韓國經營科學會誌
第20卷 第2號
1995年 8月

수요가 판매가격에 종속적인 경우에 있어서 생산자 이익의 최대화를 위한 최적생산량과 외상기간 결정

김준식* · 문덕희** · 고창성***

Determination of Credit Period and Production Lot Size to Increase Producer's Profit with Price Dependent Demand Functions

Jun Sik Kim* · Dug Hee Moon** · Chang Sung Ko***

Abstract

This paper deals with the problem of determining optimal credit period and production lot size from the perspective of producer. We assume that a retailer jointly determines the unit retail price and order size to maximize profit when he/she purchases a product for which the producer offers a trade credit. Two widely used demand functions are adopted for the study in which demands are decreasing function of the retail price. Mathematical models for producer-retailer system are developed and a solution procedure is presented which shows how to achieve an optimal length of trade credit and production lot size for producer. The effect of production rate on the behavior of both producer and retailer is also investigated using an example.

1. 서 론

상품의 가격을 낮추어 줌으로써 상품 판매를 촉진시켜 이익을 증가시키기 위한 다양한 방법들이 있다. 이들 중에는 발주량이 커질수록 단가를 낮추어 주는 가격할인 전략이나, 판매한 상품의 대금 결제를 낮추어 줌으로써 실제적으로 가격할인을 해 주는 외상기간 허용전략등이 보편적으로 사용된다. 이러한 분야에 대해서

* 한국국방연구원 자원관리 연구부
** 창원대학교 산업공학과
*** 경성대학교 산업공학과

그동안 많은 연구논문들이 발표되어 왔다.

특히 외상기간을 허용함으로써 실제적인 가격할인을 유도하는 방법에 대해서도 많은 연구가 이루어졌는데, 이러한 과거의 연구들에서 사용되었던 의사결정기준은 평균비용(Average Cost)을 최소화시키는 것[2, 3, 5, 7]과 현금흐름의 할인법(Discounted Cash Flow)을 사용한 것[4, 9, 10]으로 크게 구분된다. Chapman [3], Goyal[5], Haley[7] 등은 자본의 대여금리(Lending Rate)와 대출금리(Borrowing Rate)가 같은 경우에 외상기간은 구매자의 발주량에 영향을 주지 못한다는 주장을 하였다. 그러나 상식적으로 생각할 때 외상기간의 허용은 재고비용의 감소를 가져오기 때문에 구매자의 경제적 발주량이 증가될 것이라는 유추를 할 수 있다. 이러한 관점에서 Chung[4], Rachamadugu[10]등은 다른 접근방법을 사용함으로써 구매자의 발주량은 공급자가 제시하는 외상기간의 길이에 대하여 증가함수임을 입증하였다. 하지만 대부분의 연구들은 상품의 공급자가 외상판매정책을 제시한 상황하에서 구매자의 최적구매정책을 결정하는 것들이다. 또한 공급자가 외상정책을 통하여 가격할인을 하더라도 구매자로부터 상품을 구입하는 최종소비자의 수요에는 변화가 없으므로 구매자의 연간 주문량에는 영향을 끼치지 못한다는 가정도 하고 있다.

공급자의 입장에서 보면 자신의 이익을 최대화시키기 위하여 구매자에게 제시할 외상기간을 얼마로 결정하느냐 하는 것은 중요한 관심사이다. 이 때 외상기간의 결정은 공급자 자신뿐만 아니라 구매자의 입장도 고려하여 결정해야 한다. 공급자 측면에서의 또다른 관심사는 자신의 생산정책을 어떻게 결정하는가 하는 문제이다. 수요-가격의 원리에 의하면 제품의 최종수요는 구매자가 일반 소비자에게 판매하는 가격의 함수형태로 발생한다고 볼 수 있다고 하는 것이 일반적인데, 이러한 경우에 외상기간을 줌으로써 가격할인을 통한 소비자의 수요변동이 공급자의 생산정책에 반영이 되어야 하며, 공급자의 입장에서는 자신의 이익을 최대화 시킬 수 있는 의사결정을 해야 한다.

김준식등[8]은 구매자의 구매요구가 있을 때마다 공급자가 구매자의 발주량 만큼 생산하는 Lot-for-Lot 정책을 사용하는 경우의 문제를 다루었다. 따라서 이 경우에는 공급자의 생산정책은 생산속도가 무한대라고 보아 구매요구 즉시 구매량을 납품하는 것으로 되어 있다. 이러한 가정은 공급자와 구매자가 각각 도매상과 소매상인 경우에는 타당하다. 그러나 요즈음처럼 유통단계를 최소화 하고 있는 시점에서는 생산자가 바로 공급자가 되는 경우가 많다. 따라서 공급자가 생산자인 경우 생산자 입장에서 볼 때 구매자의 주문에 대한 납품은 한순간에 이루어지더라도 생산자의 생산은 점진적으로 이루어 지는 것이 타당한 가정일 것이다. 특히 생산자 입장에서 생산준비비용이 재고유지비용에 비해 상대적으로 큰 경우에는 구매자의 1회 주문량의 몇배를 미리 생산하여 주문이 발생할 때마다 납품을 하는 것이 경제적일 수도 있다. 다시말하면 구매자의 1회 구매량이 Q라고 할 때, 생산자의 1회 생산량은 Q의 정수배인 LQ가 되어야 한다는 의미이다. 이러한 상황과 관련된 연구로는 Goyal[6]의 연구가 있다. 그는 주문량에 따른 직접적인 가격할인이 있는 상황하에서 구매자의 1회주문량이 Q일 때 공급자의 1회생산량을 Q의 정수배인 LQ로 하는 생산정책하에서 공급자측면에서의 문제를 다루었다. 그러나 역시 일반 소비자의 수요는 가격할인과는 무관하게 일정하며, 공급자의 생산속도

가 무한대라는 가정을 하고 있기 때문에 공급자가 생산자인 경우에는 적용에 어려움이 있다고 할 수 있다.

이 논문은 생산자-구매자-일반소비자로 구성되는 3단계 체계에서 생산자 입장에서 기대이익을 최대화 시킬 수 있는 최적의 외상기간과 생산정책을 결정하는 모형을 다룬 것이다. 이 모형의 기본적인 전제는 구매자가 최적 발주량을 결정하는 의사결정 시스템, 즉 구매자 입장에서 발생하는 소비자의 최종수요는 구매자가 결정하는 판매가격에 의해 변화하며, 이것을 고려하여 구매자는 자신의 이익을 최대화 시키는 판매가격과 발주량을 결정한다는 의사결정 방법의 내용을 생산자가 알고 있다는 것이다. 따라서 본 논문에서는 최종소비자의 수요가 구매자의 판매가격의 변동에 대해 선형(Linear Demand Function)으로 변하는 경우와 지수형(Constant Price Elasticity Function)으로 변하는 경우에 있어서 생산자의 생산율이 유한한 경우(EPQ형태)에 대해 각각 고려하였다. 2장에서는 김준식[8]등이 제시한 구매자 입장에서의 문제에 대하여 수요함수가 선형인 경우와 지수형인 경우에 대하여 살펴보았으며, 3장에서는 2장에서 제시한 구매자의 구매 및 가격정책을 토대로 생산자가 자신의 입장에서 생산정책과 외상허용기간을 결정하기 위한 모형을 정립하였고 해법절차를 제시하였으며, 4장에서는 수치예제를 통하여 본 연구의 타당성을 검토하였다.

2. 구매자 문제

본 논문의 전개를 위해 김준식등[8]의 논문에서 제시된 구매자의 의사결정과정에 대해 먼저 요약해 보기로 하겠다. 생산자가 제시하는 외상기간을 알고 있는 상황하에서 구매자는 자신의 이익을 최대화 시킬 수 있는 발주량과 판매가격을 다음과 같은 모형에 의해 결정한다. 이때 구매자의 재고관리 상황은 EOQ방식으로 가정하며, 제품의 품절은 허용하질 않는다.

이와 같은 상황하에서 구매자의 이익함수 $\Pi_r(P, Q)$은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi_r(P,\ Q) &= \text{총수입} - \text{재고유지비용} - \text{발주비용} - \text{자본비용} \\ &= D(P)(P-P_s) - \frac{Q}{2}I_r - \frac{D(P)}{Q}S_r + D(P)P_sC_rT_c \qquad (1)\end{aligned}$$

이때

S_r = 구매자의 발주비용,

H_r = 자본의 기회비용을 제외한 단위당 연간 재고유지비용,

C_r = 자본의 연간 기회비용율,

P_s = 구매자가 생산자로부터 구매하는 구매단가,

$I_r = H_r + P_sC_r$,

P = 구매자의 판매단가,

Q = 구매자의 경제적 발주량,

$D(P)$ = 구매자 입장에서의 연간 수요율함수,

T_c = 생산자가 제시한 외상기간

을 의미하는데 구매자의 의사결정변수는 판매단가 P와 최적발주량 Q이다. 식(1)의 마지막 항은 외상기간으로 인하여 구매자가 자신의 자본을 다른 곳에 투자함으로써 얻을 수 있는 자본의 기회비용 개념이다.

2.1 수요함수가 지수형인 경우 (The constant price elasticity demand function)

$\alpha(\alpha>0)$와 $\beta(\beta>1)$를 각각 수요함수의 형태를 규정하는 모수라고 할 때 수요함수는 $D_1(P)=\alpha P^{-\beta}$로 정의할 수 있다. 이 경우에 구매자의 이익함수는 식(2)와 같다.

$$\Pi_{r1}(P,\ Q)=\alpha P^{-\beta}\ \{P-P_s(1-C_rT_c)-\frac{S_r}{Q}\}\ -\ \frac{Q}{2}I \qquad (2)$$

이 문제가 성립하기 위해서는 $P-P_s(1-C_rT_c)-\frac{S_r}{Q}$ 값이 양수가 되어야만 한다. 따라서 $P>\gamma P_s+\frac{S_r}{Q}$의 조건식을 얻는다. 이때 $\gamma=1-C_rT_c$ 인데 일반적으로 C_r은 자본의 연간기회비용으로 1보다 작으며, 외상기간 T_c도 1년보다 작으므로 $0<\gamma<1$로 볼 수 있다.

식(2)에서 발주량 Q가 주어졌을 때 이익을 최대화 시키는 최적판매가격 $P=P_0$을 찾기 위해서는 이익함수가 가격 P에 대해 볼록함수인 경우 P에 대하여 1차미분($\partial\Pi_{r1}/\partial P=0$)을 하면 된다. 이익함수가 볼록함수가 되는 지의 여부는 ($\partial^2\Pi_{r1}/\partial P^2<0$)의 관계가 성립되는지로 판단할 수 있는데 두 미분식을 유도하여 보면 아래와 같다.

$$P_o\ =\ \frac{\beta}{\beta-1}\ \ (\gamma P_s\ +\ \frac{S_r}{Q}) \qquad (3)$$

$$P\ <\ \frac{\beta+1}{\beta-1}\ \ (\gamma P_s\ +\ \frac{S_r}{Q}) \qquad (4)$$

발주량 Q가 주어졌을 때 식(4)의 조건이 만족된다고 가정한다면 $\Pi_{r1}(P,\ Q)$은 P에 대해 볼록함수가 되며, $\Pi_{r1}(P,\ Q)$를 최대화시키는 최적판매가격은 P_o가 된다. 따라서 본 논문에서는 식(4)의 조건이 만족되는 상황에 대해서만 고려하기로 하겠다. 식(3)의 결과를 식(2)에 대입하면 이익함수 $\Pi_{r1}(P,\ Q)$는 발주량 Q만의 함수 $\Pi_1(Q)$가 되어 아래 식(5)와 같이 정리된다.

$$\Pi_1(Q)=\frac{\alpha}{\beta}\ \{\frac{\beta}{\beta-1}\ \ (\gamma P_s+\frac{S_r}{Q})\}^{1-\beta}-\frac{Q}{2}I_r \quad (5)$$

이때 $\Pi_1(Q)$의 함수형태는 Q에 대해 오목-볼록함수(Convex-concave function)가 되는데 식(6)에 의해 얻어지는 Q_o중에서 부분최적해를 구할 수 있다.

$$Q_o\ =\ \left[\frac{2\alpha S_r}{I_r}\ \{\frac{\beta}{\beta-1}\ \ (\gamma P_s+\frac{S_r}{Q_o})\}^{\beta}\right]^{1/2} \quad (6)$$

Abad[1]는 가격할인이 있는 경우에 최적해는 식(6)에 의해 얻어지는 해들중 가장 큰값에서 결정된다고 하는 것을 증명하였다.

2.2 수요함수가 선형인 경우 (The linear demand function)

판매가격에 따른 수요함수가 $D_2(P)=\alpha-\beta P$로서 P에 대해 선형식으로 표시된다고 하자. 이때 α, β는 각각 양의 상수이며, 수요가 양의 값을 가지기 위해서는 판매가격 P의 범위는 $P\le\frac{\alpha}{\beta}$가 되어야 한다. 앞에서와 마찬가지로 $\gamma=(1-C_rT_c)$라고 한다면 구매자의 이익함수는 아래 식으로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{r2}(P,\ Q)=(\alpha-\beta P)(P-\gamma P_s-\frac{S_r}{Q})-\frac{Q}{2}\ I_r \tag{7}$$

위의 이익함수가 의미가 있으려면$(P-\gamma P_s-\frac{S_r}{Q})$가 양의 값을 가져야 한다. 따라서 위에서 얻은 $P\le\frac{\alpha}{\beta}$와 결합하면 $\frac{\alpha}{\beta}-\gamma P_s-\frac{S_r}{Q}>0$이라는 관계식을 얻게 된다. 이 관계식을 다시 쓰면 $Q>S_r/(\frac{\alpha}{\beta}-\gamma P_s)$ 가 된다. 식(7)을 P에 대해 1차 편미분을 하여 0으로 놓은 결과는 다음과 같다.

$$P_o=\frac{1}{2}\ \ (\frac{\alpha}{\beta}+\gamma P_s+\frac{S_r}{Q}) \tag{8}$$

이때 목적함수를 P에 대해 2차 미분한 값은 모든 Q의 값에 대해 음이 되므로 $(\partial^2\Pi_{r2}/\partial P^2<0)$ 목적함수는 P에 대하여 볼록함수이다. 따라서 식(7)에 식(8)을 대입하면 목적함수는 Q에 대한 단일변수 함수 $\Pi_2(Q)$가 되며,

$$\Pi_2(Q)=\frac{\beta}{4}\ \ (\frac{\alpha}{\beta}-\gamma P_s\frac{S_r}{Q})^2\ -\ \frac{Q}{2}I_r \tag{9}$$

$\Pi_2(Q)$를 Q에 대하여 1차미분 하면 아래식을 얻게 된다.

$$Q_o=\left\{\frac{\beta S_r}{I_r}\ \ (\frac{\alpha}{\beta}-\gamma P_s-\frac{S_r}{Q_o})\right\}^{1/2} \tag{10}$$

$\Pi_2(Q)$는 $\Pi_1(Q)$와 마찬가지로 Q에 대하여 오목-볼록함수이므로 $\Pi_2(Q)$를 최대화 시키는 최적발주량은 식(10)에 의하여 얻어진 Q_o값들중 가장 큰 값을 취하면 된다.

3. 생산자 문제

앞에서 생산자가 제시하는 외상기간이 주어졌을 때 구매자가 자신의 최적 주문량과 판매가격을 어떠한 방식으로 결정하는 지를 알아보았다. 생산자는 구매자의 이러한 의사결정정책을 알고 있으므로 자신의 이익을 최대화 시킬 수 있는 1회 생산량과 외상기간을 결정할 수 있다.

생산자 문제에서 사용될 기호들은 다음과 같다.

S_s = 생산자의 생산준비비용,

P_m = 생산자의 생산단가,

H_s = 자본기회비용을 제외한 단위당 연간 재고유지비용,

C_s = 자본의 연간 기회비용율,

I_s = $H_s+P_mC_s$,

R = 생산자의 연간생산율,

L = 생산자의 생산량이 구매자의 발주량의 정수배가 되도록 하는 정수값,

T_c = 생산자가 제시하는 외상기간,

$\Pi_s(L, T_c)$ = 생산자의 연간 이익함수.

이경우에 구매자의 발주량이 Q_o라고 한다면, 생산자의 경제적 1회생산량은 Q_o의 정수배인 LQ_o로 가정한다. 또한 생산자는 구매자에 비하여 고수익을 추구할 수 있는 자본의 활용능력이 있다고 보아 생산자의 자본기회비용이 구매자의 자본기회비용보다 크다고 가정한다. 이러한 상황하에서 공급자의 연간 이익함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Pi_s(L, T_c) = \text{총수입} - \text{발주비용} - \text{재고유지비용} - \text{자본비용}$$

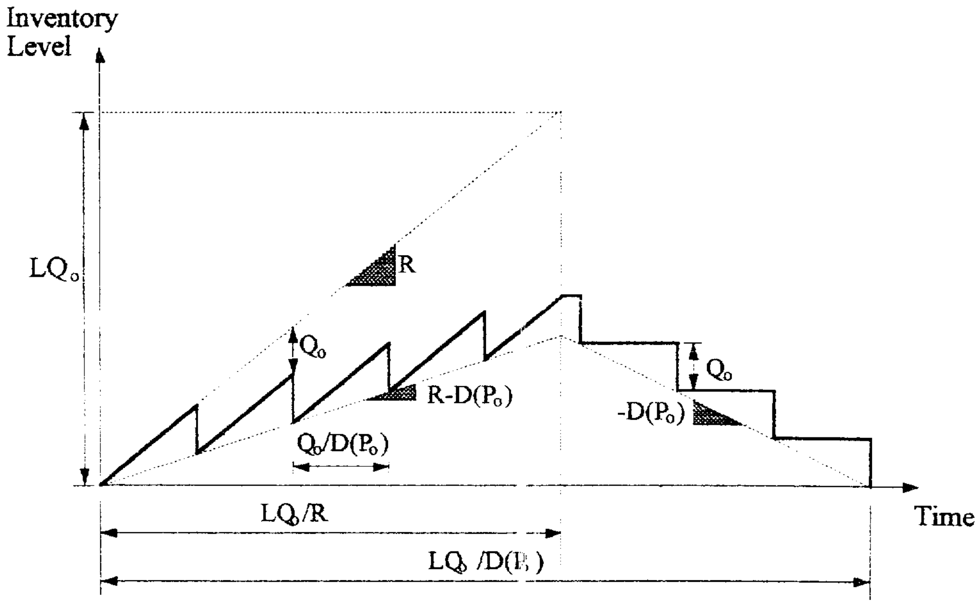
$$= D(P_o)(P_s - P_m) - \frac{S_s}{LQ_o}D(P_o) - X(Q_o)I_s - D(P_o)P_sC_sT_c \quad (11)$$

이때 $X(Q_o)$는 구매자의 발주량이 Q_o일 때 생산자의 연간 평균재고수준을 의미하는데 생산자의 연간 생산율 R과 L값에 따라 변한다.

[그림 1]은 생산자의 생산율이 유한한 경우(EPQ형태)의 재고수준이 변화하는 모습을 보여주고 있다. 생산자는 구매자의 1회 구매량이 Q_o일때 그 정수배인 LQ_o만큼을 생산하며, 납기에 맞추어 Q_o씩 납품을 한다. 이 때 생산자의 유한한 생산율 R은 소비자의 수요율 $D(P_o)$보다는 상대적으로 커야 하므로 이들의 관계를 $\rho = D(P_o)/R$, $\rho < 1$로 표시한다. 일반적인 EPQ 모형에서는 생산율 R은 고정된 값을 가지게 된다. 그러나 이 논문에서는 수요가 판매가격에 따라 변하게 되므로 R을 고정시키면 해법이 매우 복잡해 진다. 따라서 생산율은 유한하지만 충분히 크다고 보아, 수요가 증가하더라도 생산자는 생산율을 증가시켜서 일정한 ρ값을 유지시킬 수 있다고 가정하도록 하겠다. 따라서 앞으로는 ρ를 상수값으로 보겠으며 R값은 ρ와 $D(P_o)$에 의해 자동적으로 변하는 것으로 하여 모형을 정립하도록 하겠다. 그러면 [그림 1]에 의해 연간평균재고량 $X(Q_o)$를 다음과 같이 구할 수 있다. 이때 $n_o = \mathrm{Int}(LD(P_o)/R+1)$이다.

$$X(Q_o) = \frac{2L}{Q_o}\left[\frac{n_o}{D(P_o)}\{(R - D(P_o))n_o\} - RD(P_o)\left(\frac{n_o}{D(P_o)} - \frac{L}{R}\right)^2 + (L - n_o)(L - n_o + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\{1 + L(1-\rho)\}Q_o \quad (12)$$



[그림 1] 생산율이 유한한 경우 생산자 재고수준의 변화

3.1 수요함수가 지수형인 경우

$A_1=2\alpha S_r/I_r$로 치환하면 식(3)과 식(6)으로부터 다음의 두식을 유도할 수 있다.

$$P_o=(A_1Q_o^{-2})^{1/\beta} \tag{13}$$

$$T_c=\frac{1}{C_rP_s}\left\{P_s-\frac{\beta-1}{\beta}(A_1Q_o^{-2})^{1/\beta}+\frac{S_r}{Q_o}\right\} \tag{14}$$

두 식을 살펴 보면 구매자의 의사결정변수인 판매가격 P_o는 발주량 Q_o의 함수가 되며, 생산자의 의사결정변수인 외상기간 T_c도 Q_o의 함수가 된다. 따라서 생산자의 이익함수 $\Pi_s(L,\ T_c)$를 최대화 하는 문제는 P_o, T_c와 $D_1(P_o)$를 식(11)에 대입함으로써 L과 Q_o를 최대화 시키는 문제로 전환할 수 있다. 편의를 위하여 $\delta=C_s/C_r$로 표시하는데 생산자의 자본에 대한 기회비용이 구매자의 기회비용보다 크다는 가정에 의해 $\delta\geq 1$로 범위를 정하도록 한다.

$$\Pi_{s1}(L,\ Q_o)=\alpha Q_o^2A_1^{-1}\left\{P_s(1-\delta)-P_m+\delta\frac{\beta-1}{\beta}A_1^{1/\beta}Q_o^{-2/\beta}-\frac{1}{LQ_o}(L\delta S_r-S_s)\right\}-X(Q_o)I_s \tag{15}$$

이제 식(12)에서 얻은 평균재고수준 $X(Q_o)$를 식 (15)에 대입하면 생산자의 연간 이익함수 $\Pi_{s1}(L,\ Q_o)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi_{s1}(L,\ Q_o)=\alpha Q_o^2A_1^{-1}\left\{P_s(1-\delta)-P_m+\delta\frac{\beta-1}{\beta}A_1^{1/\beta}Q^{-2/\beta}-\frac{1}{LQ_o}(L\delta S_r+S_s)\right\}-\frac{1}{2}\{1+L(1-\rho)\}Q_oI_s \tag{16}$$

위의 이익함수는 두 변수 L과 Q_o로 구성되어 있다. 여기서 변수 L을 고정시키고 Q_o에 대하여 1차 편미분을 하면 최적발주량 $Q_o=Q_{o1}$을 구할 수 있다.

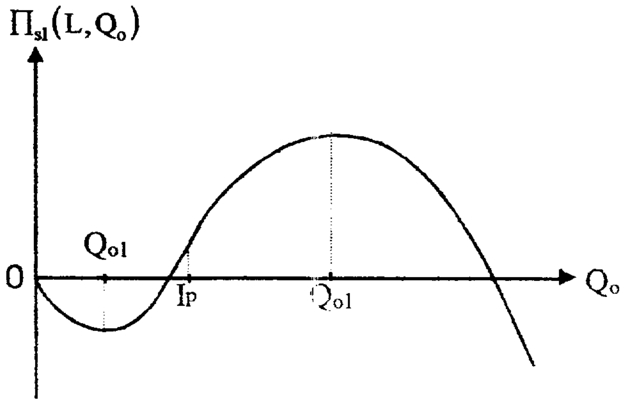
$$Q_{o1}=\left[\frac{2\delta A_1^{1/\beta}(\beta-1)^2}{\beta^2\left[\delta S_r+\frac{S_s}{L}+\frac{A_1\{1+L(1-\rho)\}}{2\alpha}I_s-2Q_{o1}\{P_s(1-\delta)-P_m\}\right]}\right]^{\beta/(2-\beta)} \tag{17}$$

L이 고정된 상태에서 Q_o에 대한 $\Pi_{s1}(L,\ Q_o)$의 함수형태는 $\partial^2\Pi_{s1}(L,\ Q_o)/\partial Q^2$을 통하여 알 수 있다.

$$\frac{\partial^2\Pi_{s1}(L,\ Q_o)}{\partial Q_o^2}=2\alpha A_1^{-1}\{P_s(1-\delta)-P_m\}+\alpha\delta A_1^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot\frac{2(\beta-1)^2(\beta-2)}{\beta^3}\ Q_o^{\frac{-2}{\beta}} \tag{18}$$

만일 $\beta\leq 2$인 경우에는 $\Pi_{s1}(L,\ Q_o)$는 모든 $Q_o>0$에 대하여 볼록함수이므로 Q_{o1}에서 최대값을 가지게 되지만 $\beta>2$인 경우에는 변곡점을 중심으로 오목-볼록함수의 형태를 지닌다. 따라서 I_p를 식(18)에 의해 얻어지는 변곡점이라 한다면 그 값은 식(19)와 같으며 발주량과 목적함수와의 관계는 [그림 2]와 같은 형태가 된다.

$$I_p=\left[\frac{\delta A_1^{1/\beta}(\beta-1)^2(\beta-2)}{\{P_m-P_s(1-\delta)\}\beta^3}\right]^{\beta/2} \tag{19}$$



[그림 2] Q_o와 $\Pi_{s1}(L,\ Q\ )$의 관계 ($\beta>2$인 경우)

즉 $\beta>2$인 경우에는 $\Pi_{s1}(L,\ Q_o)$의 최대함수값은 식(17)에 의해 얻은 값중 I_p보다 큰 값을 가지는 Q_{o1}에서 결정된다.

다음으로 정수형변수 L을 실수형 변수로 가정한다면 $\Pi_{s1}(L,\ Q_o)$은 L에 대하여 볼록함수임을 알 수 있으며, 따라서 임의의 $Q_o>0$에 대해 $\Pi_{s1}(L,\ Q_o)$가 최대값을 가지도록 하는 L의 최적값은 식(16)을 L에 대해 1차미분 함으로써 얻을 수 있다. 그 결과 $L=\{S_sI_r/S_rI_s(1-\rho)\}^{1/2}$가 되며, 아래 두 식을 만족하는 정수값 L_o가

유일한 해가 된다.

$$\Pi_{s1}(L_o,\ Q_o) \geq \Pi_{s1}(L_o+1,\ Q_o) \qquad (20)$$

$$\Pi_{s1}(L_o,\ Q_o) \geq \Pi_{s1}(L_o-1,\ Q_o) \qquad (21)$$

위의 두 식으로부터 L_o의 최적값을 구하기 위한 조건식을 유도할 수 있다.

$$L_o(L_o-1) \leq \frac{I_rS_s}{I_sS_r(1-\rho)} \leq L_o(L_o+1) \qquad (22)$$

이때 L의 최적값 L_o는 구매자의 발주량 Q_o와는 무관하게 생산자와 구매자의 모수들과 수요함수와 생산율의 관계를 규정하는 모수 ρ에 의해 결정됨을 알 수 있다.

다음은 최적해를 구하는 해법절차이다. 식(17)에서 볼 수 있듯이 Q_o는 단순한 계산에 의해 구할 수가 없기 때문에 반복적인 탐색과정을 거쳐서 찾아야 한다. 본 해법절차에서는 탐색의 보편적 방법중 하나인 Bisection Method를 이용하기로 하겠다.

해법절차

Step 1. $\frac{I_rS_s}{I_sS_r(1-\rho)}$값을 구한후 식(22)에 의해 $L=L_o$값을 계산한다.

Step 2. 공급자의 이익을 최대로 하는 구매자의 최적발주량 Q^*_o를 구한다.

1. 초기화 단계:
   1) 매우 작은 수 ε을 결정한다.
   2) 발주량의 초기치를 $Q^*=(Q^l_o+Q^u_o)/2$로 하는데 이때 $Q^l_o=I_p$이고 Q^u_o는 임의의 큰 수로 한다.
2. 반복단계:
   1) $B=\frac{\partial\Pi_{s1}(Q_o, L_o)}{\partial Q_o}\ \Big|\ Q_o=Q^*$값을 계산한다.
   2) 만일 $B\geq 0$이면 $Q^l_o=Q^*$로 하고 그렇지 않으면 $Q^u_o=Q^*$로 치환한다.
   3) 새로운 발주량 $Q^*=(Q^l_o+Q^u_o)/2$를 계산한다.
3. 중단규칙:
   만일 $Q^u_o-Q^l_o\leq 2\varepsilon$이면 $Q^*_o=Q^*$로 하고 중단하며, 그렇지 않으면 반복단계를 계속 수행한다.

Step 3. Step 2에서 얻은 Q^*_o를 이용하여 식(14)에 의해 T_c를 계산한다.
공급자의 최적발주량 $Q_s=L_oQ^*_o$을 구한다.

3.2 수요함수가 선형인 경우

수요함수가 선형인 경우에도 그 접근 방법은 지수형인 경우와 대동소이하다. $A_2=I_r/S_r$로 치환하면 식(8)과 (10)으로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$P_o=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{I_r}{2S_r\beta}Q_o^2 \tag{23}$$

$$T_c=\frac{1}{C_rP_s}\{P_s-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{Q_o}(\frac{I_r}{S_r\beta}Q_o^3+S_r)\} \tag{24}$$

위에서 계산된 P_o, T_o와 $D_2(P_o)$를 이용하여 이익함수를 구하면

$$\Pi_{s2}(L,\ Q_o)=\frac{A_2}{2}Q_o^2\ \{P_s(1-\delta)-P_m+\frac{\delta}{\beta}(\alpha-A_2Q_o^2)-\frac{1}{LQ_o}(L\delta S_r+S_s)\}\ -X(Q_o)I_s \tag{25}$$

가 된다. 이 식에 평균재고수준 $X(Q_o)$를 대입하면 실제 이익함수를 구할 수 있다.

$$\Pi_{s2}(L,\ Q_o)=\frac{A_2}{2}Q_o^2\ \{P_s(1-\delta)-P_m+\frac{\delta}{\beta}(\alpha-A_2Q_o^2)-\frac{1}{LQ_o}(L\delta S_r+S_s)\}\ -\frac{1}{2}\{1+L(1-\rho)\}Q_oI_r \tag{26}$$

지수형 수요함수의 경우와 마찬가지 방법으로 최적발주량 $Q_o=Q_{o2}$을 구한다.

$$Q_{o2}=\Big[\frac{\beta}{2A_2\delta}\ [\{P_s(1-\delta)-P_m\}+\frac{\delta\alpha}{\beta}-\frac{(L\delta S_r+S_s)}{2LQ_{o2}}-\frac{\{1+L(1-\rho)\}}{2A_2Q_{o2}}I_s]\Big]^{1/2} \tag{27}$$

공급자 이익함수의 형태가 Q_o에 대해서 어떠한 함수형태를 가지는 지를 알아보기 위하여 2차미분을 한 결과는 아래와 같다.

$$\frac{\partial^2\Pi_{s2}(L,\ Q_o)}{\partial Q_o^2}=A_2\ \{P_s(1-\delta)-P_m+\frac{\delta\alpha}{\beta}-\frac{6\delta}{\beta}A_2Q_o^2\} \tag{28}$$

식(28)에 의하면 $\Pi_{s2}(L,\ Q_o)$도 Q_o에 대해서 [그림 2]와 같은 오목-볼록함수의 형태를 가지며, 최적값은 식(27)에 의해 얻어진 해중 가장 큰값에서 결정된다. 따라서 수요함수가 선형인 경우에도 지수형인 경우의 해법절차를 그대로 따라 최적해를 구할 수 있다. 단 이 경우에 함수의 변곡점 I_p는 다음과 같다.

$$I_p=\left[\frac{\beta\{P_s(1-\delta)-P_m\}+\delta\alpha}{6\delta A_2}\right]^{1/2} \tag{29}$$

식(27)로부터 $P_s(1-\delta)-P_m+\frac{\delta\alpha}{\beta}>0$의 조건을 유도할 수 있는데, 이 조건으로부터 변곡점의 값이 양수가 됨을 알 수 있다. 또한 L_o값의 최적해의 범위는 다음과 같다.

$$L_o(L_o-1) \le \frac{I_r S_s}{I_s S_r(1-\rho)} \le L_o(L_o+1) \quad (30)$$

식(30)은 수요함수가 지수형인 경우에 식(22)와 같은 형태이다. 그러나 실제적으로는 ρ가 수요함수를 포함하고 있기 때문에 L_o값은 달라지게 된다.

4. 수치예제

생산자의 생산정책과 구매자에게 제시할 외상기간이 구매자의 발주량과 구매자-생산자 각각의 이익에 어떠한 영향을 미치는 지를 아래의 예제를 통하여 분석해 보았다. 이 예제는 소비자의 수요함수가 판매가격에 대해 지수형으로 변하는 경우에 대한 것으로, 사용되는 모수의 값들은 다음과 같으며 금액의 단위는 천원이다.

$\alpha=6\times10^6$, $\beta=4.5$, $S_r=10$, $S_s=80$, $C_s=C_r=0.14$, $H_r=0.5$, $H_s=0.3$, $P_s=5$, $P_m=3.5$, $\rho=1/3$

위의 자료를 이용하여 해가 구해지는 과정은 다음과 같다. 생산자의 연간생산율을 연간수요의 3배로 결정했을 때 ($r=1/3$) 식(22)로부터 $L_o=4$를 구할 수 있다. 또한 식(19)에서 변곡점의 값 $I_p=51.33$이 된다. 따라서 $\varepsilon=0.01$, $Q_o^l=I_p$, $Q_o^u=10{,}000$으로 하여 계산하면 $Q_o=174.7$이며, 생산자가 제시하는 최적외상기간 $T_c=0.5115$년, 생산자의 1회생산량 $L_oQ_o=698.8$, 생산자의 연간이익은 1629이다. 한편 생산자가 외상기간을 0.5115년으로 구매자에게 제시할 때 구매자는 판매가격을 6.04로 결정하며, 이때 구매자의 이익은 2355가 된다.

모형정립과정에서 생산자의 생산율을 상수로 두지 않고 ρ값을 상수로 한다고 가정하였다. 따라서 ρ값에 따라 최적의사결정의 내용이 어떻게 변화되는지 살펴본 결과는 〈표 1〉에 있는 것과 같다.

〈표 1〉 생산율의 변화에 따른 최적 의사결정

ρ	L_o	T_c	Q_o	P_o	$\Pi_r(P_o, Q_o)$	$\Pi_s(L, T_c)$
0.83	9	0.6139	181.1	5.95	2491	1830
0.67	6	0.5726	178.5	5.99	2433	1746
0.50	5	0.5400	176.5	6.02	2392	1683
0.40	5	0.5217	175.3	6.03	2368	1648
0.33	4	0.5115	174.7	6.04	2355	1629
0.25	4	0.4991	174.0	6.05	2339	1606
0.20	4	0.4915	173.5	6.06	2329	1593
0.10	4	0.4763	172.6	6.07	2310	1565

〈표 1〉의 결과를 분석하여 보면 첫째, 생산율이 연간수요의 일정비율 이상이 되면(이 예제에서 $\rho \leq 0.33$) L_0값은 4로서 더이상 감소하질 않았다. 둘째, ρ값이 커질수록 생산자 및 구매자의 이익도 증가한다. 이것은 생산자의 생산율이 작아짐으로써 생산자의 재고유지비용이 감소되며, 따라서 외상허용기간을 늘려 줌으로써 구매자는 판매가격을 감소시킬 수 있고, 이에 따라 수요가 증가되기 때문이다.

5. 결 론

이 논문에서는 생산자-구매자-일반소비자로 연결되는 시스템하에서 생산자의 이익을 최대화 시키는 외상기간과 생산량을 결정하는 문제를 다루었다. 이 때 생산자가 구매자의 의사결정과정을 알고 있으며, 일반소비자의 수요는 구매자의 판매가격에 따라 변한다는 가정을 하였다. 수요함수는 판매가격에 따라 지수형과 선형으로 변하는 두가지 경우가 고려되었으며, 생산자의 생산율이 유한한 경우에 대해 모형정립을 하였고 해법을 제시하였다. 이 모형에서 생산율을 무한대로 하고 L=1로 고정시키면 김준식등[8]이 제시한 모형과 같은 결과를 가지게 된다.

앞의 수치예제에서 보았듯이 생산율을 최소화 하는 것이 이익을 높일 수 있다는 결론은 단일설비에서 한종류의 제품만을 생산할 때는 당연한 결과라 하겠다. 따라서 이 생산설비에서 여러종류의 제품을 생산하는 경우로 문제를 확장할 수도 있을 것이다. 또한 단일 구매자가 아닌 복수구매자에게 제품을 판매하는 경우에 대해서도 이 모형을 발전시킬 수 있을 것이며, 생산자의 생산속도를 일정하게 유지시키거나, 수요에 따라서 생산속도가 변할 수 있더라도 한계가 있는 경우의 문제도 생각해 볼 수 있겠다.

참 고 문 헌

[1] Abad. P. L., "Determining optimal selling price and lot size when the supplier offers all-unit quantity discounts", *Decision Science*, Vol. 19, (1988), pp. 622-634.

[2] Chand, S. and J. Ward, "A note on Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 38, (1987), pp. 83-84.

[3] Chapman, C. B., S. C. Ward, D. F. Cooper, and M. J. Page, "Credit policy and inventory control", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 35, (1985), pp. 1055-1065.

[4] Chung, K. H., "Inventory control and trade credit revisited", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 40, (1989), pp. 495-498.

[5] Goyal S. K., "Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 36, (1985), pp. 335-338.

[6] Goyal S. K., "Determination of a supplier's economic ordering policy", *Jou-*

rnal of Operational Research Society, Vol. 38, (1987), pp. 853-857.

[7] Haley, C. W., and R. C. Higgins, "Inventory policy and trade credit financing", *Management Science*, Vol. 20, (1973), pp. 464-471.

[8] Kim, J. S., H. Hwang, and S. W. Shinn, "An optimal credit policy to increase supplier's profits with price-dependent demand functions", *Production Planning and Control*, Vol. 6, (1995), pp. 45-50.

[9] Park, K. S., "EOQ under trade-credit financing", *Policy and Information*, Vol. 16, (1982), pp. 113-117.

[10] Rachamadugu, R., "Effect of delayed payments(trade credit) on order quantities", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 40, (1989), pp. 805-813.