된다.

전형적인 유한요소근사화 과정에 따라 증분 변위 \mathbf{u}_n 과 시험함수 \mathbf{q} 가 2차원에서 내삽되었으며, (n) 단계의 해 \mathbf{u}_n 은 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \sum_{i=1}^M \Delta \mathbf{u}_n^i \tag{32}$$

여기서, M 은 반복회수를 나타낸다.

이상의 식들은 비선형 문제가 되므로 이를 해결하기 위해 증분-반복해법인 변위기준 변형된 Riks법을 이용한 변위제어를 사용하였다. 구성방정식의 시간적분은 Modified Euler Method를 사용하여 정확도를 높였다. 소성변형에서의 구속조건인 비압축성에 대한 유한요소의 안정성을 위해 4 CST(constant strain triangle)요소⁽²⁶⁾를 사용하였다.

4. 수치 해석 결과

평면 변형도 상태의 가공을 모사하기 위

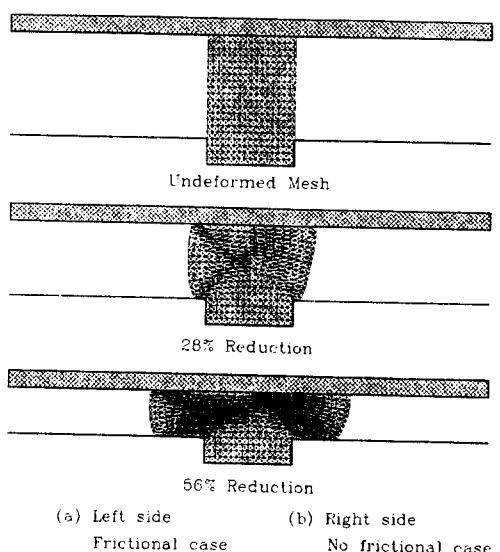


Fig. 2 Finite element model and deformed shapes of upsetting model

해, 가공재료로 알루미늄 2024⁽¹⁸⁾가 사용되었다. Fig. 2에 160개의 4CST요소와 349개의 절점을 가진 업세팅(upsetting) 문제의 유한요소모델과 변형양상이 나타나 있다.

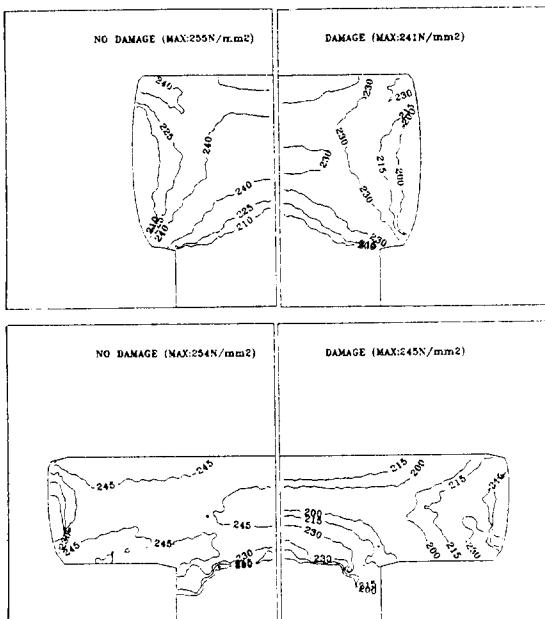
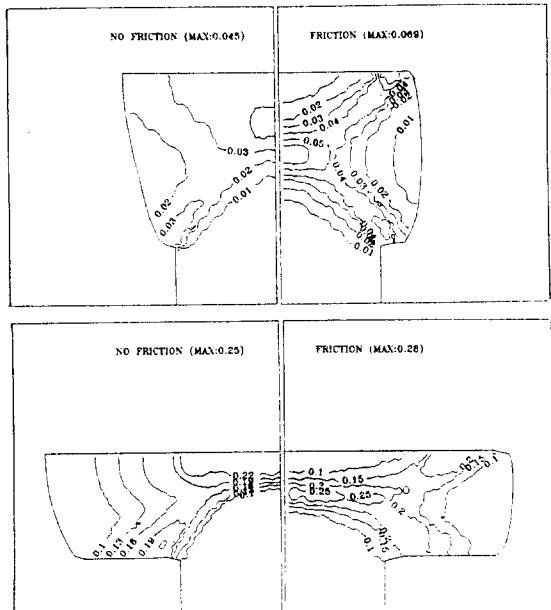


Fig. 3 Comparison of J_2 stress with and without damage



중에 입는 손상으로 인해 하중감당능력이 떨어짐을 나타낸다. Fig. 4에는 마찰의 유무에 따른 손상변수 분포의 차이를 도시하였다. 손상의 정도는 마찰이 있는 경우 소성변형이 큰 양 모서리와 가운데 부위가 큼을 알 수 있다. 이 사실은 다른 실험결과와도 잘 일치하는 양상을 보이고 있다.⁽²⁷⁾ 마

찰의 영향은 최대 손상을 입는 위치를 읊기고 또한 그 최대치도 증가시킴을 알 수 있다. 소성가공시 요구되는 작용력을 손상과 마찰의 유무에 따라 Fig. 5에 나타내었다. 재료의 하중감당능력이 떨어지므로 손상을 고려한 경우 요구되는 힘이 감소함을 알 수 있다. 마찰의 효과는 요구되는 작용력을 증

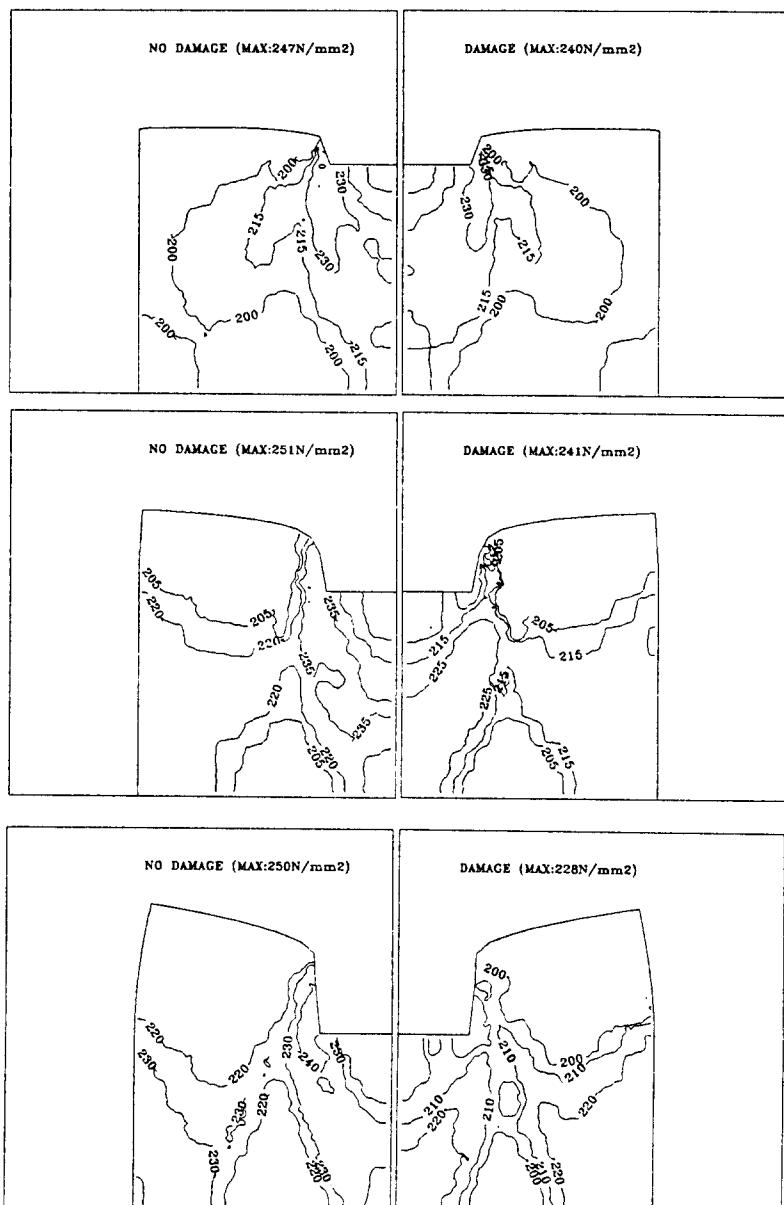


Fig. 7 Comparison of J_2 stress with and without damage

가시키는 경향을 나타낸다.

Fig. 6에 후방압출(backward extrusion) 모델의 유한요소와 변형양상이 나타나 있다. 431개의 절점을 가진 200개의 4CST 요소가 사용되었다. 그림의 좌측은 마찰을 고려한 모습($\mu=0.3$)이고, 우측은 마찰을 고려하지 않은 모습이다. 헤드의 속도는

0.125 mm/sec이고 30%의 높이 감소에 이를 때까지 해석이 수행되었다. 손상의 유무에 따른 J_2 응력의 변화가 Fig. 7에 나타나 있다. 손상을 입음에 따라 재료내의 하중 감당 능력이 떨어져서 손상을 고려하지 않은 경우보다 작은 J_2 응력 분포를 보임을 알 수 있다. Fig. 8에는 마찰의 유무에 따

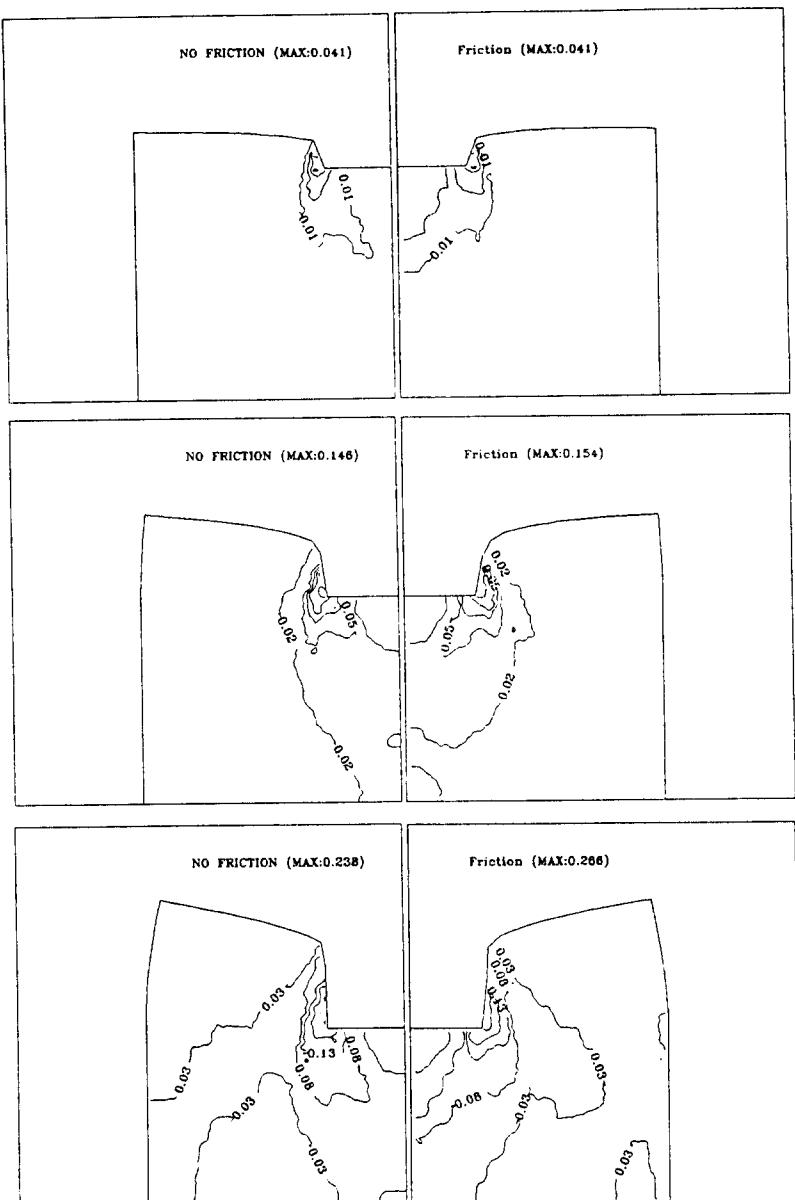


Fig. 8 Comparison of damage distribution with and without friction

른 손상변수 분포의 변화를 나타내었다. 이 경우 손상은 변형이 가장 심한 모서리 부분에서 시작되어 점차 안쪽으로 전파되어 나가는 양상을 보이고 있음을 알 수 있다. 또한 그림에서 알 수 있듯이 마찰을 고려하게 되면 손상영역이 국부화되며 더 큰 최대 손상을 나타냄을 보여준다.

5. 결 론

본 연구에서는 손상진전을 고려한 소성가공의 모사를 수행하였다. 탄점소성-동방성 손상모델로 가공재료를 모델링하여 가공시 손상 진전의 효과에 대해 마찰의 유무를 고려하여 고찰하였다. 해석예제로는 업세팅(upsetting) 과정과 후방 압출(backward extrusion) 과정이 사용되었다.

해석결과에 의하면 변형이 커짐에 따라 어느 부위가 손상을 크게 입는지를 가늠할 수 있었다. 그리고 손상이 진전됨에 따라 재료의 하중 감당능력이 떨어져서 손상이 없는 경우보다 더 작은 응력값을 나타냄을 알 수 있었다. 또한 마찰의 효과는 마찰이 없는 경우에 비해 다른 양상으로 손상이 전파되어 더 큰 손상을 재료에 입힘을 알 수 있었다. 본 연구에서 제안된 소성가공시의 손상진전에 관한 연구는 항공기 구조재료 성형시에 유용히 쓰일 수 있을 것이라고 사료된다.

후 기

본 연구는 첫번째 저자가 지원받은 한국 학술진흥재단의 '93 신진연구인력 연구장려금에 의해 수행되었으며, 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

- (1) McClintock, F. A., Kaplan, S. M. and

- Berg, C. A. 1966, "Ductile Fracture by Hole Growth in Shear Band," *Int. J. Mech. Sci.*, 2, p. 614.
 (2) Oyane, M., Sato, T., Okimoto, K. and Shima, S., 1980, "Criteria for Ductile Fracture and Their Application," *J. Mech. Work. Tech.* 4, p. 65.
 (3) Cockcroft, M. G. and Latham, D. J., 1968, "Ductility and the Workability of Metals," *J. Inst. Metals*, 96, p. 33.
 (4) Oh, S. I., Chen, C. C. and Kobayashi, S., 1979, "Ductile Fracture in Axisymmetric Extrusion and Drawing, Part 2, Workability in Extrusion and Drawing," *J. Eng. Ind.*, 101, p. 36.
 (5) Clift, S. E., Hartley, P., Sturgess, C. E. N. and Rowe, G. W., 1990, "Fracture Prediction in Plastic Deformation Process," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 32, pp. 1~17.
 (6) Lin, Z. C. and Lin, S. Y. 1993, "An Investigation of Ductile Fracturing in Mild Steel During Upsetting," *Int. J. Mech. Tools Manufact.*, Vol. 33, No. 1, pp. 31~50.
 (7) Benallal, A., Billardon, R. and Lemaitre, J., 1991, "Continuum Damage Mechanics Local Approach to Fracture: Numerical Procedures," *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, 92, pp. 141~155.
 (8) Kachanov, M. L., 1958, "On the Creep Fracture Time," *Izv. Akad. Nauk. SSR*. Vol. 8, pp. 26~31.
 (9) Krajcinovic, D., 1984, "Continuous Damage Mechanics," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 37, No. 1, pp. 1~6.
 (10) Krajcinovic, D., 1984, "Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions," *ASME, Journal of Applied Mechanics*, pp. 1~6.

- (11) Chaboche, J. L., 1988, "Continuum Damage Mechanics : Part I — General Concepts," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 59~64.
- (12) Bontcheva, N. and Jajum, Y., 1990, "Finite Element Method for Large Displacement and Large Strain Elasto-Plastic Analysis of Shell Structures and Some Application of Damage Mechanics," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 36, pp. 219~231.
- (13) Shi, G. Y. and Voyatzis, G. Z., 1993, "A Computational Model for Fe Ductile Plastic Damage Analysis of Plate Bending," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 749~758.
- (14) Kim, J. H., Kim, S. J. and Kim, W. D., 1994, "A Finite Element Analysis of Damage Propagation During Metal Forming Process," Accepted for Publication Engineering Fracture Mechanics.
- (15) Kim, S. J. and Oden, J. T., 1984, "Generalized Potentials in Finite Elasto Plasticity," Int. J. Eng. Sci., Vol. 22, No. 11/22, pp. 1235~1257.
- (16) Kim, S. J. and Oden, J. T., 1985, "Generalized Potentials in Finite Elastoplasticity, Example," Int. J. Eng. Sci., Vol. 23, No. 5, pp. 515~530.
- (17) Kim, S. J. and Oden, J. T., 1985, "Finite Element Analysis of a Class of Problems in Finite Elastoplasticity Based on the Thermodynamical Theory of Materials of Type-N," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 53, pp. 277~302.
- (18) Kim, S. J. and Kim, W. D., 1994, "A Progressive Damage Modeling Based on the Continuum Damage Mechanics and its Finite Element Analysis," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 61, pp. 45~53.
- (19) Kim, S. J. and Kim, J. H., 1993, "Finite Element Analysis of Laminated Composites with Contact Constraint by Extended Interior Penalty Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp. 3421~3439.
- (20) Kobayashi, S., Oh, S. I. and Altan, T., 1989, "Metal Forming and the Finite-Element Method," Oxford University Press, pp. 86~87.
- (21) Crisfield, M. A., 1981, "A Fast Incremental Solution Procedure that Handles "Snap-Through"," Computers & Structures, 13, pp. 55~61.
- (22) Gurtin, M. E., 1981, "An Introduction to Continuum Mechanics," Academic Press, New York.
- (23) Truesdell, C., 1977, "A First Course in Rational Continuum Mechanics," Vol. 1, Academic Press, New York.
- (24) Coleman, B. D. and Gurtin, M. E., 1967, "Thermodynamics with Internal Variables," J. Chem. Phys., Vol. 47, pp. 597~613.
- (25) Bodner, S. R. and Partom, Y., 1975, "Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, No. 2, pp. 385~389.
- (26) Kikuchi, N., 1983, "Remarks on 4CST Elements for Incompressible Materials," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering," Vol. 37, pp. 109~123.
- (27) Hartley, P., Pillinger, L. and Strungess, C., 1992, "Numerical Modeling of Material Deformation Process," Springer-Verlag, Germany.