

# P - N 近似法를 이용한 圓管周圍 層流 境界層內 組合 熱傳達 傳達 特性 解析

이 종 원\* · 이 창 수\*\*

A Numerical Analysis of Characteristics of Combined Heat Transfer in Laminar  
Layer along Cylindrical Periphery by P - N Method

J. W. Lee · C. S. Lee

**Key words** : Spherical harmonics method(구조화 근사법), Radiation heat transfer(복사열전달), Emissivity(방사), Absorbing(흡수), Optical radius(광학반경)

## Abstract

Heat transfer for absorbing and emitting media in laminar layer along the cylinders has been analyzed. Governing equation are transformed to local nonsimilarity equations by the dimensional analysis. The effects of the Stark number, Prandtl number, Optical radius and wall emissivity are mainly investigated. For the formal solution a numerical integration is performed and the results are compared with those obtained by P - 1 and P - 3 approximation. The results show that boundary layers consist of conduction - convection - radiation layer near the wall and convection - radiation layer far from the wall, As the Stark number or wall emissivity increases the local radiative heat flux is increased. The Prandtl number or curvature variations do not affect the radiative heat flux from the wall, but The Prandtl number or wall emissivity variations affect the conduction heat flux. Consequently the total heat flux from the wall are affected by the Prandtl number or wall emissivity variation.

記 號

로마자

F 無次元 流動函數

G 無次元 輻射強度

M 輻射強度 係數

Y 구조화 함수

St Stark 數

\* 정희원, 경희대학교 교수  
\*\* 정희원, 경희대학교 대학원

Nu	Nusselt 數
Pe	Peclet 數
Gr	Grashof 數
Pr	Prandtl 數
Q	無次元 熱流束
Cf	摩擦係數
An	구조화 函數로 표기된 輻射強度係數
$I_{\infty}$	無限境界 면에서의 輻射강도
$I_w$	圓管 壁面에서의 輻射 強度
$Go_{i,j,k,ii}$	무차원 軸射強度 모우멘트
$I_{o,i,j,k,ii}$	輻射強度 모우멘트
g	重力 加速度
I	輻射強度
n	회유체의 굴절을
q	熱流束
r	半徑 座標
T	溫度
$U_o$	X方向의 特性 速度
$V_o$	r方向의 特性 速度
u	x方向의 速度
v	r方向의 速度
X	圓筒 壁面을 따라가는 軸方向 座標
y	圓筒 座標에서 시작되는 方位方向 座標
z	軸座標

그리스 문자

$\alpha$	熱 擴散 係數
$\beta$	회유체의 體積 膨脹 係數
$\epsilon$	壁面의 放射率
$\delta$	境界層의 두께
$\eta$	無次元 獨立 變數
$\zeta$	無次元 獨立 變數
$\theta$	無次元 溫度
$\Theta$	等位角
$\phi$	方位角
$\Phi$	流動函數
$\lambda$	표면 放射와 反射율의 비
$\tau_s$	圓管 中心에서 無限공간 상의 임의의 점까지의 光學 半徑
$\tau_w$	圓管 壁面까지의 光學 半徑
$\mu$	粘性係數

v	動粘性係數
$\rho$	회유체의 밀도
CB1	境界面의 積分區間
CB2	無限 境界面의 積分區間

1. 序 論

流體力學이나 熱傳達到 관한 여러가지 論文이나 文獻들을 살펴보며는 圓筒, 구, 썩기 등 여러가지 形態의 物體 周圍의 境界層內에서 流動과 熱傳達 特性에 관하여 오래전부터 많은 研究가 進行되어 왔음을 알 수가 있다. 境界層內에서의 輻射를 고려한 熱傳達解析과 輻射熱傳達方程式(Radiative Transfer Equation, RTE)의 解析에 관한 研究 動向과 結果에 대하여 살펴보며는 다음과 같다. Viskanta & Grosh(1962)는 強制對流에 의하여 光學 두께가 두꺼운 회유체가 썩기주위를 흐를 때 境界層內의 熱傳達 解析에서 輻射熱傳達을 Rosselad 近似法으로 解析을 하였다. Cess는 이러한 誤差를 극복하기 위하여 壁面 근처에서는 光學 두께가 얇은 對流 - 傳導層이 存在하고 그 외부에는 光學 두께가 두꺼운 輻射層이 存在한다고 假定하여 두 領域으로 分離하여 각각을 特異攝動法(Singular Perturbation Methods)을 사용하여 物體周圍의 強制對流 및 自然對流 境界層에 관하여 解析을 하였다. Chen & Ozisik(1972)는 散亂을 고려하여 垂直 平板위의 自然對流를 Normal - Mode 展開法을 사용하여 높은 精密度의 解를 구하였다. 시뮬레이션을 이용한 組合 熱傳達를 解析한 研究 內容들을 살펴보며는 Audunson & Gebhart (1972)는 壁面의 熱流束이 일정할때 Mach - Zenhader 간섭계를 써서 空氣와 아르곤 등 輻射에 透明한 氣體와 암모니아 등 吸收 媒質에 대하여 解析하였다. 이번 研究에서는 境界層內에 있어서 輻射熱傳達 方程式의 形式解를 직접 적분한 결과와, P-N 近似法을 사용하여 얻은 結果를 比較 考察하므로써 N값의 變化에 따른 形式解와 近似解와의 結果의 精確성을 比較하고 계산시간의 經濟性を 比較하였다. 壁面의 溫度가 一定한 경우의 圓管 周圍에 媒質이 輻射에 대하여 吸收, 放射할 때 自然對流에 의하여 생기는 層流境界層流動場의 內部와 溫度場을 次元解析으

로 無次元 獨立變數를 利用 支配方程式을 比相似 境界層方程式으로 변환 후 다음과 같은 物理量을 數值解析하였다. Prandtl 수와 Stark 수, 圓筒半徑, 圓筒 壁面의 表面 反射率의 變化에 따른 境界層 內部의 流動과 熱傳達 特性을 考察하였다. P-N 近似法으로 구한 解를 比較하여 近似法의 適用限界에 대하여도 考察하였다.

## 2. 理論解析

### 2.1 支配方程式의 構成

壁面의 溫度가  $T_w$ 로 一定하고 圓筒 半徑이  $r_w$ , 圓筒 壁面의 表面放射率이  $\epsilon_w$ 인 垂直圓管 周圍의 溫度가  $T_\infty$ 이며 輻射에 대하여 吸收, 放射 하는 媒質이 있을 때 圓管 周圍의 對流에의 境界層의 支配方程式은 媒質 輻射에 관하여 洞媒質이고 層流 流動이라고 假定하면 境界層理論을 適用하여 다음과 같이 表現한다.

連續 方程式 (Continue Equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

運動量 方程式 (Momentum Equation)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty) \quad (2)$$

에너지 方程式 (Energy Equation)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = a \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho C_p} \nabla q' \quad (3)$$

위의 支配方程式(Govern Equation)이 滿足 해야 할 境界條件은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r=r_w, \quad u=v=0, \quad T=T_w, \\ r \rightarrow \infty, \quad u=v=0, \quad T=T_\infty \end{aligned} \quad (4)$$

또한 에너지 方程式의  $\nabla q'$ 은 다음과 같이 두개의 項으로 表現된다.

$$\nabla q' = \nabla_r q' + \nabla_x q'_x = \frac{\partial}{\partial r} (r q'_r) + \frac{\partial q'_x}{\partial x} \quad (5)$$

境界層內에서는 擴散項에 대해  $P_e$ 가 커지면 X方

向의 擴散項을 無視하는 것과 같이 輻射熱傳達到 관하여도 擴散近似法(Diffusion Approximation Method)을 사용하여 다음과 같은 條件하에서는 X 方向의 輻射熱流束의 微分項을 無視할 수 있음을 알 수가 있다.(Cess, 1964)

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \gg \frac{\partial q'_x}{\partial x} \quad (6)$$

여기서 그 대략적인 크기는

$$\begin{aligned} u \frac{\partial T}{\partial x} &\sim U_0 (T_w - T_\infty) \frac{1}{X} \\ \frac{\partial q'_x}{\partial x} &\sim \frac{16\sigma T_w^3}{3k} (T_w - T_\infty) \frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad (7)$$

되어 이들 세 式으로부터

$$\frac{U_0 X}{16\sigma T_w^3 / 3K\rho C_p} \gg 1 \quad (8)$$

을 얻는다. 식(9)이 滿足되면 X 方向의 輻射熱傳達到 無視될 수 있다. 이와 같은 條件은 擴散近似法에서 도출된 것이므로 光學두께가 두꺼운 경우에 限하여 適用되나 境界層領域 全體에 대하여 適用하기로 한다. 이와 같은 近似는 Venkateshen & Krishanprassd(1979)의 발표자료에 의하여 比較分析하면 境界層內의 輻射熱傳達到의 影響을 고려한 次元解析에서 X 方向의 輻射熱傳達到는 境界層 全領域에서 無視될 수 있음을 알 수 있다. 이와 같은 假定을 適用하면 式(3)은 다음과 같이 擴散項이 半徑 方向으로만 表現됨을 알 수 있다.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = a \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho C_p} \nabla q' \quad (9)$$

### 2.2 輻射 熱傳達 方程式(RTE)의 構成

輻射에 대하여 吸收(Absorption), 放射(Emission)하는 媒質의 形式解의 RTE는 다음과 같다 (Özisik, 1973).

$$\nabla \tau_s \cdot [\Omega I(\hat{\tau}_s, \hat{\Omega})] + I(\hat{\tau}_s, \hat{\Omega}) = I_b(\hat{\tau}_s) \quad (10)$$

식(10)의 양변을 立體角  $\hat{\Omega} (=4\pi)$ 에 대하여 積分하고 X 方向의 輻射熱流速의 變化를 無視하면 다음과 같은 式을 얻는다.

$$\nabla \tau q' = [4\rho I_b(\tau) - I_0(\tau)] \quad (11)$$

여기서  $\tau$ 와  $\tau_s$ 는 각각  $k_r$ 과  $kr_s$ 로 定義 되는 光學 座標系이고,  $I_b$ 와  $I_0$ 는 黑體 輻射強度, 0次 輻射強度 모우멘트로 다음과 같이 定義한다.

$$I_b(\tau) = \frac{\text{on}^{\circ} T^4(\tau)}{\pi} \quad (12)$$

따라서  $I_b$ 와  $I_0$ 을 구하여 이 값을 에너지 方程式에 代入하면 境界層 方程式을 解析 할 수 있다. 式(10)을 積分 因子를 使用하여 積分하면 다음式을 얻는다.

$$I((\hat{\tau}_s, \hat{\Omega})) = I_w(\hat{\tau}_{sw})e^{-\tau_s} + \int_{\hat{\tau}_{sw}}^{\hat{\tau}_s} I_b(\hat{\tau}_s) e^{-(\hat{\tau}_s - \hat{\tau}_s)} d\hat{\tau}_s \quad (13)$$

壁面 部分은 擴散 的으로 放射(Emission) 및 反射(Reflection) 한다고 假定한다. 여기서  $I_w(\hat{\tau}_{sw})$ 는 境界面에서 輻射強度 이고  $I_b(\hat{\tau}_{sw})$ 는 無限 境界面에서 輻射強度가 通過하는 임의의 點에서의 輻射強度이다. 輻射強度를 式(13)에 形相을 고려하여 1次元 圓筒座標系로 나타내면 다음과 같다.

$$1) -\phi^*(\tau) < \phi < \phi^*(\tau) \\ I(\tau, \phi, \theta) = I_w(\tau_w) f_1(\tau, \tau_w, \phi, \theta) + \int_{\tau_w}^{\tau} I_b(\hat{\tau}) f_1(\tau, \tau', \phi, \theta) f_3(\tau, \tau', \phi, \theta) \frac{1}{\sin \theta} d\tau' \quad (14)$$

$$2) \phi^*(\tau) < \phi < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi - \phi^*(\tau) \\ I(\tau, \phi, \theta) = I_w(\tau_w) f_2(\tau, \tau_w, \phi, \theta) + \int_{\tau_w}^{\tau} I_b(\tau') [f_1(\tau, \tau', \phi, \theta) + f_2(\tau, \tau', \phi, \theta) f_3(\tau, \tau', \phi, \theta)] \frac{1}{\sin \theta} d\tau' \quad (15)$$

$$3) \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2} \\ I(\tau, \phi, \theta) = I_w(\tau_w) f_2(\tau, \tau_w, \phi, \theta) + \int_{\tau_w}^{\tau} I_b(\tau') f_2(\tau, \tau', \phi, \theta) f_3(\tau, \tau', \phi, \theta) \frac{1}{\sin \theta} d\tau' \quad (16)$$

### 2.2.1 境界面에서의 輻射強度

위에서 구한 形式解에서 境界面에서의 輻射強度는 圓筒의 壁面이 擴散 的으로 放射 및 反射하고

無限境界는 黑體라고 假定하면 壁面을 出發하는 輻射強度는 壁面에서 反射된 輻射強度와 壁面에서 放射된 輻射強度의 總으로 나타나서 다음과 같이 表現 할 수 있다.

$$I_w(\tau_{sw}, \hat{\Omega}) = \epsilon_w I_{bw}(\hat{\tau}_{sw}) + (1 - \epsilon_w) \frac{\int_{CB1, CB2} I(\hat{\tau}_{sw}, \hat{\Omega}) \cos \phi \sin \theta d\hat{\Omega}}{\int_{CB1, CB2} I \cos \phi \sin \theta d\hat{\Omega}} \quad (17)$$

여기서 CB1, CB2는 각각 圓筒 壁面과 無限 境界面에 해당하는 積分 區間으로 CB1은  $\theta$ 가  $0 \sim \pi$ ,  $\phi$ 는  $\frac{3\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$  사이의 區間이고, CB2는  $\theta$ 가  $0 \sim \pi$ ,  $\phi$ 는  $\frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}$  사이의 區間이다. 境界面에서 輻射強度를 1次元 輻射強度로 表現 하면 다음과 같다.

1) 壁面( $\tau = \tau_w$ )

$$I_w = \epsilon_w I_b(\tau_w) - \frac{4}{\pi} (1 - \epsilon_w) [I_b(\tau_w)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f_2(\tau_w, \tau_w, \phi, \theta) \cos \phi \sin^2 \theta d\phi d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\tau_w}^{\tau} I_b(\tau') f_2(\tau_w, \tau', \phi, \theta) \cos \phi \sin \theta d\tau' d\phi d\theta \quad (18)$$

2) 無限 境界( $\tau = \tau_{\infty}$ )

$$I_{\infty}(\tau_{\infty}) = I_b(\tau_{\infty}) \quad (19)$$

위의 式을 利用하여  $\nabla \tau q'_r$ 을 구할 수 있다.

### 2.3 球面調和 近似法(Spherical Harmonics Method : P-N 近似法)

1次元 軸對稱 輻射強度의 경우 軸둘레를 돌며 對稱이고 X軸에 대하여도 對稱이므로 반경방향 座標系  $r$ 과 等位角  $\theta$ , 方位角  $\phi$  만의 函數이다 이와 같은 條件을 導入하여 輻射열전달 方程式을 圓筒 座標系로 表示하면 다음과 같다.

$$\sin \theta \frac{\partial I(\tau, \theta, \phi)}{\partial \tau} - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \theta, \phi)}{\partial \phi} + I(\tau, \theta, \phi) = I_b(\tau) \quad (20)$$

輻射強度에 관련된 式들을 解析 的으로 구하기란 매우 어렵다. 따라서 이러한 難點을 극복하기 위해서 球面調和 近似法을 導入하여 輻射強度를 表

現하면 解析이 可能하게 된다. 輻射強度를 球面調和函數로서 表現하면 다음과 같다.

$$I(\hat{\tau}_s, \hat{\Omega}) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m(\hat{\tau}_s) Y_n^m(\hat{\Omega}) \quad (21)$$

여기서  $A_n^m(\hat{\tau}_s)$ 은 係數이고  $Y_n^m(\hat{\Omega}_s)$ 는 Associated Legendre 函數  $P_n^{(m)}(\cos \phi)$ 에 의하여 表現되는 球調和 函數로서 다음과 같이 定義된다.

$$Y_n^m(\hat{\Omega}) = (-1)^{\frac{(m+|n|)}{2}} \left[ \frac{2n+1(n!m!)}{4\pi(n!m!)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{im\phi} p_n^{(m)}(\cos \theta) \quad (22)$$

그리고 球面調和函數의 共扼複素 函數는

$$Y_m^{n*}(\hat{\Omega}) = (-1)^m Y_n^{-m}(\hat{\Omega}) \quad (23)$$

$$\int_{4\pi} Y_n^m(\hat{\Omega}) Y_l^k(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \delta_{nl} \delta_{mk} \quad (24)$$

여기서  $\delta$ 는 Kronecker delta 函數이다. 式 (25)에서  $n$ 의 最大값  $N$ 을 취하는 것이 誤差를 克服하는 지표가 된다. 따라서  $N \rightarrow \infty$ 이면 形式解와 매우 近接한 解를 얻을 수 있다.  $N$ 를 어떠한 값으로 취하느냐 따라 球調和근사법을  $P-N$  近似法이라고 하고,  $N+1$  Point Gauss - Method와도 一致한다.  $N$ 이 짝수이면 Gauss Point가 0 이 되어 輻射強度의 連續성이 없어지므로  $N$ 은 홀수만을 취해야 한다. 이번 研究에서는  $P-1, P-3$  近似法을 사용하였다.

$A_n^m(\hat{\tau}_s)$ 를 구하기 위하여 式 (24)의 양변에 公역 복소 函數를 곱하고 積分하여 정리하면 다음과 같이 表現된다.

$$A_n^m(\hat{\tau}_s) = \int_{4\pi} (-1)^m Y_n^m(\hat{\Omega}) I(\hat{\tau}_s, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (25)$$

$P-1$  近似法의 係數는 4이고,  $P-3$  近似法의 係數는 16이 된다.

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = 1 \quad (26)$$

그리고 式(26)과 0次輻射強度 모우멘트의 定義로부터 2次 모우멘트의 關係式을 얻을 수 있다. 그리고 圓筒이 對稱이므로 다음과 같다.

$$I_0 = \sum_{i=1}^3 I_{ii} \quad I_0 = \sum_{i=1}^3 I_{2ii} \quad (27)$$

$$I_i = I_{2i} = I_{22i} = I_{iii} = I_{ij} = 0 \quad (i = 2, J = 2)$$

각각의 係數를 式(26)에 代入하면  $P-1, P-3$  近似法의 輻射強度는 다음과 같다. 구조화 근사법으로 얻어진 近似式의 解를 구하기 위하여 주로 사용하는 境界條件은 Mark의 境界조건과 Marshak의 境界條件이다. Marshak의 境界條件은 壁面을 출발하는 輻射強度를 각각 半球에 關하여 積分하고, 그 平均값을 취해서 사용하는 것으로 다음과 같이 유도된다.

$$\int_{CB_1CB_2} I(\hat{\tau}_s, \hat{\tau}) Y_{2n-1}^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \int_{CB_1CB_2} I_w(\hat{\tau}_s, \hat{\tau}) Y_{2n-1}^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (28)$$

$P-1$  近似法의 境界條件

i) 壁面에 대하여

$$I_0 - \frac{2}{3}(1 + \lambda_w) \frac{dI_0}{d\tau} = 4\pi I_{bw} \quad (29)$$

ii) 無限 境界面에 대하여

$$I_0 + \frac{2}{3} \frac{dI_0}{d\tau} = 4\pi I_b \quad (30)$$

$P-3$  近似法의 境界條件

i) 壁面에 대하여

$$3I_0 + 15I_{22} + 16(1 + 2\lambda_w)I_2 = 32\pi I_{bw} - (2 + 5\lambda_w)I_0 + 16\lambda_w I_2 + 15(2 + \lambda_w) I_{222} + 32(1 + \lambda_w) I_{22} = 32\pi I_{bw} \quad (31)$$

$$- (2 + 5\lambda_w)I_0 + 16\lambda_w I_2 + 64(1 + \lambda_w)I_{112} + 20(1 + \lambda_w)I_{11} + (10 - 5\lambda_w)I_{22} = 32\pi I_{bw} \quad (32)$$

$$5I_{13} - 16I_{123} = 0 \quad (33)$$

ii) 無限 境界面에 대하여

$$3I_0 + 15I_{22} - 16I_2 = 32\pi I_{b\infty} \quad (34)$$

$$- 2I_0 + 30I_{22} - 32I_{222} = 32\pi I_{b\infty} \quad (35)$$

$$- 2I_0 + 64I_{112} + 20I_{11} + 10I_{22} = 32\pi I_{b\infty} \quad (36)$$

$$5I_{13} - 16I_{123} = 0 \quad (37)$$

### 2.4 無次元變數 構成

比相似境界層方程式에 표현될 다음과 같은 몇 가지 無次元 變數들을 定義한다.

無次元 獨立變數

$$\eta = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{r^2 - r_w^2}{2r_w}$$

$$\xi = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{2x}{r_w} \quad (38)$$

無次元 輻射強度 모우멘트

$$G_0 = \frac{I}{4on^2 T_w^4} \quad G = \frac{I}{4on^2 T_w^4} \dots \quad (39)$$

無次元 獨立 變數와 半徑 方向의 光學座標系 사이에는 다음과 같은 關係가 成立한다.

$$\xi\eta + 1 = \left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^2 \quad (40)$$

이들 無次元 獨立變數와 流動函數는 Minkowycz 와 Sparrow가 사용한 것들과 동일하며 境界층의 두께가 얇으면  $\frac{(r^2 - r_w^2)}{2r_w} \approx r - r_w$ 가 되어  $\eta$ 는 平板의 無次元 相似 獨立變數와 동일하다.  $\xi$ 는 X 座標의 變形 比相似 獨立變數로 次元 解析에 의하면  $\delta \sim X / \left(\frac{r^2 - r_w^2}{2r_w}\right)$  이므로 境界層 두께와 圓筒半徑의 비에 비례하는 값이 되어  $\xi$ 가 增加할수록 境界層의 두께가 증가함을 예측 할 수 있다. 輻射熱傳達과 傳導熱傳達の 關係를 次元 解析으로 考察하면 特性 光學 두께가 두꺼운 경우는 傳導 - 輻射 - 熱量 比가 Stark수에만 비례하지만 特性 光學 두께가 얇으면 傳導 - 輻射 열량비는 Stark에 비례 할 뿐만 아니라 特性 光學 두께의 제곱에 비례하는 特性을 갖는다. 그러므로 特性 光學 두께가 아주얇으면 媒質의 輻射熱傳達을 無視하기도 한다.

### 2.4 無次元 變數를 利用한 比相似 境界層方程式의 構成 및 境界條件

次元 解析으로 유도한 無次元獨立變數와 函數들을 이용하여 支配方程式과 境界條件을 표현하면 다음과 같다.

運動量 方程式

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 + \eta \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] + 3F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\theta - \theta}{1 - \theta}$$

$$= \zeta \left( \frac{\partial F \partial^2 F}{\partial \eta \partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 F \partial F}{\partial \eta^2 \partial \zeta} \right) \quad (41)$$

에너지 方程式

$$\frac{1}{\partial Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 + \eta \zeta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] + 3F \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$= \zeta \left( \frac{\partial F \partial \theta}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial F \partial F}{\partial \eta \partial \zeta} \right) + \frac{\zeta \tau^2}{4 Pr St} (\theta^4 - G_0) \quad (42)$$

境界條件

$$\eta = 0 \text{ 이면 } F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \theta = 1$$

$$\eta = 0 \text{ 이면 } F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \theta = \theta_\infty \quad (43)$$

### 3. 數值解析

본 研究에서 사용한 數值解析 方法은 운동량 方程式에 대하여 Keller & Cebeci(1977)의 方法을 사용하였고, 에너지 方程式은 TDMA를 사용하였다. 輻射熱傳達の 方程式은 形式解의 경우 Gauss Quadrature 방법(Ferziger, 1981)를 사용하여 積分하였고, P-N 근사법은 중앙 차분에 의하여 差分植을 유도한 후 TDMA를 사용하였다. 特異점을 계산하기 위하여 溫度場의 初期값을 2次式으로 주어진다. 3次 微分 方程式인 運動量糧 方程式을  $\eta$ 에 대비하여 1次 微分式인 새로운 函數를 導入하여

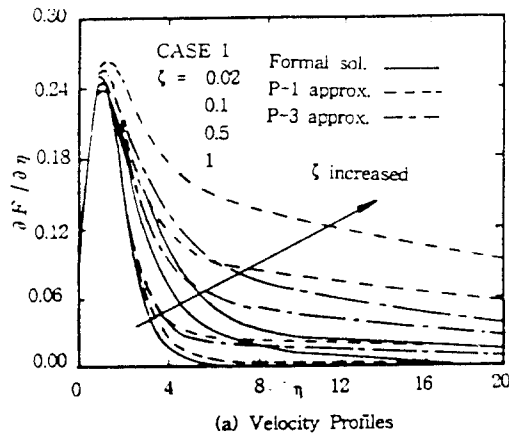
Table 1. Cases of Calculation

CASES	St	Pr	$\tau_w$	$\epsilon_w$
CASE 1	0.001	1	0.01	0.5
CASE 2	0.01	1	0.01	0.5
CASE 3	0.1	1	0.01	0.5
CASE 4	0.001	1	0.01	0.5
CASE 5	0.001	1	0.01	0.5
CASE 6	0.001	1	0.02	0.5
CASE 7	0.001	1	0.05	0.5
CASE 8	$\infty$	1	0.01	1.0

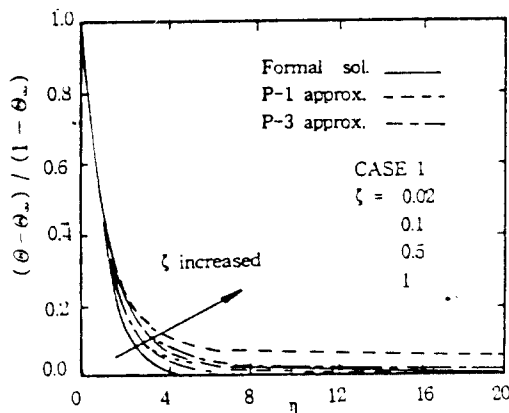
한변의 길이가  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\xi$ 인 直四角形 격자에 대하여 中央差分法으로 差分化 한 후 Newton方法을 이용하여 계산한다. 形式解를 計算할때는 Gauss Quadrature의 占(Point)數를  $\phi$ ,  $\theta$ 에 관하여 6개,  $\eta$ 에 관하여는 10개를 취하였다.

#### 4. 結果에 대한 考察

Fig. 1는  $\xi$ 가 증가함에 따라 境界層의 두께는 두꺼워지고 形式解의 경우 無次元 最高 速度는 감소한다. 境界층의 선단부의  $\xi$ 가 작은 곳에서는 境界층의 두께가 얇고 溫度勾配가 없는 영역이 대부분이다. 이 領域에서 輻射를 吸收하기 시작하고 이 影響이  $\xi$ 가 증가함에 따라 溫度勾配를 증가시켜서



(a) Velocity Profiles



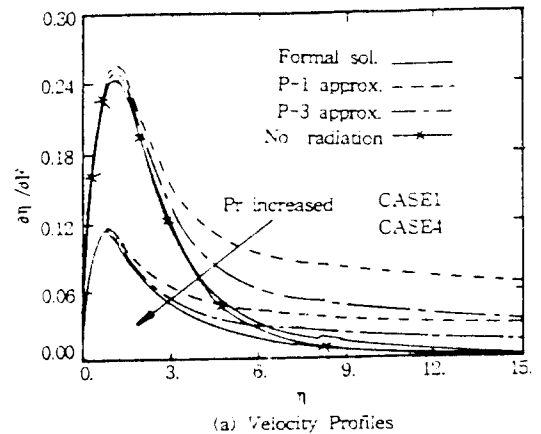
(b) Temperature Profiles

Fig. 1 Dimensionless velocity and temperature profiles with the variation of dimensionless variable,  $\zeta$

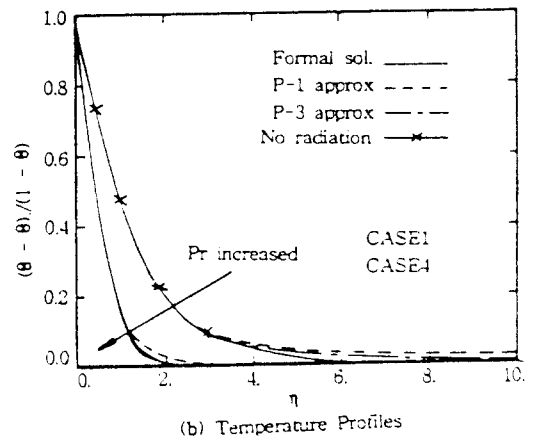
매질은 輻射에 대하여 흡수할 뿐만이 아니라 放射도 하게된다. 이로 인하여 壁面에 대한 溫度勾配는 增加하고 壁面에서 멀리 떨어진 곳까지 輻射의 영향이 전달되어 均일한 온도 分布를 갖는 輻射 境界層이 넓게 形成된다.

Fig. 2는 Pr이 커지면 境界층의 두께가 얇아지며 最高速度도 줄어들고 壁面의 溫度勾配는 增加한다. Pr이 증가하면 壁面에서의 정착 條件에 의한 摩擦運動量이 매질의 粘性의 熱擴散 係數에 대한 比의 增加로 인하여 더 멀리까지 영향을 미쳐 速度境界層의 두께는 溫度境界層에 비하여 매우 두꺼워진다.

Fig. 3은 St가 減少하면 境界層의 두께는 두꺼워지고 壁面의 온도구배는 增加한다.



(a) Velocity Profiles



(b) Temperature Profiles

Fig. 2 Dimensionless velocity and temperature profiles with the variation of prandtl number, Pr(z=0.5)

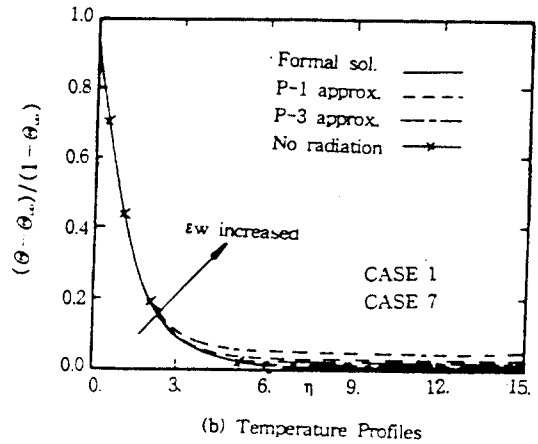
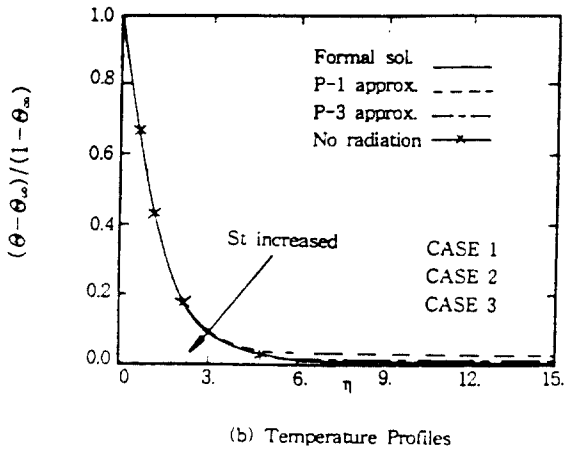
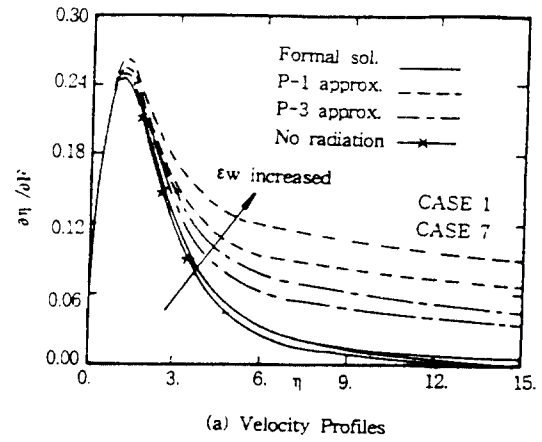
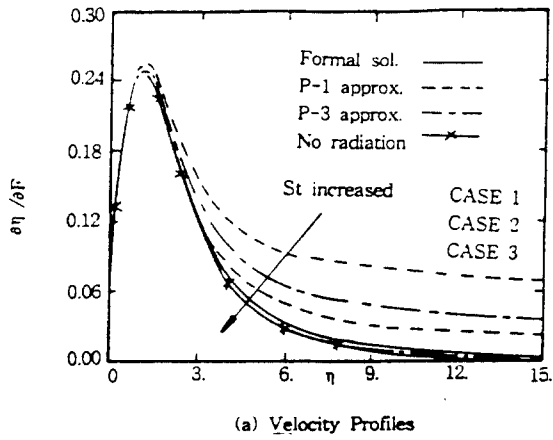


Fig. 3 Dimensionless velocity and temperature profiles with the variation of stark number,  $St(N=0.5)$

Fig. 4 Dimensionless velocity and temperature profiles with the variation of wall emissivity,  $\epsilon w(\zeta=0.5)$

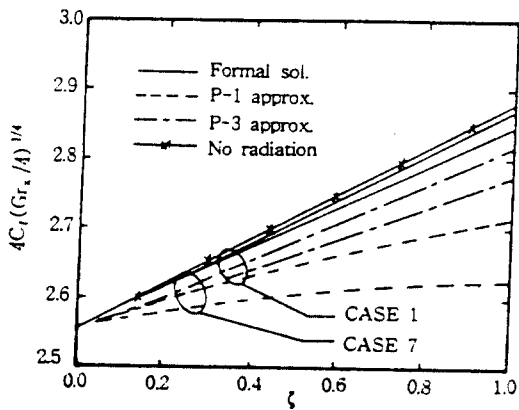


Fig. 5 Effect of wall emissivity on local friction coefficient

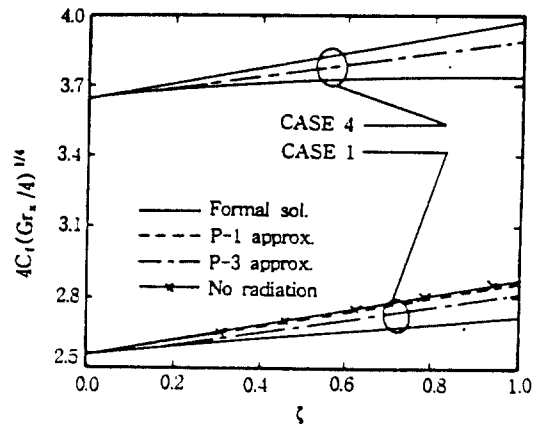


Fig. 6 Effect of prandtl number on local friction coefficient



Fig. 4는 壁面의 表面방사율이 크면 輻射의 影響이 壁面에서 멀리 떨어진 곳 까지 크게 미침을 볼 수 있다.

Fig. 5는 벽면의 表面放射率이 增加하면 摩擦係數는 減少하는데 이는 表面放射率이 增加하면 輻射의 影響이 커져서 最高速度가 增加하기 때문이다.

Fig. 6은 Pr이 커지면 마찰계수도 增加한다. 이것은 Pr이 增加하면 媒質의 粘性 增加로 最高速度와 壁面에서의 구배가 모두 減少하지만 最高速度의 減少가 더욱 크게 影響을 미치게 때문이다.

Fig. 7은 St가 減少하면 Nusselt수는 增加한다. 이는 傳導-輻射의 熱量비가 壁面 근처에서는 St 뿐만이 아니라 光學 두께에도 支配를 받으므로 St

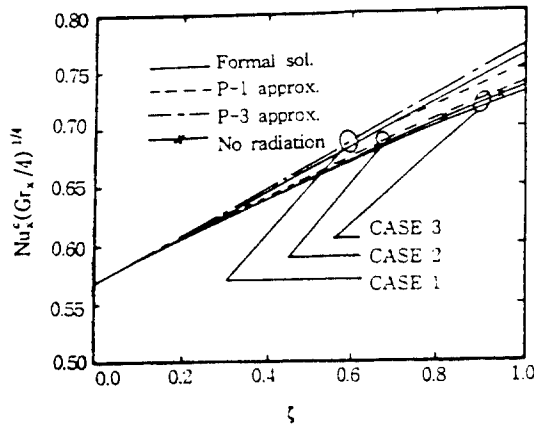


Fig. 7 Effect of stark number of conduction nusselt number

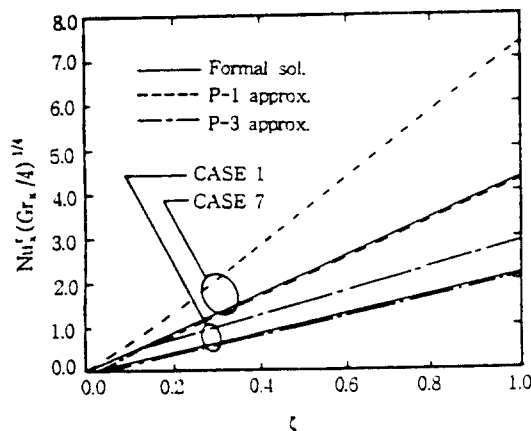


Fig. 8 Effect of wall emissivity on conduction local nusselt number

의 減少에 相對的으로 壁面에서의 傳導熱量도 增加하여야 하므로 壁面의 溫度勾配가 커지기 때문이다.

Fig. 8은 表面방사율이 增加하면 壁面에서의 輻射熱流束이 增加하여 壁面 근처 媒質의 溫度를 增加시켜서 벽면의 溫度勾配가 減少하고 傳導 Nusselt수는 減少한다. 全體적으로 傳導 Nusslet수는 \xi가 增加함에 따라서 增加하게 된다.

Fig. 9는 Pr의 變化에 따른 벽면의 輻射熱傳達의 影響은 거의 나타나지 않는다.

Fig. 10은 St의 감소는 복사 Nusselt 수의 增加를 가져온다.

Fig. 11은 無限 媒質에서는 媒質에 의하여 흡수 放射된 輻射熱量이 壁面에서 反射되어 放出되는

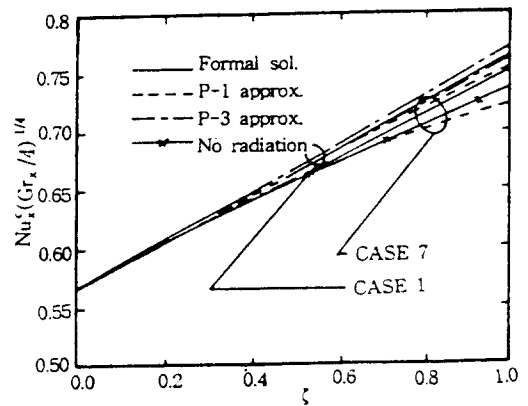


Fig. 9 Effect of stark number on radiation local nusselt number

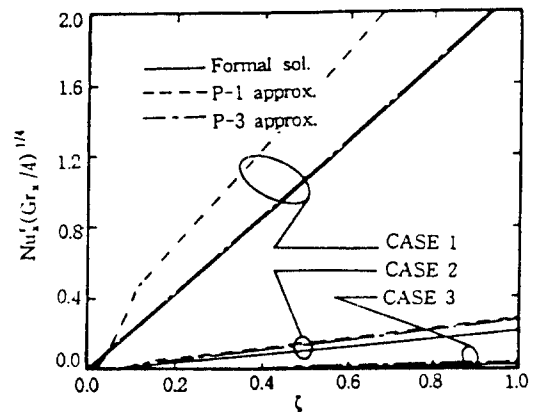


Fig. 10 Effect of wall emissivity on radiation local nusselt number

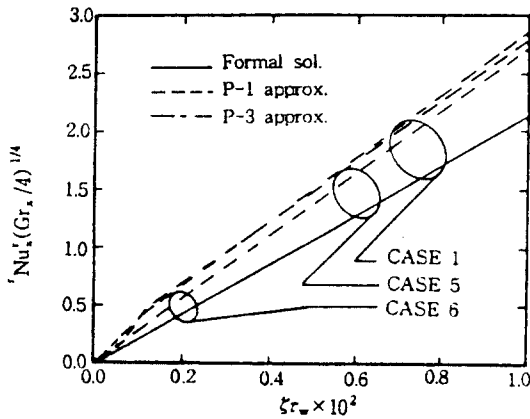


Fig. 11 Effect of optical radiation local nusselt number

輻射熱量 보다는 壁面의 黑體 복사에 의하여 放出되는 輻射熱量이 더 크게 작용하기 때문에 壁面의 表面 放射率이 클수록 복사 Nusselt수가 크게 나타난다.

### 5. 結 論

輻射에 대하여 吸收, 放射하는 媒質의 境界層은 크게 두 領域으로 나눌 수 있는데, 壁면에 인접한 부분은 溫度勾配가 크므로 傳導의 影響이 크게 나타나서 傳導, 輻射, 對流 등 3가지의 熱傳達 形式이 모두 存在하고, 輻射에 대하여는 構造的으로 光學 두께가 얇으므로 방사가 輻射의 熱傳達의 重要한 形式이 된다. Stark수(=N)가 減少하면 輻射의 影響이 增加하여 무차원 局所 摩擦係數는 減少하고 全體 Nusselt수가 增加하면 Stark수가 0.1 사이면 거의 투명한 媒質과 같은 特性을 갖는다. Pr의 變化에는 輻射熱傳達은 거의 影響을 받지 않으나, Pr과 St는 實際媒質인 경우는 함께 決定되는 因子이므로 매우 重要하다. 半徑의 變化는 境界層內 媒質의 輻射열전달의 影響을 반전 시키는 效果를 갖게 된다. 壁面의 表面放射率의 增加는 壁面의 黑體방사의 增加를 가져오고, 이로인하여 全體 熱傳達은 增加한다. 無限 媒質에서는 壁面의 放射輻射強度가 反射輻射強度보다 더 支配的으로 작용한다.

### 參考文獻

- 1) Audunson, T. & Gebhart, B. 1972 An experimental and analytical study of natural convection with appreciable thermal radiation effects. *J. Fluid Me* 52, part1.57 - 95
- 2) Bayazitoglu, Y. & Higney, J. 1979 Higher - order differential equations of radiative transfer : P - 3 approximation. *J. A. I. A.* 17, No. 4, 424 - 431.
- 3) Bejan, A. 1973 *Convection heat transfer*. John Wiley & Sons.
- 4) ebeci, T. & Bradshaw P. 1977 *Momentum transfer in boundary layers*. McGraw - hill.
- 5) Cess, R. D. 1964 Radiation effects upon boundary - layer flow of an absorbing gas. *J. Heat Transfer*, C86, 469 - 475.
- 6) Cheng, E. H. & Ozisik, M. N. 1972 Radiation with free convection in an absorbing, emitting and scattering medium. *Int. J. Heat Mass transfer*, 15, 1243 - 1252.
- 7) Dua, Shyam S. & Cheng. Ping 1975 Multi - dimensional radiative transfer in nonisothermal cylindrical media with non - isothermal boundary walls. *Int. Heat Transfer*, 18, 245 - 259.
- 8) England, W. G. & Emery, A. F. 1969 Thermal radiation effects on the lamin free convection boundary layer of an absorbing gas. *J. Heat Transfer*, 91. 37 - 44
- 9) Fernundes, R. & Francis, J. 1982 Combined conductive and radiative heat transfer in an absorbing, emitting and scattering cylindrical medium. *J. heat transfer*, 104, 594 - 601.
- 10) Ozisik, M. N. 1973 *Radiative transfert*. John Wiley & Sons.
- 11) Razel, A. C. & Howell, J. R. 1983 Two - Dimensional Radiation in Asorbing - Emitting Media Using the P - N Approximation. *Trans. ASME* 105.33 - 340