

不規則領域에서의 格子網 自動發生 프로그램의 開發

Development of an Automatic Mesh-Generation Program in Irregular Domains

金 星 熙* · 權 純 國**
Kim, Sung Hee · Kwun, Soon Kuk

Summary

In order to save time and efforts in generating finite element meshes in irregular boundaries of domains, it is needed to develop an automatic mesh-generator which can both promote the accuracy of solutions and reduce the run-time in operating finite element models.

In this study, the advancing front technique of triangular mesh generation and the transforming technique from triangular meshes to quadrilateral meshes were used to develop a computer program for the automatic triangular and quadrilateral meshes in the mixed shape. Furthermore, to enhance the quadrilateral mesh quality, the techniques of Laplacian smoothing and interior mesh modification were employed. The mesh generator was applied to evaluate its applicability to irregular and complex geometries such as Nakdong river bay.

It has been shown that the automatic mesh generator developed is capable of automatically generating meshes for irregular and complex geometries with high qualities of meshes and with the simple input data of arbitrarily specified nodal spacing in boundaries.

I. 서 론

유한요소법 적용시에는 필수적으로 해석모델을 유한개의 요소로 분할한 입력 자료, 즉 格子網을 작성하여야 한다. 유한요소법을 이용하여 문제의 해를 얻고자 할 때 가장 많은 노력과 시간이 요구되는 부분이 바로 요소 분

할 자료를 만드는 일이며 특히 간척공학에서 실무자들이 유한요소법을 기피하는 중요한 이유가 되고 있다.

일반적으로 유한요소법에서 사용되는 격자망은 요소의 형상면에서 볼 때 삼각형, 사각형, 삼·사각형혼합의 3가지 형태이다. 그러나 해안에서의 潮汐의 흐름을 취급하는 유체동력학

* 서울대학교 大學院

** 서울대학교 農業生命科學大學

키워드 : 격자망 자동발생, 유한요소모형, 점진적 내부절점 기법, 삼·사각형 혼합 격자망, 격자망 품질, 불규칙 영역 격자망

분야에서 해의 정확성 및 계산 수렴시간의 측면에서 볼 때 사각형 격자망이 삼각형 격자망보다 유리하지만 복잡한 불규칙 영역을 더욱 세밀하게 분할하는 능력면에서는 삼각형 격자망이 더 우수하므로 삼각형, 사각형이 각각 장·단점을 가지고 있다. 삼·사각형 혼합 격자망은 사각형 격자망 및 삼각형 격자망이 가지는 장점을 모두 지니고 있으나 기존의 프로그램은 대부분 규칙적인 영역에 대한 것으로서 불규칙적인 영역의 삼·사각형 혼합 격자망 발생 프로그램은 거의 없는 실정으므로 이에 대한 연구가 필요하다.

본 연구에서는 삼·사각형 혼합 격자망 자동 발생 프로그램을 개발하기 위해서 점진적 내부절점기법을 사용하여 삼각형 격자망을 1차 발생시키고, 2차로 사각형 격자망을 발생시키는 방법을 선택하였다. 사각형 격자망의 발생은 Zhu 등(1991)이 제시한 기법을 이용하였다. 이것은 기존의 삼각형 격자망 자동발생을 위해서 개발된 기법의 이점을 최대한 이용하여 이미 발생된 삼각형 요소에 대한 검사를 거쳐 해의 변화가 심하지 않은 부분에서는 동일한 공유면을 가지는 2개의 삼각형 요소를 조합하는 방법으로 사각형 요소를 발생시키는 기법이다. 두 삼각형의 조합으로 사각형을 발생시키는 기법은 처음부터 사각형을 발생시키는 방법에 비하여 요소의 品質(Quality)도 높을 뿐만 아니라 요소 크기의 변화도 자유롭게 설정할 수 있다.

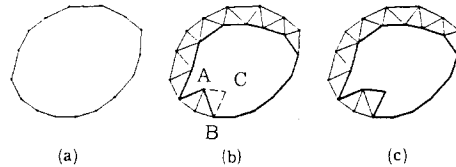
II. 격자망 자동발생 프로그램의 개발

1. 삼각형 요소 발생 알고리즘

가. 점진적 내부절점기법

점진적 내부절점기법 (Advancing Front Technique)은 삼각형 요소가 새로 생성될 때마다 기존의 선분은 요소발생첨단(Generation Front)에서 제외되고 새로 구성된 삼각형 요

소의 변이 요소발생첨단에 포함되도록 하는 기법이다. 여기서 요소발생첨단이라함은 Fig. 1에서와 같이 삼각형이 생성되어야 할 대상선분 AC , BC 를 말한다.



(a) At Start, Generation Front.
 (b) Triangle ABC is Being Constructed.
 (c) The Updated Front Including Triangle ABC.

Fig. 1. Renewal process of Generation Front

나. 절점 간격 및 요소 크기의 결정

요소의 크기는 주어진 영역 외곽의 경계 절점, $\{A_i, B_i, i=1, N\}$ 간의 간격에 의해 결정된다. 절점 $P(x,y)$ 에서의 절점 간격 ρ 는 식 (1)에 의해 계산한다.

$$\rho(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i}} \dots\dots\dots (1)$$

여기서 ρ_i 는 절점 A에서의 절점 간격이며, d_i 는 절점 P와 절점 A사이의 거리이다.

다. 삼각형 요소의 구성

1) 요소발생 첨단상의 절점 검색

요소발생첨단의 선분과 최적의 삼각형을 형성할 수 있는 요소발생첨단상의 절점을 식 (2)와 같은 조건하에서 검색한다.

여기서 A, B는 요소발생첨단 선분상의 절점이고, C는 요소발생첨단상의 다른 절점 들

$$(i) \quad C_i A \times C_i B > 0$$

$$(ii) \quad \begin{matrix} C_i A \cap \Gamma \in \{C_i A, \{C_i, A\}\} \text{ and} \\ C_i B \cap \Gamma \in \{C_i B, \{C_i, B\}\} \end{matrix} \dots\dots(2)$$

로서 삼각형 요소를 구성하기 위한 후보 절점이 된다.

2) 격자망 품질 평가 기준

격자망 품질 (Quality)은 해의 오차와 직접 관계되는 것으로 품질이 높다는 것은 요소를 구성하는 각 선분 길이의 차이가 작고, 인접 요소와의 크기 변화가 완만하다는 것을 의미하며 결과적으로 해의 오차를 줄일 수 있는 격자망을 말한다.

일정간격 절점에 대한 삼각형 요소의 品質 (Quality)은 다음 식 (3)에 의해 평가할 수 있다.⁸⁾

$$a(ABC) = 2\sqrt{3} \frac{\|AB \times AC\|}{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2} \dots (3)$$

여기서 a 는 삼각형 요소 ABC 의 형상을 평가하는 기준 값이고, $2\sqrt{3}$ 은 이등변 삼각형일 경우 a 값이 1로서 최대가 되도록 하는 상수이다. 요소의 크기가 변화하는 경우에는 식 (4)와 같은 또 다른 평가기준을 적용한다.

$$\beta = \lambda a \dots (4)$$

여기서 $\lambda = (s/\rho)(2 - s/\rho)$ 이며, 최적 절점 간격 ρ 에 대한 차이를 나타내는 값으로서 요소간격 s 가 ρ 와 같을 때 그 값이 1로서 최대가 되는 기준치이다.

3) 삼각형 요소의 품질향상을 위한 내부절점 생성

삼각형 요소의 품질을 향상시키기 위해 Fig. 2와 같이 선분 AB 에서의 거리 h 에 위치하는 새로운 내부절점 I 를 생성하도록 이를 위한 기준은 식 (5)와 같다.⁹⁾

$$\beta(ABI) = \frac{h}{H} \left(2 - \frac{h}{H} \right) \frac{2\sqrt{3}hd}{2h^2 + 1.5d^2} \dots (5)$$

여기서 h 는 삼각형 요소의 높이, d 는 삼각형 요소의 밑변의 길이, $H = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho$, $d = \|AB\|$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{k} \left(2 - \frac{\mu}{k} \right) \frac{\mu^2}{\mu^2 + 0.75}$, $\mu = \frac{h}{d}$, $k = \frac{H}{d}$ 이다.

이와 같은 과정을 요소발생 첨단상의 선분이 더 이상 존재하지 않을 때까지 반복한다. 요소발생이 완료되면 요소의 품질을 높이기 위한 절점 이동 즉, Smoothing과정이 수행된다.

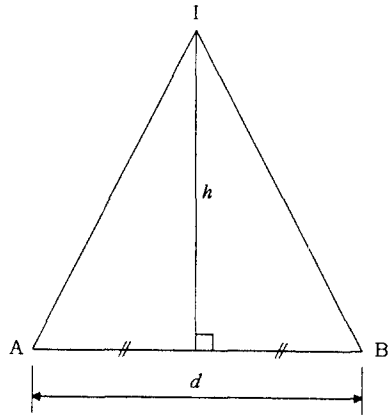
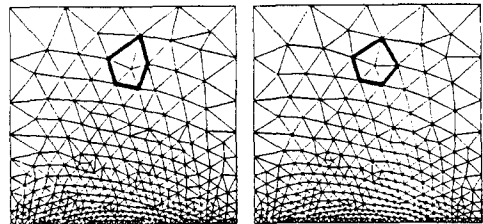


Fig. 2. Forming Triangular Element with Interior Node

4) 절점 이동

발생된 삼각형 격자망의 품질을 개선하기 위하여 Fig. 3에서 보는 바와 같이 삼각형으로 둘러싸여 이루어진 다각형의 중심에 어느 한



(a) Unsmoothed mesh (b) Smoothed mesh

Fig. 3. Comparison Unsmoothed Mesh with Smoothed Mesh

절점을 다각형의 중심에 가까운 위치로 이동시키는 Smoothing기법이 수행된다.

2. 사각형 요소 발생 알고리즘

가. 삼각형 요소에서 사각형 요소로의 변환

삼각형의 발생이 이루어진 뒤 삼각형 요소에 대한 Smoothing이 완료되면 사각형 요소로 변환시킬 삼각형 요소를 선택하게 된다. Fig. 4와 같이 삼각형 요소를 결합시켜 사각형 요소가 발생하게 된다.

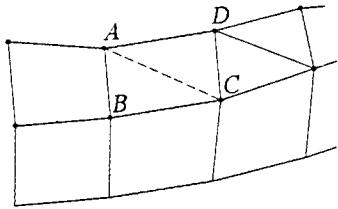


Fig. 4. Generation of Quadrilateral Element ABCD

나. 격자망의 품질개선

항상 품질 좋은 사각형 요소가 발생하는 것은 아니다. 특히 요소의 크기가 급변하는 곳에서는 더욱 그러하다. 본 연구에서는 격자망의 품질을 개선하기 위한 방법으로 절점을 재배치하는 Smoothing기법과 내부요소 수정기법 (Interior Mesh Modification Technique)을 사용한다.

1) 절점 재배치

삼각형 요소에서와 비슷한 방법으로 Smoothing과정이 수행된다. Smoothing과정에서 요소와 절점의 연결고리는 고정되어 있고 절점들은 개선된 품질을 가지기 위해서 재배치된다. 즉, 주변 요소에 의해 이루어진 다각형 (Polygon)의 중심에 각 내부절점이 위치하도록 절점을 재배치하는 방법이다.

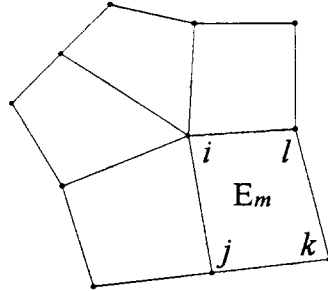


Fig. 5. Connecting Elements and their Nodes of internal Node

Fig. 5와 같이 내부절점 i 의 새로운 위치를 식 (6)에 의하여 구할 수 있다.⁵⁾

$$P_i = \frac{1}{4M} \sum_{m=1}^M (P_i + 2P_k + P_l) \dots\dots\dots (6)$$

여기서 P_i, P_j, P_k, P_l 는 Fig. 5에서와 같이 사각형 요소를 구성하는 절점, i, j, k, l 의 위치이고, M 은 절점 i 를 둘러싸고 있는 요소의 개수이다. 이 기법은 Laplacian Smoothing 기법을 기본으로 한 것으로 요소의 형상에 대한 품질을 개선시키는 데 아주 효과가 있다.

2) 내부요소 수정

내부요소 수정기법이란, 사각형 요소의 모양에 좋지 않는 영향을 끼치는 주변 요소, 절점, 선분에 대하여 절점 제거, 요소 제거, 대각선 이동, 선분 제거 등의 방법을 통하여 요소의 품질을 개선하는 기법이다. 또한 이 기법을 통해서 불필요한 요소를 제거함으로써 전체 요소의 수를 줄일 수도 있다.

내부절점에 대한 최적의 절점-요소 인접수 NE 는 4로 본다. 즉, 하나의 절점이 4개의 요소로 둘러싸일 경우를 말한다. 만약, $|NE-4| \geq 2$ 일 경우에는 주변 요소중의 어느 요소가 제거된다.

Fig. 6에서 보는 바와 같이 절점-요소 인접수 NE_A 가 2라면, 절점 A 는 제거되어 내부절점에 인접한 2개의 인접 요소는 1개의 요소로 감소된다.

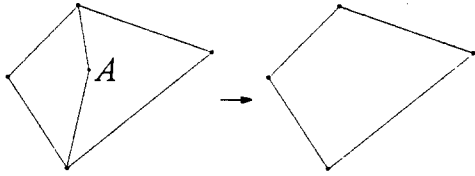


Fig. 6. Node Elimination

Fig. 7과 같은 경우 즉, 요소의 어느 한 대각선을 이루는 2개의 절점(또는, 내부절점) A, B 가 절점-요소 인접수 NE_A 가 3, NE_B 가 3일 경우 요소 E_i 는 제거된다.

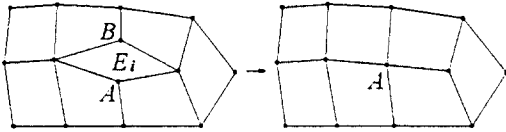


Fig. 7. Element Elimination

대각선이동의 과정은 2개의 내부절점을 연결하는 모든 요소의 선분에 대하여 수행된다. Fig. 8과 같이 서로 인접한 요소 E_i 와 E_j 를 구성하는 절점 A, F, D, B, E, C 로 이루어지는 육각형에서 선분 AB 에 대한 절점-요소 인접수가 식 (7)을 만족하면 대각선의 이동은 시작된다.

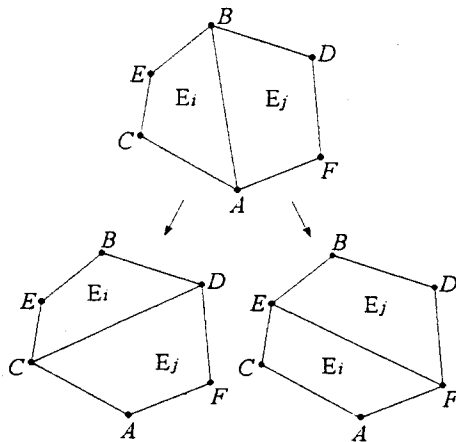


Fig. 8. Diagonal Swapping

$$NE_A + NE_B \geq 9 \dots\dots\dots (7)$$

$$(NE_A + NE_B) - (NE_C + NE_D) \geq \dots\dots\dots (8)$$

$$(NE_A + NE_B) - (NE_E + NE_F) \geq 3$$

$$(NE_A + NE_B) - (NE_E + NE_F) \geq \dots\dots\dots (9)$$

$$(NE_A + NE_B) - (NE_C + NE_D) \geq 3$$

만약, 식(8)의 조건이라면 대각선 AB 는 대각선 CD 로 이동되고, 식 (9)의 조건을 만족한다면 대각선은 EF 로 이동된다.

Fig. 9에서 보는 바와 같이, 절점 E, F 에서 절점-요소 인접수 NE_E 가 3, NE_F 가 3이고, 요소 E_i, E_j 가 경계 영역에 포함되는 선분을 가지지 않는다면 선분 EF 는 제거된다. 만약, 절점-요소 인접수가 식 (10)을 만족한다면 새로운 선분 AD 가 만들어지고, 그 반대의 조건이라면 새로운 선분은 BC 가 된다.

$$NE_A + NE_D \leq NE_B + NE_C \dots\dots\dots (10)$$

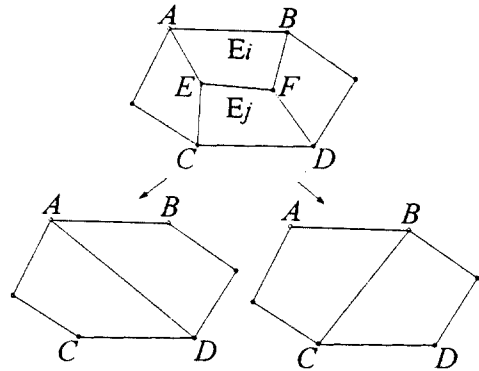


Fig. 9. Side Elimination

3. 삼사각형 혼합 격자망의 품질평가 기준

요소의 품질 q 는 식 (11)과 같이 계산된다.

$$q = \frac{\sum \text{Min}(d_1, \dots, d_n)}{\text{Max}(d_1, \dots, d_n)} / NE \dots\dots\dots (11)$$

여기서 q 는 요소 품질, d_n 는 요소를 구성하는 선분의 길이, NE 는 요소수이다.

요소의 형상이 정삼각형, 정사각형에 가까운

형상일수록 q 는 1에 가까운 값을 나타내게 된다.

4. 프로그램의 구성

본 연구에서 개발된 프로그램의 흐름도는 Fig. 10와 같이 구성되며 프로그램은 SUN-700 Series에서 실행하였다. 프로그램의 입력 데이터인 경계절점의 좌표는 내부에 발생될 요소 크기의 稠密에 따라 임의의 간격으로 선택하되, 영역의 외곽경계에서는 반시계방향 (Counterclockwise)으로 입력하며, 섬과 같은 영역내부의 경계에서는 시계방향 (Clockwise)으로 입력한다. 프로그램의 출력결과는 자동 발생된 격자망의 절점별 좌표 및 요소별 구성절점 번호이다. 격자망 자동발생 프로그램으로

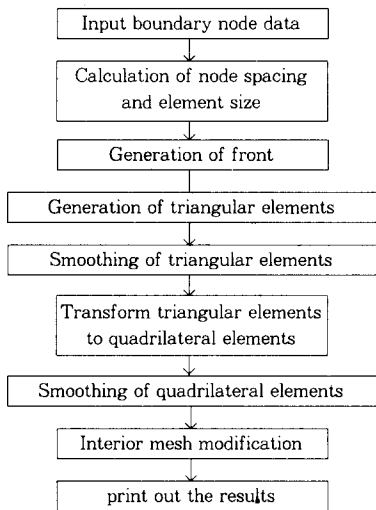


Fig. 10. Program Flow-Chart

부터 구한 格子網圖의 자료는 DXF (Drawing eXchange Format)파일로 전환한 후, Auto-CAD를 사용하여 출력하였다.

III. 프로그램의 적용 및 고찰

1. 대상 영역의 선정

본 연구에서 개발된 격자망 자동발생 프로그

램의 적용성을 검토하기 위하여 지형이 복잡한 낙동강 하구를 기본으로 하여 4가지 Type의 대상 영역을 구성하였다. 유한요소모형 적용시 해의 변화가 심할 것으로 예상되는 복잡한 구간 (섬, 해안선)은 절점간의 간격을 조밀하게 하였고 외해 쪽으로 갈수록 절점간의 간격을 크게 하였다. Type I은 섬을 가지지 않는 다소 단순한 형상이며, Type II는 Type I 보다 외곽 영역을 확장한 형상이다. Type III, Type IV는 Type II의 형상에 2-3개의 섬을 입력하여 보다 복잡한 영역의 형상을 가지도록 하였다. 영역 외곽의 경계 절점수는 Table-1과 같이 영역의 형상이 복잡할 수록 증가하고 있다.

Table-1. Number of Boundary Nodes in Domain

Type	I	II	III	IV
NB	753	768	981	1469

Note : NB=Number of Boundary nodes

2. 결과 및 고찰

선정한 4가지 유형의 대상 영역에 대하여 본 연구에서 개발된 격자망 자동발생 프로그램을 이용하여 삼각형 및 삼·사각형 혼합 격자망을 각각 발생시켰으며 이때 각 Type에 대한 삼각형 격자망과 삼·사각형 혼합격자망의 입력데이터인 경계선에서의 절점간격은 모두 동일하게 취하였다. Fig. 11의 삼각형 격자망 발생 결과와 Fig. 12의 삼·사각형 혼합격자망의 발생 결과에서 보는 바와 같이 외해면의 엉성한 절점간격의 경계선으로 부터 해안선의 조밀한 절점간격 사이에 점진적으로 요소의 크기가 변화하고 있음을 알 수 있다.

발생된 격자망의 요소수 및 격자수는 Table-2와 같다. 삼·사각형 혼합 격자망인 경우 절점의 수가 18% 내외로 감소하였으며 요소의 수는 43% 감소하였다. 이러한 결과로 볼 때 유한요소모형의 적용시 모형실행 시간을 상당히 줄일 수 있을 것으로 예상된다.

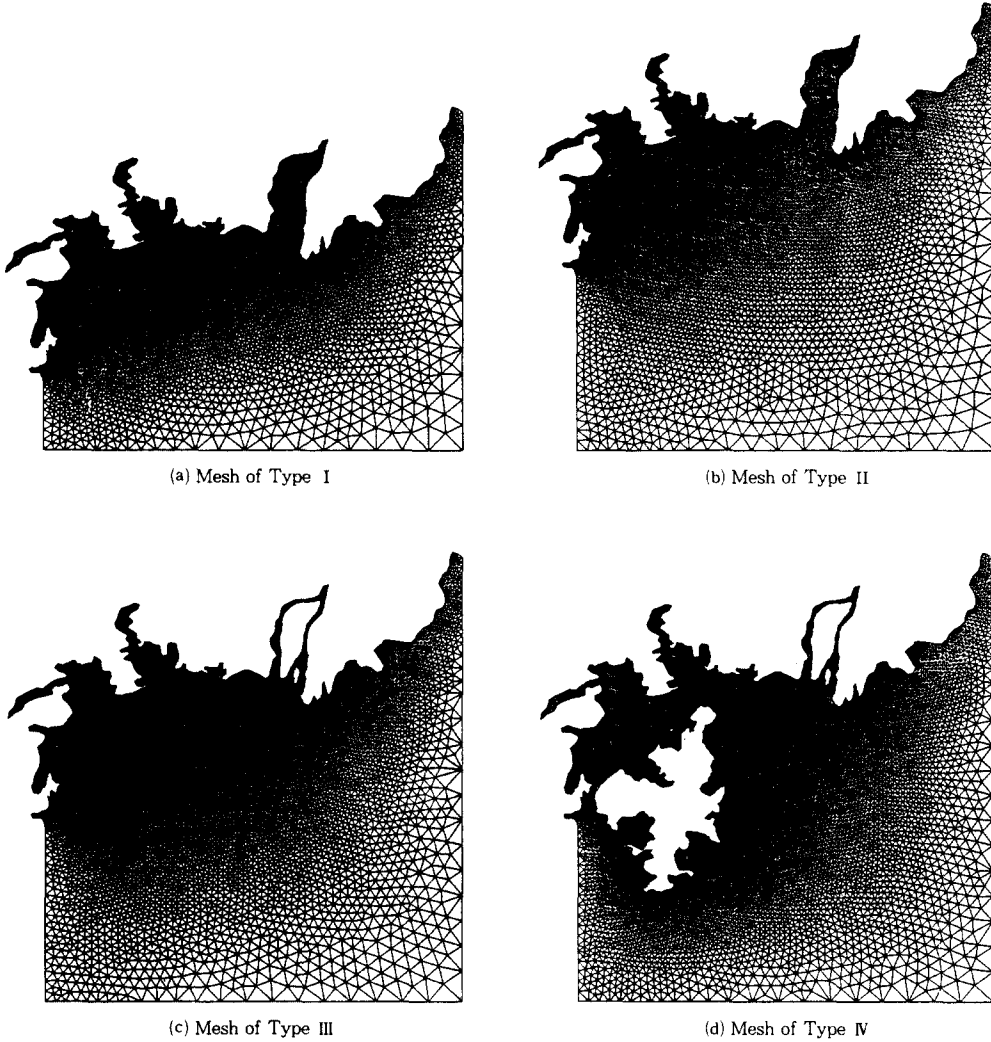


Fig. 11. Triangular Meshes Generated in the Domain

Table-2. Number of Nodes and Elements

	Triangular Meshes		Mixed shape Meshes	
	NN	NE	NN	NE
Type I (NB : 753)	6964	13173	5741	7485
Type II (NB : 768)	8416	16062	6926	9136
Type III (NB : 981)	10012	19045	8276	10769
Type N (NB : 1469)	13009	24553	10647	13906

Note : NB=Number of Boundary Nodes

NN=Number of Nodes

NE=Number of Elements

프로그램의 수행에 소요된 CPU시간은 Fig. 13과 같으며 요소 100개 발생당 평균 CPU소요시간은 삼각형 격자망 발생의 경우 1.44초, 삼·사각형 혼합 격자망 발생의 경우 3.04초로 나타났다.

식 (11)의 산정 방식으로 격자망의 품질을 평가하여 이를 그림으로 도시하면 Fig. 14와 같다. 격자망의 품질은 삼각형인 경우 약 0.98, 삼·사각형 혼합인 경우 약 0.97의 값을 보이고 있어 높은 품질의 격자망이 발생된다고 판단된다.

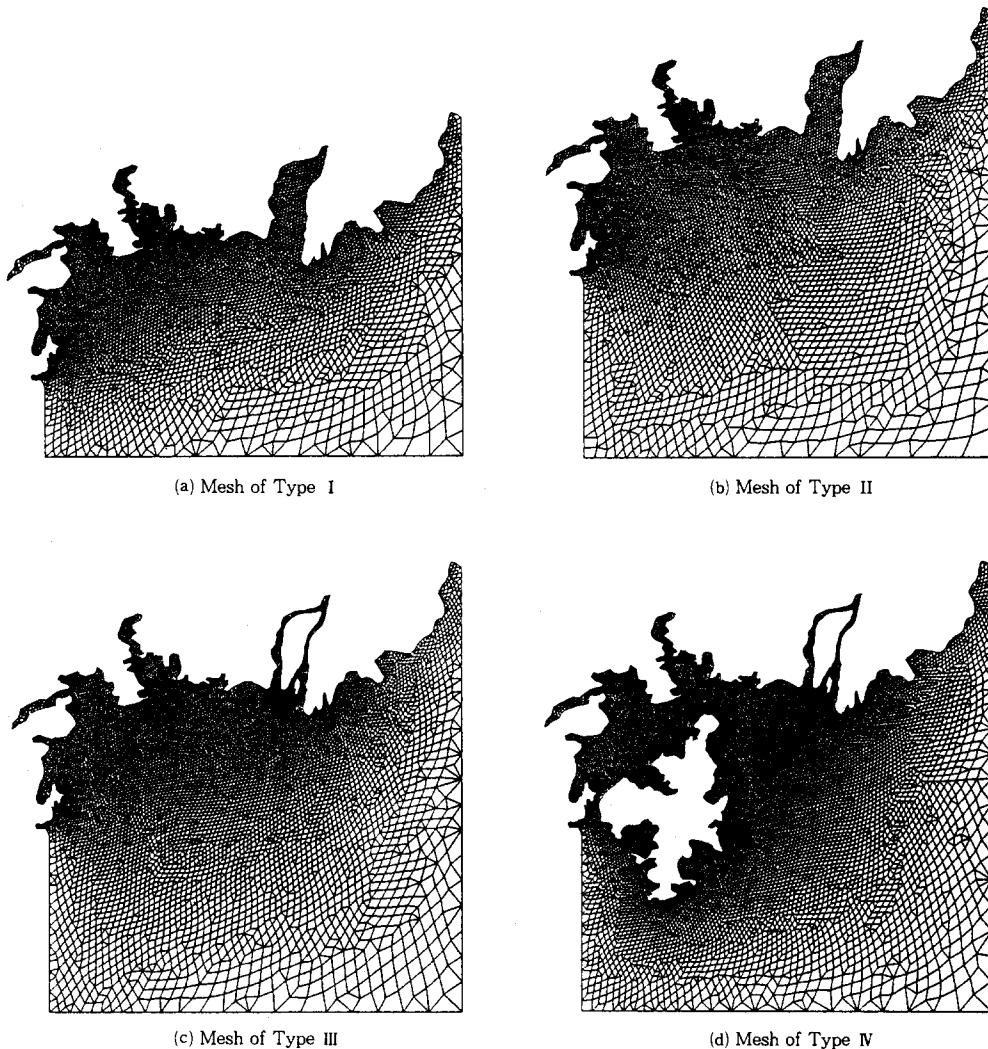


Fig. 12 Mixed Shape Meshes

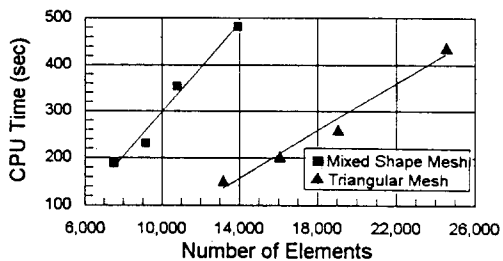


Fig. 13. Relationship between CPU Times and Number of Elements

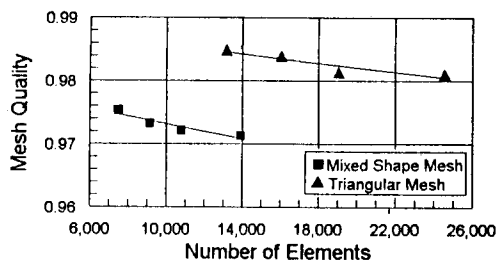


Fig. 14. Mesh Quality in Different Domains

IV. 요약 및 결론

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 미분방정식의 해를 얻고자 할 때 가장 많은 노력과 시간이 요구되는 격자망을 손쉽게 얻을 수 있으며 해의 정확성을 높이고 수렴시간을 향상시킬 수 있는 격자망 자동발생 프로그램을 개발하고, 이를 지형이 복잡한 낙동강 하구를 대상으로 한 임의의 영역에 대하여 그 적용성을 검토하였다.

연구내용 및 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 삼·사각형 혼합 자동요소분할 프로그램을 개발하기 위해서 점진적 내부절점기법을 사용하여 삼각형격자망을 1차 발생시키고, 2차로 두 삼각형의 조합으로 사각형 격자망을 발생시키는 방법을 선택하였다. 삼각형으로부터 사각형으로 변환하는 기법은 처음부터 사각형을 발생시키는 방법에 비하여 요소의品質도 높을 뿐만 아니라 요소 크기의 변화도 자유롭게 설정할 수 있음이 밝혀졌다.

2. 격자망 발생에 필요한 입력자료는 경계절점의 좌표만으로도 충족될 수 있어 본 연구에서 개발된 격자망 자동발생 프로그램은 이에 대한 특별한 지식이 없는 일반 사용자도 원하는 격자망을 쉽게 발생시킬 수 있다.

3. 자동발생된 격자망의 품질을 개선하기 위하여 절점 재배치 기법과 내부요소 수정기법을 사용하였다.

4. 4가지 유형의 대상 영역에 대한 삼·사각형 혼합 격자망은 삼각형 격자망의 절점의 수와 비교할 때 18% 내외로 감소하였으며 요소의 수는 약 43% 감소하였다. 격자망의 품질은 삼각형인 경우 약 0.98, 삼·사각형 혼합인 경우 약 0.97로 품질기준값 1에 가까운 값을 나타내고 있어 품질 높은 격자망이 발생되었다고 판단된다.

참 고 문 헌

1. 나정우, 권순국, 1994, 潮汐流動 解析을 위한 非線形 有限要素模型(I), 한국농공학회지, 제36권, 제3호, 144-154.
2. 농림수산부·농어촌진흥공사, 1994, 조류에 측 유한요소 수치모형 개발(III), 서울대학교 농업개발연구소.
3. Cavendish, J. C., D. A. Field and W. H. Frey, 1974, An Approach to Automatic Three Dimensional Finite Element Mesh Generation, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 21, 329-347.
4. Dhatt, G., A. Soulaïmani, Y. Ouellet and M. Fortin, 1986, Development of New Triangular Elements for Free Surface Flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 895-911.
5. Hermann, L. R., 1976, Laplacian-Isoparametric Grid Generation Scheme, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 102, 749-756.
6. Jin, H. and N. E. Wiberg, 1990, Two-Dimensional Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refinement, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 29, 1501-1526.
8. Lo, S. H., 1985, A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 21, 1403-1426.
9. Lo, S. H., 1992, Generation of High-Quality Gradation Finite Element Mesh, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 41, 191-202.
10. Wellford, J. L. C. and M. R. Gorman, 1988, A Finite Element Transitional Me-

- sh Generation Procedure Using Sweeping Functions, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 26, 2623-2643.
11. William, H. F and D. A. Field, 1991, Mesh Relaxation ; A New Technique for Improving Triangulations, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 31, 1111-1133.
 12. Zhu, J. Z., O. C. Zienkiewicz and E. Hinton, 1991, A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 32, 849-866.
 13. Zienkiewicz, O. C., 1971, An Automated Generation Schemen for Plane and Curved Surfaces by Isoparametric Coordinates, International Journal for Numerical Methods Engineering, Vol. 3, 519-538.
- (접수일자 : 1995년 1월 21일)