

압축성 Navier-Stokes 방정식을 이용한 가스 분무기 유동의 수치적 해석

윤병국 · 유성연* · 정명균

한국과학기술원 기계공학과

*충남대학교 금속응고신소재연구소

Numerical Analysis of Gas Atomizer Flow using the Compressible Navier-Stokes Equations

B. K. Yoon, S. Y. Yoo* and M. K. Chung

Department of Mechanical Engineering,

Korea Advanced Institute of Science and Technology,

Taejon 305-701, Korea

**Rapidly Solidified Materials Research Center,*

Chungnam National University, Taejon 305-764, Korea

(Received February 8, 1995)

ABSTRACT The behavior of the flow about gas atomizers with a supersonic nozzle containing an under-expanded or over-expanded jet is very important with respect to performance and stability characteristics. Since detailed experiments are expensive, computational fluid mechanics have been applied recently to various relating flow field. In this study, a higher order upwind method with the 3rd order MUSCL type TVD scheme is used to solve the full Reynolds Navier-Stokes equations. To delineate the purely exhaust jet effects, the melt flow is not considered. Comparison is made with some experimental data in terms of density fields. The influence of the exhaust-jet-to-freestream pressure ratio and the effect of the protrusion length of the melt orifice are studied. The present study leads us to believe that the computational fluid mechanics should be considered as powerful tool in predicting the gas atomizer flows.

1. 서 론

가스 분무기(gas atomizer)를 사용하는 분무 성형 공정은 금속 복합 재료를 생산하는 효과적인 방법으로서 용융 금속의 분무 공정과 성형 고화 공정으로 구성된다. 이중 분무 공정에서 사용되는 가스 분무기는 가스 노즐로부터 분출되는 고속의 제트 유동이 갖는 운동에너지를 이용하여 용융 금속을 미세화하는 장치로서 효율적이고 안정적인 작업을 위한 가스 분무기의 형태, 압력 등은 분무 성형 공정에 있어 기본이 되는 요소이다.

가스 분무 성형법이 고안된 이래로 많은 연구자들이 다양한 형태의 분무기를 제안하였으나 노즐을

통해 분사되는 압축성 제트의 유동 특성에 대한 충분한 이해는 부족한 상태이다. 특히 용융 금속이 분무실로 유출되지 않고 역류하거나 용탕 출구에서 응고되는 경우는 안정된 공정을 위해 필히 배제되어야 하는 상황으로서 가스 분무기의 노즐 형상 및 용탕 출구 형상에 따른 영향을 고려한 설계가 필수적이다. 지금까지 이 분야에서의 연구는 대개 실험에 의해 이루어졌는 바, Ünal,¹⁾ Anderson²⁾ 그리고 최근의 Issac 등³⁾의 연구가 대표적이고 국내에서는 이희춘 등⁴⁾의 연구가 있다.

Ünal은 용융 금속이 자유 유출(free fall)되지 않고 제한 유출(confined fall)되는 가스 분무 공정에 대한 일련의 실험을 통하여 양호한 입도를 보장하는 노즐

목(throat)의 면적, 용탕 출구 돌출 길이(protrusion length, PTL)의 최적값이 존재함을 보였으며 노즐 출구 면적이 이상 팽창(ideal expansion) 조건을 만족시켜야 한다고 주장하였다.

Anderson 등은 고압 가스 분무기(High Pressure Gas Atomizer, HPGA)에 대한 실험을 행하여 용탕 출구의 형태가 흡인 압력(aspiration pressure)을 크게 변화시키는 요인임을 보였다. 이들은 분출된 제트 유동의 경로가 용탕 출구에 의해 많이 교란될수록 흡인 압력이 커지는 결과를 제시하였으나 입도와와의 관련성은 고려하지 않았다.

보다 최근에 Issac 등은 Schlieren기법 등의 사진 촬영 결과와 입도 측정 결과를 토대로 유출되는 액상류(liquid flow)가 초음속으로 분출되는 가스 제트와 이루는 경계면이 압축성 유동에서 전형적인 충격파와 팽창파의 거동에 의해 형성되는 모양임을 보이고 이러한 경계면 교란이 액상류의 분무화 과정에 강한 영향을 준다는 사실을 보였다.

국내에서는 이회춘 등⁴⁾이 가스 분사각, 가스 출구 면적, 용탕 출구 선단의 형태, 가스 분사 압력에 따른 흡인 압력 변화를 디지털 마노메터(digital manometer)를 이용 측정하였다. 이들은 가스 노즐 형상을 제외한 모든 가능한 변수들의 영향을 고려하여 가스 분사 압력이 증가하면 흡인 압력은 증가하고 천이 지점이 약간 길어지고, 흡인 압력은 천이 지역에서 급격히 최대값에 도달한 다음에 서서히 감소한다는 등의 결론을 얻었으며 흡인 압력의 천이 위치를 계산할 수 있는 모델도 제시하였다.

이상의 연구들은 모두 가스 분무기 내에서 유동의 구조를 파악하기 위한 실험 결과들로서 가스 분무기 설계시 참고할 만한 것이다. 그러나 이들이 사용한 노즐 형상, 작업 조건 등은 자기 한정되어 있어 다른 규모의 분무기를 설계해야 하는 관점에서는 보다 일반적인 설계 방법이 필요하다. 전산 수치 해석(computational fluid dynamics)에 의한 유동 해석은 이러한 요구를 만족시키는 좋은 방법이다. 전산 능력의 괄목할 만한 발전은 가스 분무기와 유사한 형상인 제트 추진 비행체 후방의 유동 해석도 가능하게 하였다.⁵⁾ 본 연구에서는 용융 금속이 유출되지 않는 가스 분무기 유동의 특성을 이러한 수치 해석 기법을 사용하여 해석함을 목적으로 한다. 즉, 가스 분무기 유동을 Navier-Stokes 방정식으로 수치 해석하는

프로그램을 개발하고 Ünal, Issac 등의 실험 결과와 비교 검증한다. 또한 충남대학교 급속응고신소재연구소에 설치된 축소 노즐과 축소-팽창 노즐이 사용된 가스 분무기(이하 CNU 가스 분무기로 표기) 내부 유동에 적용시켜 여러 가지 작업 조건에 따른 유동 특성을 파악한다.

2. 지배 방정식 및 변환

본 연구에서는 용탕 출구로 용융 금속이 유입되지 않는 유동장을 해석하므로 지배 방정식은 다음과 같은 보존 형태(conservative form)의 일반적인 Navier-Stokes 방정식이면 충분하다.

$$\partial_t Q + \partial_x E + \partial_y F - \partial_x E_v - \partial_y F_v - S = 0 \quad (1)$$

여기서

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho e_t + P)u \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho e_t + P)v \end{bmatrix}$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{bmatrix} \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y \end{bmatrix}$$

$$S = H_v - H = \frac{1}{y} \begin{bmatrix} 0 - \rho v \\ \tau_{xy} - \frac{2}{3}y \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{v}{y} \right) - \rho uv \\ \tau_{yy} - \tau_{00} - \frac{2}{3} \left[\mu \frac{v}{y} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{v}{y} \right) \right] \\ - \rho v^2 \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y - \frac{2}{3} \left[\mu \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right. \\ \left. - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{v^2}{y} \right) y \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{vu}{y} \right) \right] \\ - (\rho e_t + P)v \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{00} &= \mu \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{4}{3} \frac{v}{y} \right] \\ q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

이 식에서 ρ 는 밀도, u, v 는 x, y 방향 속도, T 는 온도, k 는 열전달 계수이며 압력 P , 총에너지 e_t 는 다음과 같이 정의한다.

$$P = (\gamma - 1) \cdot \left[e_t - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right], \quad e_t = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

여기서 e 는 내부 에너지이며, γ 는 비열비로 공기인 경우 1.4의 상수이다.

한편, 위 방정식에서 점성계수 μ 는 Sutherland 방정식으로부터 산정하며 난류의 효과는 고려하지 않는다. 실제 유동이 난류임에도 이를 고려하지 않은 이유는 초음속 유동장에서 압력장의 형성은 주로 비점성 효과, 즉 압축, 팽창 등에 의해 좌우되기 때문이다. 또한 이런 유동에 적합한 난류 모형의 채택도 매우 어려운 문제이므로 본 연구에서는 층류 유동장만을 해석 대상으로 하였다.

식 (1)을 무차원화하기 위해서 대기압 상태의 값인 음속 a_∞ , 밀도 ρ_∞ , 점성 계수 μ_∞ 를 사용하고 x, y 는 단위 길이 1mm로 무차원화 한다. 따라서 이때 도출되는 단위 길이 당 Reynolds 수는 $\rho_\infty a_\infty / \mu_\infty$ 로 정의된다.

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty} & u^* &= \frac{u}{a_\infty} & v^* &= \frac{v}{a_\infty} \\ e_t^* &= \frac{e_t}{a_\infty^2} & x^* &= \frac{x}{1 \text{ mm}} & y^* &= \frac{y}{1 \text{ mm}} \end{aligned}$$

식 (1)을 무차원 변수로 다시 쓰고 임의의 유동 형상에 대해서도 적용이 용이하도록 일반 좌표계로 변환하여 정리한 후 무차원 변수의 상첨자 *를 생략하고 표현하면 다음과 같다.

$$\partial_t \bar{Q} + \partial_\xi \bar{E} + \partial_\eta \bar{F} - \partial_\xi \bar{E}_v - \partial_\eta \bar{F}_v - \bar{S} = 0 \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= Vol \cdot Q & \bar{E} &= y_\xi E - x_\eta F & \bar{F} &= -y_\xi E + x_\eta F \\ \bar{E}_v &= (y_\eta E_v - x_\eta F_v) / Re & \bar{F}_v &= (-y_\xi E_v + x_\eta F_v) / Re \\ \bar{S} &= (Vol \cdot S) / Re \end{aligned}$$

위 식에서 $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$ 는 좌표의 Metric이고, Vol 은 격자의 제어 체적으로서, Metric Jacobian의 역수와 같은 값이다.

3. 수치 해석 기법

식 (2)의 Navier-Stokes 방정식을 시간에 대해서 Euler 내재 기법(implicit scheme)으로 차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta t} + \frac{\partial \bar{E}^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{E}_v^{n+1}}{\partial \xi} \\ - \frac{\partial \bar{F}_v^{n+1}}{\partial \eta} - \bar{S}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$n+1$ 시간에서의 유량 벡터 및 축대칭 벡터 \bar{S} 등은 다음과 같이 선형화시킨다.

$$\begin{aligned} \bar{E}^{n+1} &= \bar{E}^n + \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} \right) \Delta \bar{Q} \equiv \bar{E}^n + \bar{A} \Delta \bar{Q} \\ \bar{S}^{n+1} &= \bar{S}^n + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{Q}} \right) \Delta \bar{Q} \equiv \bar{S}^n + \bar{X} \Delta \bar{Q} \end{aligned}$$

$\bar{F}^{n+1}, \bar{E}_v^{n+1}, \bar{F}_v^{n+1}$ 벡터도 이와 같이 선형화시키기 위해 다음의 변환 행렬을 도입한다.

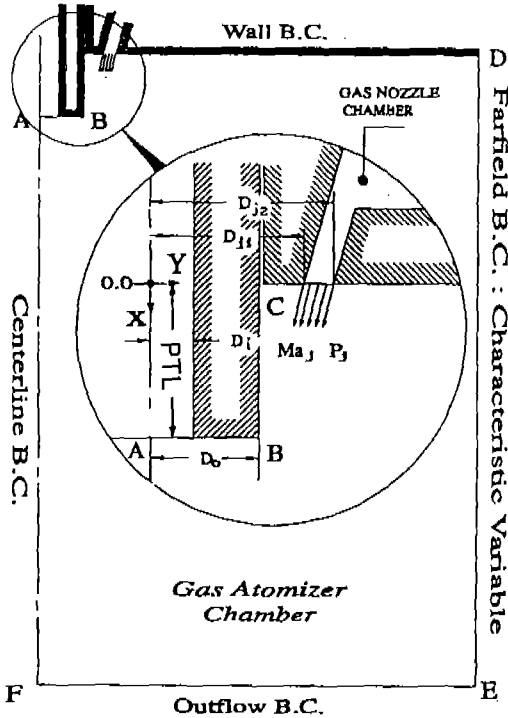
$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}} \right) \equiv \bar{B}, \quad \left(\frac{\partial \bar{E}_v}{\partial \bar{Q}} \right) \equiv \bar{A}_v, \quad \left(\frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \bar{Q}} \right) \equiv \bar{B}_v$$

여기서 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{A}_v, \bar{B}_v, X$ 행렬의 자세한 형태는 Shuen⁶⁾ 이 보인 것과 같다.

위 식들을 식 (3)에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta t} + \frac{\partial (\bar{E}^n - \bar{E}_v^n + \bar{A} \Delta \bar{Q} - \bar{A}_v \Delta \bar{Q})}{\partial \xi} \\ + \frac{\partial (\bar{F}^n - \bar{F}_v^n + \bar{B} \Delta \bar{Q} - \bar{B}_v \Delta \bar{Q})}{\partial \eta} - \bar{X} \Delta \bar{Q} = 0 \end{aligned}$$

공간 차분항을 유한 차분 연산자 D 로 표현하고 정



Drawing not to scale

Fig. 1. Geometry and computational domain for the calculation of the gas atomizer.

리하면

$$\{I + \Delta\tau(D_x \tilde{A} + D_y \tilde{A}_v - D_n \tilde{B}_v - X) \Delta \tilde{Q}^n = -\Delta t \cdot RHS \quad (4)$$

이고, 여기서

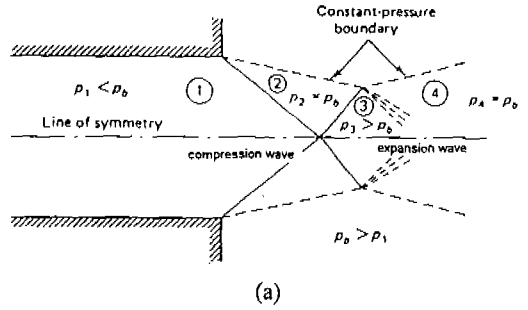
$$RHS = D_x \tilde{E}^n + D_y \tilde{F}^n - D_x \tilde{E}_v^n - D_y \tilde{F}_v^n - \tilde{S}$$

이다. 식 (4)는 5개의 대각 요소로 구성되는 블록 행렬이 된다. 블록 행렬의 역 변환을 용이하게 하려면 근사 인자화 방법도 도입되어야 한다. 본 연구에서는 블록 행렬을 하단 삼각 행렬과 상단 삼각 행렬로 분해하여 계산하는 LU 근사 인자화 기법⁶⁾을 사용하였다. 이를 위해 우선 식 (4)의 좌변에 포함된 비점성 유량 행렬을 특성값(eigenvalues)의 부호에 따라 다음과 같이 분리한다.

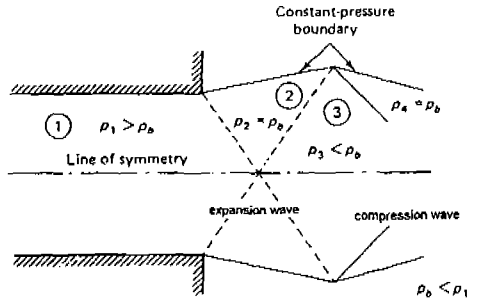
$$\tilde{A} = A^+ + A^-, \quad A^\pm = S_x \Lambda_x^\pm S_x^{-1}$$

$$\tilde{B} = B^+ + B^-, \quad B^\pm = S_n \Lambda_n^\pm S_n^{-1}$$

위 식에서 Λ_x, Λ_n 는 특성 벡터(eigenvectors)로서



(a)



(b)

Fig. 2. Schematic diagram of compression and expansion wave patterns for (a) over-expanded jet and (b) under-expanded jet.

‘+’는 특성값이 양, ‘-’는 음임을 나타내며 각 행렬의 자세한 표현식은 Shuen이 사용한 것과 같다. LU 근사 인자화를 위한 내재 부분(식 (4)의 좌변)의 행렬 분리는 RHS의 분리 방법에 대한 적응성이 뛰어난 Steger-Warming 형태⁷⁾를 사용하였다. RHS의 비점성 유속 벡터는 Van Leer 분리법을 사용하여 결정하고 단위 체적 표면에서의 유량 벡터는 MUSCL(Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws)기법⁸⁾을 사용 결정하며 RHS의 점성 유속 벡터 \tilde{E}_v, \tilde{F}_v 의 공간 차분은 중앙 차분으로 처리한다.⁶⁾ 최종적으로 $\Delta \tilde{Q}^n$ 을 구하고 $\tilde{Q}^{n+1} = \tilde{Q} + \Delta \tilde{Q}$ 의 관계식으로부터 $n+1$ 시간에서의 유동량을 구한다. 이같은 과정을 반복하여 변화량 ΔQ 의 값이 충분히 작아져 정상 상태의 값에 도달하였을 때 계산을 종료한다. 수렴 판정은 ΔQ 의 제곱값을 각 격자점에서 계산하고 전체산 영역에 대해 총합을 구한 후 제곱근을 취하여 격자수로 나눈 L2 norm의 값이 10^{-8} 이하로 떨어질 때를 기준으로 한다.

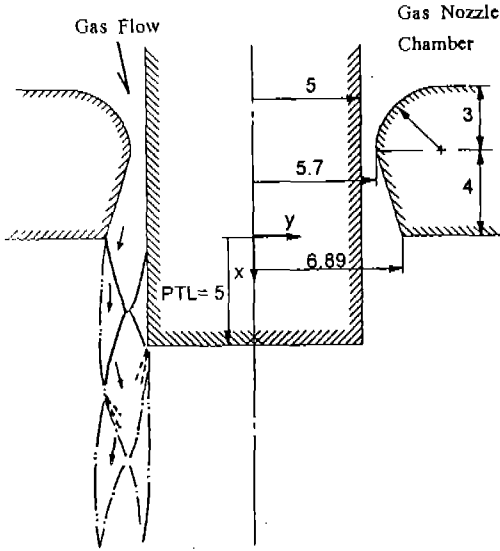


Fig. 3. Geometry of the Ünal's nozzle (IN3/ON7) and wave structure of an exhaust jet.

4. 경계 조건 및 격자계

계산 영역은 그림 1과 같이 가스 노즐 출구 주변의 영역으로 한다. 실험 결과^{1,2)}들에서 알 수 있듯이 환형 노즐의 두께는 용탕 출구의 반경이나 전체 구조물의 폭에 비해 매우 작다. 따라서 가스 분무실(gas atomization chamber) 전체를 해석 영역으로 할 때에는 노즐 출구와 분무실 외벽에 격자를 집중시켜야 하므로 많은 격자를 필요로 하고 많은 계산 시간을 요구한다. 본 연구에서 주된 관심을 갖는 흡인 압력은 노즐에서 분사된 과소 팽창 제트가 용탕 출구 모서리에서 팽창되고 다시 가스 분무기 중심축상에서 압축되는 과정에 의해 결정되므로 가스 노즐 출구에서 멀리 떨어진 분무실 외벽에 의한 효과는 무시할 만한 것으로 가정한다. 즉 분무실 외벽쪽의 유동은 분출된 제트에 의해 빨려 들어가는 수동적인 유동 구조이므로 본 연구에서는 노즐 근처의 유동만을 해석 대상으로 한다.

노즐 출구에서의 경계 조건은 노즐을 1차원 근사에 의해 등엔트로피 해석한 결과를 사용한다. 등엔트로피 해석은 먼저 다음의 노즐 목 면적에 대한 노즐 면적 비 A/A^* 와 Ma 수의 관계식으로부터 주어진 면적에 대한 Ma 수 분포를 결정한다.⁹⁾

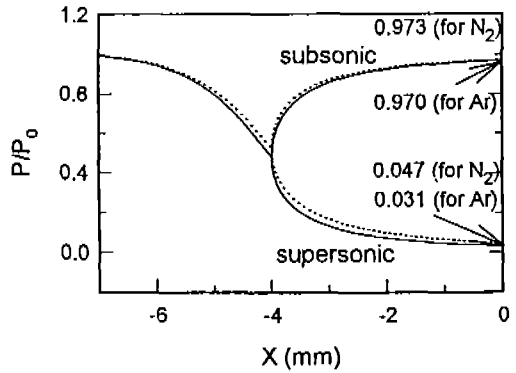
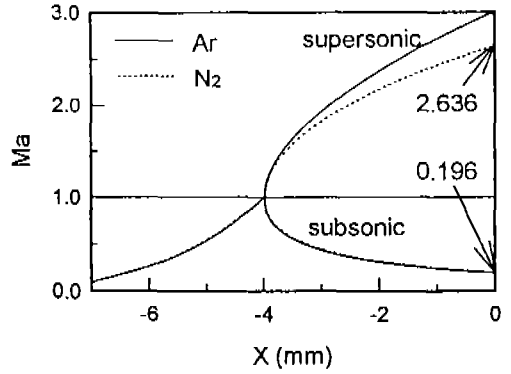


Fig. 4. 1-D isentropic results for the Ünal's converging-diverging nozzle.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \right] \quad (5)$$

노즐 내부에서의 Ma 수가 결정되면 다음의 등엔트로피 관계식으로 유동 변수를 결정하며 따라서 노즐 출구에서의 조건이 결정된다.

$$\frac{P}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (6)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{-1} \quad (7)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (6)$$

여기서 하첨자 0은 정체 상태임을 의미하는데 가스실(gas chamber)에서의 유동은 그림 1이나 그림 3에서 보이는 바와 같이 노즐 면적에 비해 가스실의 면적이 매우 크므로 식 (5)에 의하면 정체 조건에

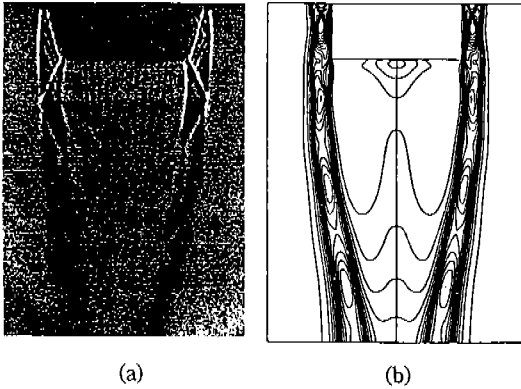


Fig. 5. Comparison between (a) Schlieren photograph and (b) computed isopycnic contour for the Ünal's nozzle (IN3/ON7) operating in argon at 1.65 MPa ($P_0/P_\infty=3.7$).

근사한 마하수를 갖는다. 즉 가스실에서의 유동은 근사적으로 정체 상태로 볼 수 있으며 실험에서의 미하는 가스 압력은 이곳에서의 정체압 또는 총압이라고 할 수 있다. 이는 곧 작용 기체의 저장조(reservoir)에서의 상태값이다. 위 관계식들은 사용 기체가 완전 기체라는 전제하에서 성립되므로 가스 분무기에서 주로 사용되는 질소나 아르곤 가스와 같은 실제 기체인 경우에는 별도의 고려가 필요하다. 그러나 최근의 Drikakis와 Tsangaris¹⁰⁾의 연구에 의하면 완전 기체 가정은 노즐내의 온도 분포를 실제보다 낮게 예측하지만 그 차이가 작고 압력 분포에 대해서는 그 차이가 더욱 미미하므로 단순한 1차원 노즐 해석인 경우에는 실제 기체 영향을 고려할 필요가 없다.

노즐로 분출된 제트 유동의 특성은 노즐 출구압의 크기에 의해 크게 좌우된다. 노즐 외부 배압에 대한 노즐 출구압의 비 P_0/P_∞ 의 값이 1보다 작은 경우 압축성 제트는 과대 팽창(over-expanded) 제트, 1보다 큰 경우는 과소 팽창(under-expanded) 제트로 대별되며 $P_0/P_\infty=1$ 인 경우가 이상 팽창 제트이다. 그림 2(a)는 노즐 출구압이 배압보다 낮은 경우 형성되는 과대 팽창 제트이다. 모서리 부에서 형성된 경사 충격파를 가로질러 압력 증가가 나타나며 이로 인해 영역 2에서의 압력은 배압과 같다. 한편 대칭면에서 반사된 압축파를 가로질러서도 압력 증가가 나타나며, 따라서 $P_3 > P_0$ 이다. 그러나, 등압력 경계면

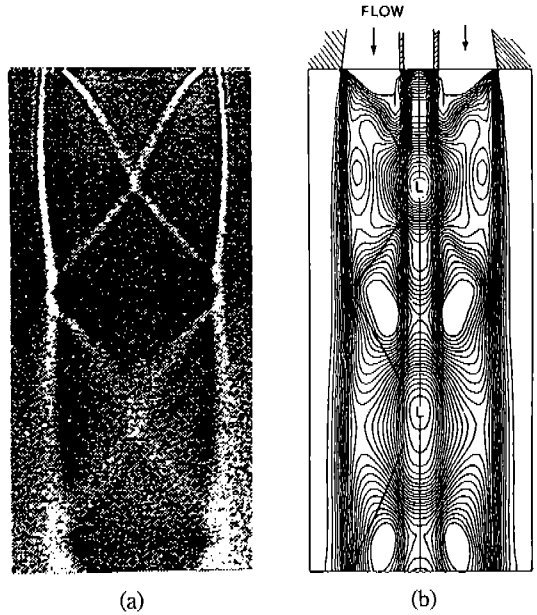


Fig. 6. Comparison between (a) Schlieren photograph and (b) computed isopycnic contour for the Issac's atomizer operating in dry air at $P_0=448$ kPa ($P_0/P_\infty=1.2$).

조건은 제트 경계에서 나타나야 하며 따라서 압력이 감소하는 반사 팽창파가 등압력 경계면에서 나타난다. 즉 중심을 향한 Prandtl-Meyer파(이하 P-M파로 표기)가 반사 경사 충격파가 제트 경계와 만나는 곳에서 발생한다. 반사 충격파를 가로질러 나타나는 압력 증가는 P-M파를 지날 때 나타나는 압력 강화와 정확히 같다. 노즐 출구 모서리에서 형성된 팽창파가 등압력면과 간섭되는 경우는 그림 2(b)와 같이 초음속 제트가 노즐 출구압 P_1 보다 높은 배압 P_0 를 갖는 외부로 분출될 때 나타난다. 즉 이러한 유동 구조는 과소 팽창 제트일 경우 발생한다.

노즐 출구 조건 이외의 경계 조건으로는 벽면에서는 점착 조건(no slip condition)을 가스 분무기 중심축에는 축대칭 조건을 사용한다. 원방(far-field) 경계 조건으로는 압력을 대기압인 1기압으로 놓고 Whitfield 등¹¹⁾이 사용한 특성해 경계 조건을 적용하며 출구 경계면에서 초음속 유출류인 경우 2차 외삽법을 사용한다.

사용할 격자계는 Ünal과 Issac의 가스 분무기에서와 같이 제트 출구 면적이 용탕 출구면의 크기에

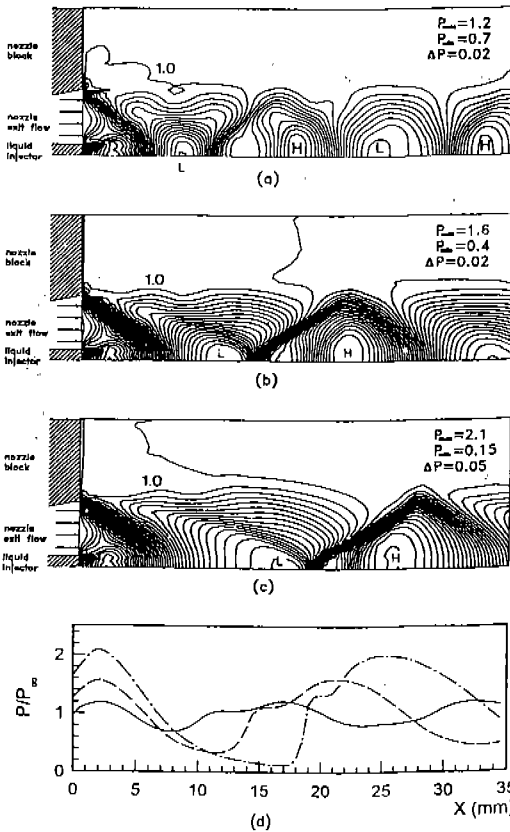


Fig. 7. Calculated isobar contours for the each case of (a) $P_j/P_\infty=1.2$, (b) $P_j/P_\infty=1.58$, (c) $P_j/P_\infty=2.1$ and (d) pressure distributions along the centerline; Issac's gas atomizer.

대해 상대적으로 큰 경우에는 Cartesian 격자 형태를 사용하고 노즐 출구면에 격자를 집중시켜 계산한다. 반면 CNU 가스 분무기에서는 제트 출구 두께가 상대적으로 매우 작으므로 제트 유동의 주흐름 방향으로 적응 격자계(adaptive grid)를 구성하여 계산한다.

5. 계산 결과 및 고찰

5.1. Ünal 가스 분무기

구성된 프로그램으로 Ünal의 실험에서 사용된 그림 3의 분무실을 해석하기 위해 축방향으로 35 mm, 반경 방향으로 10 mm 영역을 140×80의 각 방향 균일 간격 격자로 구획한다. 그림에서 $-7 < x < 0$ 위치에 놓인 노즐로 작업 기체(질소 또는 아르곤)가

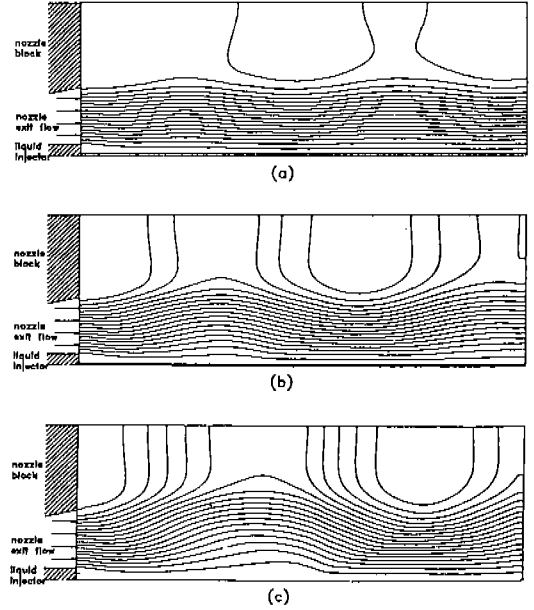


Fig. 8. Calculated streamlines for the each case of (a) $P_j/P_\infty=1.2$, (b) $P_j/P_\infty=1.58$, (c) $P_j/P_\infty=2.1$; Issac's gas atomizer.

흐를 때 노즐 출구에서의 유동 조건은 1차원 등엔트로피 해석으로 결정한다. 그림 4는 1차원 해석 결과 산정한 질소 및 아르곤 가스에 대한 노즐내에서의 마하수 및 압력 분포를 보여준다. 앞서도 언급한 바와 같이 실제 기체의 영향이 작으므로 본 계산에서는 단지 질소인 경우 비열비 γ 를 1.4, 아르곤인 경우 1.67의 상수로 놓고 계산한다. 계산 결과 완전 팽창 유동인 경우 $Ma=3.0$, $P_j/P_0=0.031$, 질소인 경우 $Ma=2.636$, $P_j/P_0=0.047$ 로 결정된다. Ünal이 언급한 이상 팽창시 노즐 출구 조건들은 모두 이 결과와 일치한다. 실험에서 제시된 정체압 $P_0=1.65$ MPa, 분무실 배압(back pressure) $P_\infty=0.103$ MPa (즉, 1기압), 가스 정체온도 $T_0=273$ K, 분무실 내부 온도 $T_\infty=273$ K이고 작용 기체는 아르곤일 때 식 (7)에 의해 $T_j/T_0=0.249$ 또는 $T_j/T_\infty=0.249$ 이고 $P_j/P_0=0.047$ 이며 Navier-Stokes 방정식에 사용된 변수로 치환하기 위해 대기압 상태의 변수로 무차원화하면 다음과 같다.

$$\frac{P_j}{P_\infty} = \frac{P_j}{P_0} \frac{P_0}{P_\infty} = 0.512$$

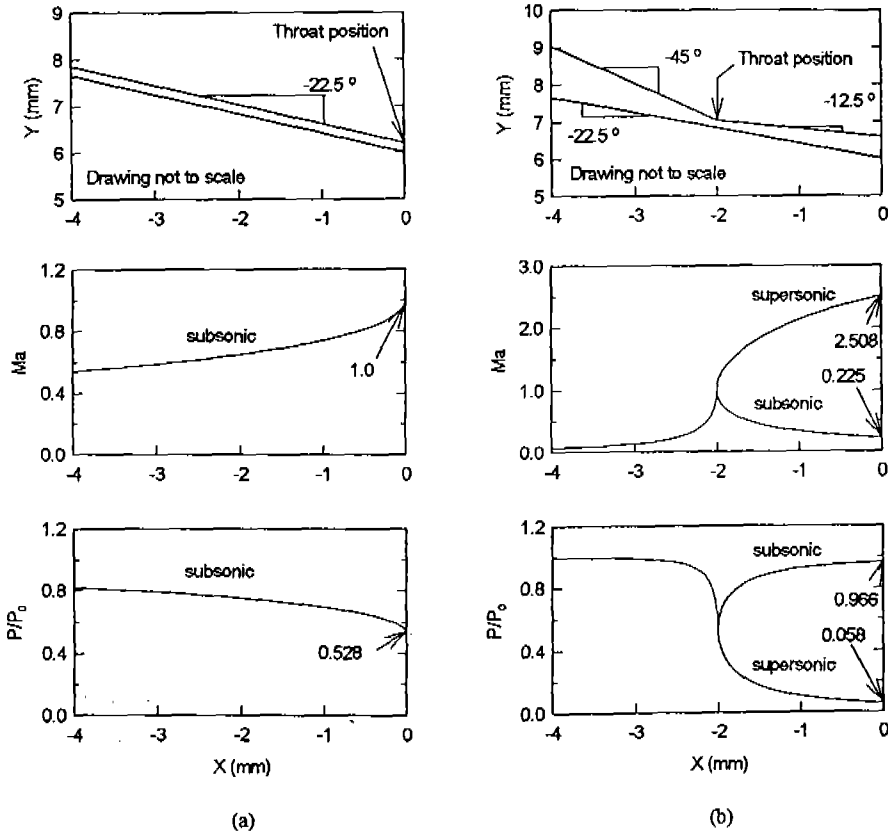


Fig. 9. Nozzle geometry & 1-D isentropic analysis results for (a) converging nozzle (Nozzle 1) and (b) converging-diverging nozzle (Nozzle 2) in the CNU gas atomizer.

Table 1. Nozzle exit condition and jet class of the CNU gas atomizer

P ₀ (기압)	P _j (기압)	
	Nozzle 1 (Converging Nozzle) P _j =0.528 P ₀	Nozzle 2 (Converging-Diverging Nozzle) P _j =0.058 P ₀
1	0.528(O*)	0.058(O)
2	1.056(U**)	0.116(O)
3	1.584(U)	0.174(O)
4	2.112(U)	0.232(O)
5	2.640(U)	0.290(O)
6	3.168(U)	0.348(O)
7	3.696(U)	0.406(O)

P_j/P₀ 값이 1보다 작으므로 이 출구 조건은 과대 팽창 제트에 해당된다.

그림 5는 Ünal이 촬영한 Schlieren 사진으로서 용융 금속이 유출되지 않는 경우를 본 연구에서 계산한 등밀도선과 비교하고 있다. 계산된 결과는 실험 결과에 비해 충격파 세포 구조(cell structure)의 주기가 다소 짧으나 전반적인 유동 구조를 잘 보여주고 있다. 특히 주목할 것은 실험에서와는 달리 계산 결과는 출구 직후의 바깥쪽 등밀도 경계면이 분무기 중심을 향하고 있는데 이는 노즐 출구 조건을 x방향 균일 유동으로 보았기 때문으로 여겨진다. 그림 2(a)에서 보이는 바와 같이 과대 팽창 제트인 경우 등압력면은 중심을 향해 좁아지다가 영역 3에서 다시 팽창하는 양상이므로 노즐 출구 유동이 y방향 성분이 없는 경우 계산 결과가 타당하다. 그러나 실험에서 사용된 노즐은 2차원 효과를 무시할 수 없을 정도로 노즐 목 면적에 대한 노즐 출구 면적의 비가 커서

$$\frac{\rho_j}{\rho_\infty} = \frac{P_j}{P_\infty} \frac{T_\infty}{T_j} = 2.053$$

$$Ma_\infty = Ma \sqrt{\frac{T_j}{T_\infty}} = 1.497$$

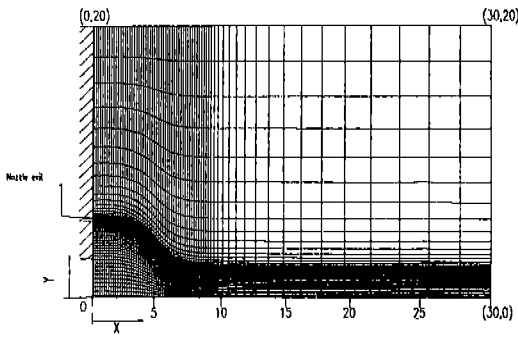


Fig. 10. 70×60 grid system for orifice protrusion length=0 case.

엄밀한 계산을 위해서는 2차원 효과를 고려한 노즐 해석을 통해 노즐 출구 조건을 산정해야 한다는 문제가 있다.

5.2. Issac 가스 분무기

Issac 등이 실험에 사용한 가스 분무기의 노즐은 Ünal의 경우와는 달리 면적의 변화가 작아 1차원 근사가 적합하고 출구 조건은 실험에 의해 주어져 있으므로 제트 분출 경계 조건의 임의성이 없어 좋은 계산 대상이다.

Issac 가스 분무기 형상은 용탕 출구 안지름 $D_1=1.4$ mm, 용탕 출구 바깥 지름 $D_0=1.8$ mm, 가스 노즐 출구 바깥 지름 $D_2=11$ mm이고 용탕 돌출 길이 PTL=0 mm로서 가스 노즐 출구 면적이 용탕 출구 면적에 비해 매우 크다. 계산을 위해 분무기 축방향으로 35 mm, 반경 방향으로 12 mm 영역에 대해 70×40의 각 방향 균일 간격 격자계를 사용한다.

그림 6은 노즐 정체압 $P_0=0.448$ MPa인 경우로 $Ma_j=1.5$, $P_j/P_{00}=1.2$, 즉 과소 팽창 제트에 해당된다. 이때 가스 정체온도 $T_0=300$ K, 분무실 내부 온도 $T_{00}=273$ K이므로 식 (7)로부터 $T_j/T_{00}=0.758$ 로 결정되고 따라서 $\rho_j/\rho_{00}=2.77$ 임을 알 수 있다. 그림에서 표시된 분무기 중심축상의 L 로 표시된 영역이 팽창과가 집중된 부분을 나타내며 충격파 세포 구조가 실험에서 구한 Schlieren 사진과 일치함을 알 수 있다. 그림 7은 $P_j/P_{00}=1.2, 1.58, 2.1$ 인 각각의 경우의 등압선도와 분무기 중심축을 따른 압력 분포이다. 그림에서 보인 바와 같이 충격파 세포 구조의 크기는 출구압이 증가됨에 따라 커지고 이에 따라 충격파 위치는 하류로 물러나고 강도가 점차 증가함을 알

수 있다. 또한 용탕 출구면에서의 압력도 점차 증가되어 출구압이 높아지면 흡입 측면에서는 불리함을 알 수 있다. 그러나 그림 8에서 보인 유선은 제트 경계면이 출구압이 높아짐에 따라 왜곡되는 양상을 보여주는데 이는 Issac 등이 지적한 대로 출구압이 높아짐에 따라 용탕의 분쇄가 활발해진다는 관측을 뒷받침하는 결과로서, Rayleigh의 고전적인 이론¹²⁾에 근거한 Kelvin-Helmholtz파의 형성이 출구압이 높을수록 촉진된다는 사실을 나타낸다.

5.3. CNU 가스 분무기

충남대학교 급속응고신소재연구소에 설치된 가스 분무기의 개발도는 그림 1과 같다. 그림에서 $x=-4$ mm 위치는 가스 분무기내에 노즐이 놓이는 위치이다. 본 연구에서는 가스 노즐을 축소 노즐과 축소-팽창 노즐의 두 가지 형태로 채택하며 사용되는 가스는 공기로 놓고 해석하였다. 그림 9는 각각의 노즐에 대한 1차원 등엔트로피 해석 결과를 보여주며 이 결과에 준하여 제트 분사 조건을 정한다.

그림 9(a)에서 보인 축소 노즐은 가스실에서 노즐로 급격한 면적 변화가 있어 노즐 입구에서 Vena-contracta가 유발되고 2차원 효과를 무시할 수 없어 1차원 등엔트로피 근사가 부적절하다. 본 연구에서는 이러한 급격한 축소가 나타나지 않도록 노즐 유입부를 완만한 곡면으로 처리하였다고 가정하여 해석하였다. 반면 그림 9(b)의 축소-확대 노즐은 노즐 입구에서 마하수가 정체값에 가까운 0.07로서 노즐 유입부에 별다른 가정을 하지 않아도 1차원 근사가 타당하다. 해석 결과 축소 노즐은 출구 마하수가 초우킹 조건인 $Ma=1.0$ 이며 출구압은 $0.5283 P_0$ 이다. 축소-팽창 노즐은 노즐 외기압이 $0.9655 P_0$ 이하인 경우 노즐내에 수직 충격파가 생기거나 충분히 낮은 압력일 경우 초음속으로 팽창한다. 후자의 경우 출구 마하수는 $Ma=2.508$, 출구압은 $0.0578 P_0$ 로 결정된다. 출구 밀도는 두 경우 모두 분무실내의 가스 밀도와 같은 값으로 설정한다.

가스실 내부의 압력을 근사적으로 총압으로 보았을 때 주어진 총압 P_0 에 따른 각 노즐에서의 출구압 및 그때의 제트 유동의 분류는 표 1과 같다. 표에 나타낸 바와 같이 노즐 1, 즉 축소 노즐인 경우에는 정체압 1기압일 때 과대 팽창, 나머지 정체압에 대해서는 모두 과소팽창 제트이다. 한편 축소-확대

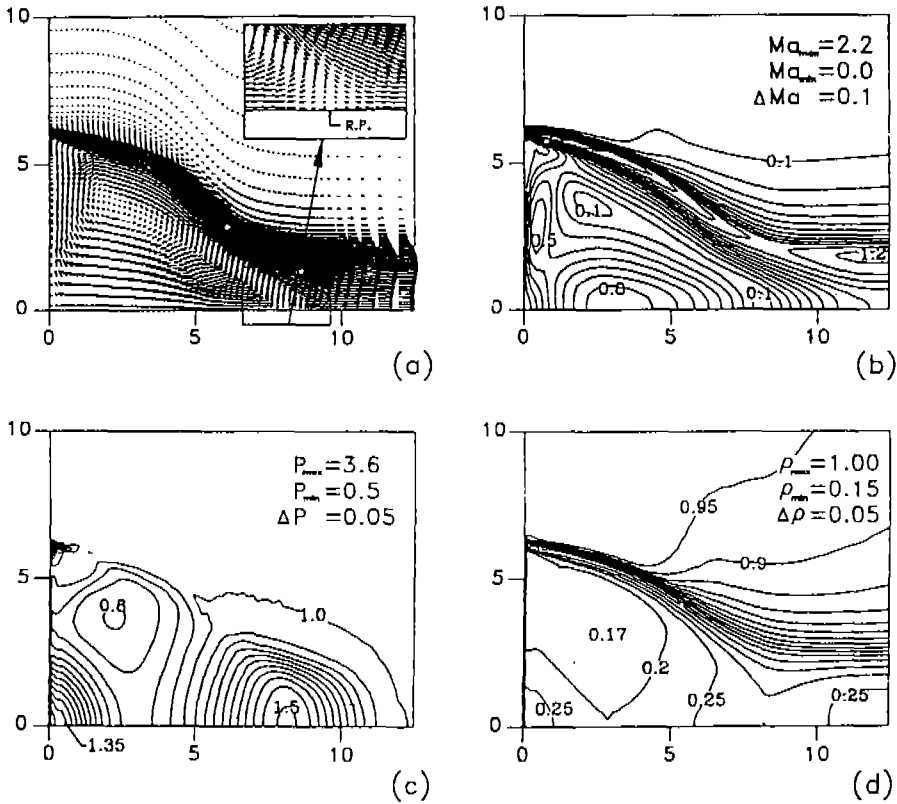


Fig. 11. Calculated (a) velocity vector field (b) iso-Machs (c) isobars and (d) isopycnics; CNU gas atomizer, Nozzle 1, $P_j/P_\infty=3.7$, $PTL=0$ mm.

노즐인 노즐 2에 대해서는 모두 과대팽창 제트이다.

가스 분무기 형상은 용탕 출구 안지름 $D_i=6$ mm, 용탕 출구 바깥지름 $D_o=11$ mm, 가스 노즐 출구 안지름, $D_{j1}=12$ mm, 가스 노즐 출구 바깥지름 D_{j2} 는 축소 노즐인 경우 12.4 mm, 축소-팽창 노즐인 경우 13.4 mm이고 용탕 돌출 길이 PTL 은 0 mm에서 6 mm까지 1 mm 간격으로 변화시켜가며 계산하였다.

그림 10에서와 같이 계산 영역은 분무기 중심축 방향으로 30 mm, 반경 방향으로 20 mm까지로 하며 70×60 의 격자계를 사용한다. 그림 1에 주어진 유동장을 해석하기 위하여 유동의 변화가 큰 노즐 출구 부분에 y방향으로만 격자를 밀집시킬 경우 중심축 근방에서의 격자가 성겨져 수렴성 및 정확성을 떨어뜨리므로 적응 격자계의 사용은 필수적이다. 따라서 주 유동 방향으로의 유동 계산 정확도를 높이기 위해 균일 격자계에 대해 수렴시킨 결과를 토대로 그림 10과 같이 적응 격자계(adaptive grid system)

을 구성하여 계산한다. 이 적응 격자계는 $P_0=5$ 기압이고 용탕 출구 돌출 위치가 0 mm인 경우에 대해 Cartesian 격자계 상에서 해를 구한 후 결정된 유선을 따라 적응시킨 것이다.

그림 11은 용탕 출구의 돌출 길이 $PTL=0$ mm인 경우의 대표적인 계산 결과로서 축소 노즐인 노즐 1을 사용한 경우이다. 이 그림은 $P_0=7.0$ 기압일 때 $P_j=3.696$ 기압인 과소 팽창 제트가 분사되어 형성한 속도장, 등마하선, 등압력선, 그리고 등밀도선을 보여준다. 앞서 보인 Ünal, Issac의 분무기와는 달리 CNU 가스 분무기는 노즐 출구 면적이 용탕 출구 면적에 비해 매우 작아 앞서 보인 충격파 세포 구조는 출구 직후의 매우 제한된 영역에서만 나타난다. 그림 11(c)에 보인 바와 같이 과소 팽창된 제트 유동은 출구 직후 팽창에 의한 압력 강하를 보여 압력이 0.8기압까지 떨어지고 다시금 중심축에서 만나 1.5기압의 고압 영역을 이룬다. 그림 11(a)와 (c)로

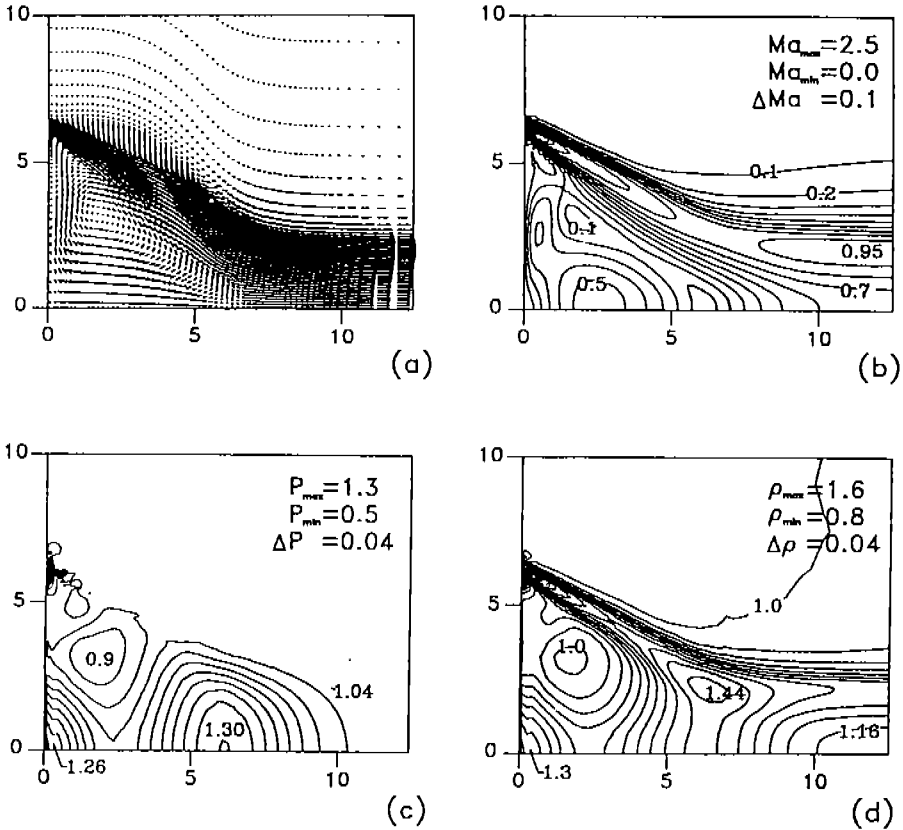


Fig. 12. Calculated (a) velocity vector field (b) iso-Machs (c) isobars and (d) isopycnics; CNU gas atomizer, Nozzle 2, $P_j/P_{\infty}=9.41$, $PTL=0$ mm.

부터 알 수 있듯이 이 유동의 특징은 분사된 제트가 분사기 중심축상 8.0 mm 부근의 재부착점(R.P.: Reattached Point)에서 고압 영역을 형성한다는 것이다. 즉 주류가 정체 영역에서 주 유동 방향 흐름과 용탕 출구를 향한 역방향 흐름으로 일부 분기되어 유동 구조가 형성되며 앞서의 결과와 같은 충격-압축과 구조는 전반적인 유동 구조상 현저하지 않음을 알 수 있다. 특히 주목되는 것은 중심축에서 만난 제트의 일부가 압력 구배에 의해 용탕 출구쪽을 향해 진행되다가 용탕 출구면에서 다시 정체, 고압의 영역을 형성하여 용탕 출구에 국부적으로 높은 압력을 유발시키고 반경 방향으로 흐름이 형성되는 것이다. 즉, Ünal의 실험 결과에서와 같이 용융 금속이 제한 유출되는 경우, 용융류는 용탕 출구 직후에서 가스의 흐름을 따라 반경 방향으로 얇은 막을 형성하며 분출될 것이다. 그림 11(c)와 같은 압력장은 용탕이

자유 분출되어 가스 흐름이 교란되는 경우 양상이 변화되겠지만 주어진 가스 분무기의 형상 및 압력 조건이 운전 초기 상태에서 용탕을 용이하게 흡인할 수 있는지의 여부를 이해하는데 있어 매우 중요하다. 최근까지도 극초음속(ultrasonic) 가스 분무기나 일반 가스 분무기 실험에서 흡인 압력이 음(-)이 되어 용융 금속이 위로 올라가는 치명적인 상황이 발견되는 것은 바로 이와 같이 흡인을 유발하는 압력장에 대한 이해가 선행되어야 함을 보여준다고 하겠다.

그림 12는 그림 11의 경우와는 달리 축소-팽창 노즐을 사용한 경우이다. $P_0=7.0$ 기압일 때 노즐 출구압 $P_j=0.406$ 기압으로 과대 팽창 제트이다. 가스 정체압이 그림 11의 축소 노즐인 경우와 같은 값임에도 불구하고 유동장은 차이를 보인다. 이는 가스 분무기 특성을 좌우하는 변수가 정체압 자체보다는 가스 노즐 출구압임을 의미한다. 그림 12(a)에서 알

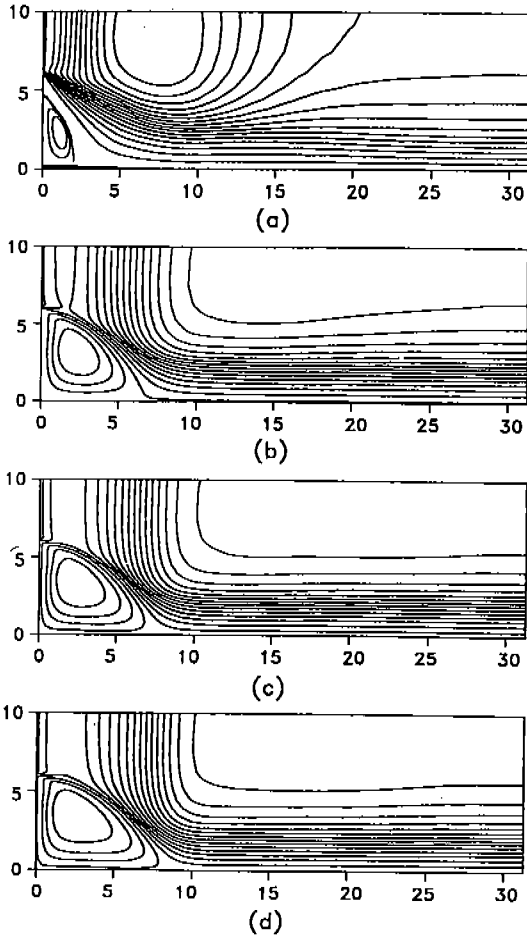


Fig. 13. Calculated streamlines for the each case of (a) $P_j/P_\infty=0.53$, (b) $P_j/P_\infty=1.58$, (c) $P_j/P_\infty=2.64$, (d) $P_j/P_\infty=3.7$; CNU gas atomizer, Nozzle 1, PTL=0 mm.

수 있듯이 재부착점이 축소 노즐인 경우보다 2 mm 빠른 6 mm 부근에서 형성되며 등마하선도와 등압선도는 유동 구조가 축소 노즐인 경우와 크게 다르지 않다. 그러나 그림 12(d)에서 보인 바와 같이 밀도장은 현격한 차이를 보인다. 그림 11(d)의 과소 팽창 제트인 경우 분사된 유동은 재순환 영역에서 $0.17 \rho_\infty$ 로 매우 낮은 밀도를 갖는 반면 이 경우 과소 팽창 제트는 $1.0 \rho_\infty$ 값을 갖는다. 이는 곧 이상기체 관계식으로부터 과대 팽창 제트인 경우 온도가 상대적으로 높다는 사실을 의미한다. 가스 분무기는 제트의 충돌 에너지로 금속 용융류를 깨뜨리고 금속의 열 에너지를 급격히 빼앗아 분말화시키므로 과대 팽창

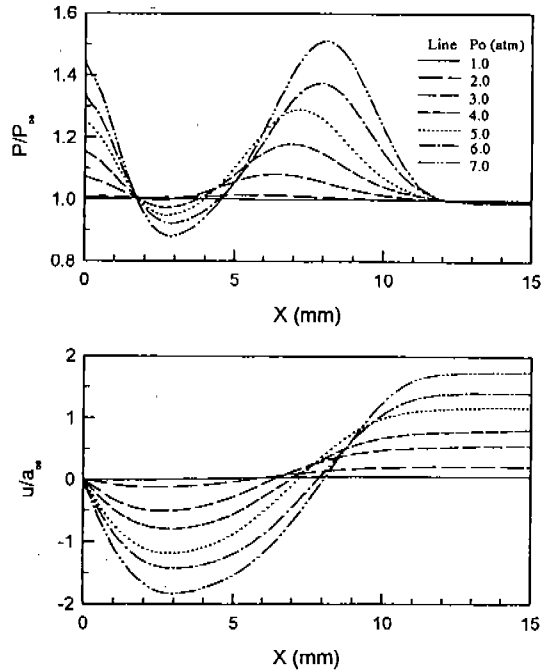


Fig. 14. Variation of pressure distributions and velocity distributions along the centerline of the gas atomizer; CNU gas atomizer, Nozzle 1, PTL=0 mm.

제트에서와 같이 가스가 높은 온도를 갖는다는 것은 결정 생성 측면에서 불리하다. Ünal¹¹의 실험 결과에서 축소-팽창 노즐이 축소 노즐보다 고온 입도를 보장한다는 사실은 이러한 유동 특성에 기인하는 것으로 생각된다.

그림 13은 노즐 1에 대해 용탕 출구 길이가 0 mm인 경우 출구압 P_j 를 0.53, 1.58, 2.64, 3.70기압으로 변화시키며 계산한 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 출구압이 높을수록 재부착점은 점차 하류로 밀려남을 알 수 있다. 특히 과대 팽창인 $P_j/P_\infty=0.53$ 인 경우 재순환 영역의 크기는 매우 작으며 재부착점의 위치는 그림 14에서 보인 바와 같이 6 mm로 그림 12에서 보인 노즐 2의 결과와 가깝다.

그림 14는 노즐 1의 경우 정체압을 변화시킴에 따른 분무기 중심축상의 압력과 속도 분포이다. 앞서 보여준 Issac 분무기의 결과와는 달리 압력 분포선이 싸인 함수 형태의 완만한 변화 양상을 보임을 알 수 있다. 그러나 출구압이 높아짐에 따라 재부착점의 압력이 높아지는 양상은 유사하다 하겠다. 또한 재부착점의 위치는 하류로 이동하고 용탕 출구면의

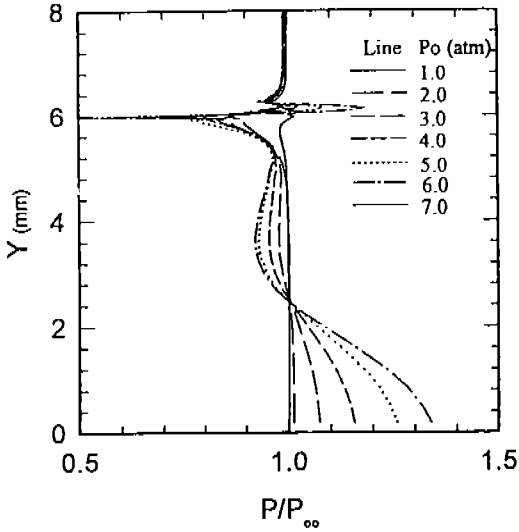


Fig. 15. Variation of pressure distributions along the melt orifice base; CNU gas atomizer, Nozzle 1, PTL=0 mm.

압력도 상승한다.

그림 15는 용탕 출구면을 따른 압력 분포를 보여준다. 가스 압력의 크기에 관계없이 중심축에서 바깥쪽을 향해 순압력 구배를 이루며 이로 인해 그림 11(a)와 그림 13에서와 같이 유동이 용탕 출구 벽면을 따라 움직임을 알 수 있다. 노즐 출구 안지름 위치인 $y=6\text{ mm}$ 지점에 가까워지면 압력은 급격히 하강하는 바, 이는 고압의 제트가 출구로부터 분출된 직후 급격히 팽창되기 때문이다. 단, P_0 가 1기압인 경우는 표 1에서 분류한 바와 같이 과대 팽창 제트이므로 출구 직후에서 극부적으로 압력 상승을 보인다.

다음으로는 용탕 출구 위치에 따른 유동 구조의 변화를 살펴본다. 그림 16은 노즐 1에 대해 가스 정제압이 7기압인 경우, 용탕 출구 돌출 길이를 0.0, 3.0, 6.0mm로 변화시켜 가며 등압선도를 비교한 것이다. 노즐 출구 부분을 제외한 용탕 출구면 이후에서의 전반적인 유동 상황은 세 가지 경우 거의 일치하나 압력의 증감 정도는 용탕 출구가 돌출됨에 따라 완화된다. 또한 용탕 출구면에서도 압력이 작아짐을 알 수 있다. 용탕 출구면에서 압력을 면적분하여 구한 흡인 압력 $\Delta P = P_\infty - P_{base}$ 의 변화는 그림 17과 같다. 축소 노즐인 노즐 1일 경우 흡인 압력은

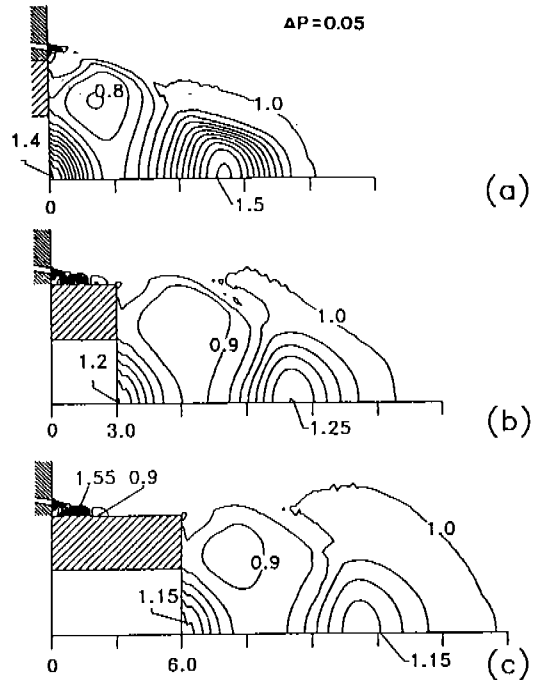


Fig. 16. Variation of isobar contours with protrusion length of melt orifice: (a) PTL=0 mm, (b) 3.0 mm and (c) 6.0 mm; CNU gas atomizer, Nozzle 1, $P_0/P_\infty=3.7$ ($P_0/P_\infty=7.0$).

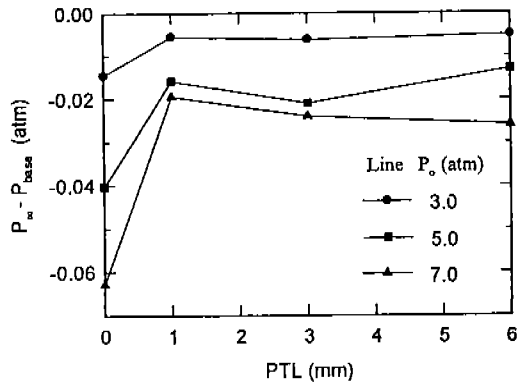


Fig. 17. Variations of aspiration pressure with protrusion length of melt orifice for the converging nozzle; CNU gas atomizer, Nozzle 1.

그림에서 알 수 있듯이 계산된 모든 경우에 대해 음(-)이다. 가스 압력이 높아질수록 흡인 압력은 더욱 작아지며 흡인 압력이 최소가 되는 용탕 출구 위치가 관찰된다. 출구 위치가 멀어질수록 흡인 압력은 다시

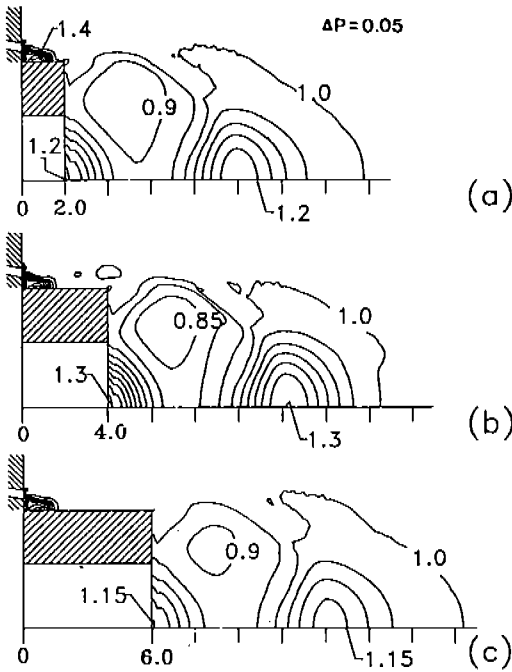


Fig. 18. Variation of isobar contours with protrusion length of melt orifice: (a) PTL=0 mm, (b) 3.0 mm and (c) 6.0 mm; CNU gas atomizer, Nozzle 2, $P_f/P_\infty = 3.7$ ($P_0/P_\infty = 7.0$).

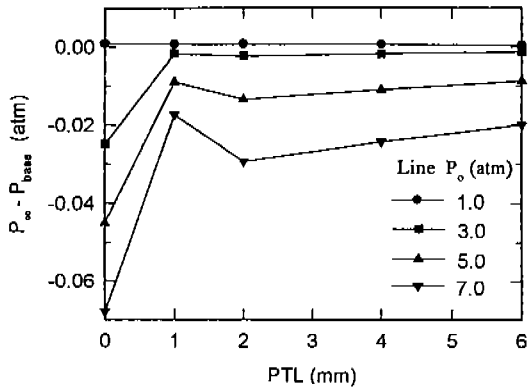


Fig. 19. Variations of aspiration pressure with protrusion length of melt orifice for the converging nozzle; CNU gas atomizer, Nozzle 2.

키지나 계산된 조건하에서는 어느 경우이든 양(+)의 흡인 압력이 나타나지 않는다. 그림 18은 노즐 2를 사용한 경우로 용탕 돌출에 의한 압력 구배 완화 정도가 노즐 1에 비해 불분명하다. 또한 노즐 출구

직후 용탕 돌출 윗면의 압력 변화도 축소 노즐인 노즐 1과는 달리 팽창에 의한 저압 영역이 없다. 그러나 같은 PTL=6 mm인 경우, 그림 16(c)와 18(c)는 거의 같은 압력장을 형성한다. PTL=0 mm일 때에는 다르게 밀도장을 제외한 압력장 및 속도장이 노즐 1 및 2에 대해 큰 차이가 없다. 그림 19는 노즐 2를 사용한 분무기에서 형성된 흡인 압력의 변화이다. 가스 정체압이 1기압일 때 모든 PTL에 대해 양의 흡인 압력을 보이며 총압이 3, 5, 7기압일 때는 노즐 1과 유사하나 흡인 압력의 크기는 다소 작다. Shen 등¹³⁾에 의하면 금속 용융류의 유량 J_m 은 다음 관계식을 갖는다.

$$J_m = \rho A C_d \sqrt{2(gh + \Delta P/\rho)}$$

여기서 ρ 는 용융 금속의 밀도, A 는 용탕 출구 면적, C_d 는 금속 용융물의 방출 계수, g 는 중력 가속도, h 는 압력 수두이다. 다른 모든 조건이 같다면 흡인 압력 ΔP 가 클수록 J_m 이 증가한다. 따라서 그림 17과 19로부터 PTL=1 mm인 경우 가장 큰 J_m 을 기대할 수 있다. 또한 정체압 P_0 를 크게 할수록 ΔP 는 작아지므로 용융류 유량이 작아짐을 알 수 있다.

6. 결 론

가스 분무기 유동장을 해석한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

- 1) 가스 분무기 유동에 있어 노즐 형상의 선정은 면적 변화가 완만한 경우 1차원 등엔트로피 해석이 유용하다.
- 2) 가스 분무기에서 중요한 설계 변수는 가스 정체압 자체보다는 노즐 출구에서의 압력과 분무실 압력과의 비이다.
- 3) 축소 및 축소-팽창 노즐에 대하여 가스 정체압이 증가할수록 흡인 압력은 작아진다.
- 4) 축소-팽창 노즐은 축소 노즐에 비해 제트 충돌면에서 낮은 온도장을 형성하므로 용융 금속의 결정 생성시 열전달 특성이 좋다.
- 5) 흡인 압력은 용탕 출구 돌출 길이에 따라 변하며 주어진 축소 및 축소-팽창 노즐에 대해 1 mm 돌출시 가장 높은 흡인 압력을 보장한다.

참 고 문 헌

1. A. Ünal : Material Science & Technology, 4 (1988) 909
2. I. E. Anderson and R. S. Figliola : *Observations of Gas Atomization Process Dynamics*, Proc. PM 88, International Powder Metallurgy Conference (1989) 205
3. K. Issac, A. Missoum, J. Drallmeier and A. Johnston : AIAA J., 32 (1994) 1640
4. 이희춘, 라형용, 오규환, 이호인 : 대한금속학회지, 29 (1991) 680
5. 윤병국, 정명균 : 대한기계학회논문집, 16 (1992) 356
6. J. S. Shuen : J. of Comp. Phys., 99 (1992) 233
7. J. L. Steger and R. F. Warming : J. of Comp. Phys., 40 (1981) 263
8. H. C. Yee : NASA TM 101088 (1989)
9. J. D. Anderson, Jr. : *Modern Compressible Flow*, McGraw-Hill Press, (1982) 120
10. D. Drikakis and S. Tsangaris : J. of Fluids Eng., 115 (1993) 115
11. D. L. Whitfield and J. M. Janus : AIAA Paper 84-1552
12. P. G. Drazin and W. H. Reid : *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, (1981)
13. J. Shen, C. Cui, Z. Jiang and Q. Li : Scripta Metallurgica et Materialia, 27 (1992) 1325