

선호종속을 허용하는 다속성 의사결정문제의 대화형 접근방법

이강인* · 조성구**

An Interactive Approach to Select Optimal Solution for MADM Problems with Preferential Dependence

Kang In Lee* · Sung Ku Cho**

Abstract

The "optimal" solution for a decision making problem should be the one that best reflects the decision-maker's preference. For MADM(Multi-Attribute Decision-Making) problems, however, finding an optimal solution is difficult, especially when the number of alternatives, or that of attributes is relatively large. Most of the existing mathematical approaches arrive at a final solution on the basis of many unrealistic assumptions, without reflecting the decision-maker's preference structure exactly. To remedy this, some interactive methods have been proposed, but most of them require a large amount of information growing exponentially as the number of alternatives, or that of attributes increases. Therefore it is difficult for the decision-maker to maintain consistency throughout the decision making process.

In this paper, an interactive method which finds optimal solutions for deterministic MADM problems with many attributes and alternatives is proposed. Instead of considering all the attributes simultaneously, this method partitions all the attributes into several mutually independent subgroups and considers one of them at each of preordered steps, where the alternatives are eliminated until the optimal one is obtained. The efficiency of the method lies in the fact that the amount of necessary information is reduced significantly, and even further if a suboptimal solution is acceptable to the decision-maker.

* 전주대학교 산업공학과 조교수

**동국대학교 산업공학과 부교수

1. 서 론

일반적으로 경영 및 공공의 의사결정문제에 있어서 의사결정자는 여러 가지의 속성을 갖는 다양한 기준에 입각하여 대안들 간의 선호 순서를 결정하거나 최적대안을 선택하게 된다. 이러한 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making : MADM)문제는 자원의 제약 때문에 발생하는 상충 요인을 해결하기 위한 것으로 실행 가능한 대안의 수가 유한개이고 이산적이어서 선택·평가문제등에 적합하다.

이러한 문제를 해결하기 위한 기존의 수리적 방법들[4], [5], [6], [7], [15], [18], [23], [24]은 거리나 퍼지척도를 가지고 주어진 문제에 대한 모형이나 의사결정자의 선호구조에 제약을 가하여 다목적 선형계획법(Multi-Objective Linear Programming : MOLP)이나 다목적 목표계획법(Multi-Objective Goal Programming : MOGP)을 이용해 최적해(optimal solution)를 구하고 있지만 이들은 의사결정자의 입장을 정확히 반영하지 못하는 경우가 대부분이며, 이를 개선하기 위한 대화형 접근방법[12], [14], [19], [22], [24], [25], [26], [27], [31], [32] 역시 전체의 대안과 속성을 고려해야 하기 때문에 이들의 수가 많으면 많을 수록 대안간의 쌍비교(pairwise comparison)등을 통하여 의사결정자가 제공해야 하는 정보의 양이 기하급수적으로 증가하게 되어 일관성을 유지시키기도 어렵고 최적해가 보장되지 못하는 문제점이 있다. 또한, 기존의 방법들은 대부분 속성간의 선호 독립성(preferential independence)을 가정하고 있기 때문에 현실성이 부족하다. 그러나 어떤 제품 등의 품질을 평가·선택할 때, 모든 속성을 고려한다는 것

은 매우 어려울 뿐만 아니라 의사결정자의 가치판단 기준에 따라 중요하게 고려하는 종속관계를 갖는 소수 개의 속성이 존재할 수 있을 것이다. 예를 들면, 승용차를 구입하는 경우의 의사결정자가 여러 가지의 속성 중에 안전도-승차감-편이성-주행성, 연비-구입가격 등의 종속적인 소수 개의 속성을 우선적으로 고려한다든지 혹은, 주택을 구입하는 경우 구입가격-교육여건-환경문제, 거리-소요시간-교통비(거리와 시간병산제에 따른)등이 이러한 경우에 해당한다.

따라서, 본 연구의 목적은 매우 많은 대안과 속성을 갖는 의사결정 상황에서 전체 속성들의 집합을 상호 독립적인 몇 개의 속성 그룹으로 분할한 다음, 의사결정자가 중요하다고 생각하는 그룹부터 단계적으로 고려해가면서 대안의 수를 점차적으로 줄여 나가되, 이 과정에서 의사결정자의 입장을 가능한 한 반영할 수 있도록 하고, 그룹 내에서는 속성간의 종속성(dependence)을 허용하는 경우에도 최적해에 도달할 수 있는 보다 효율적인 대화형 접근방법을 구축하는데 있다. 여기서 의사결정자가 최적해를 얻는데 필요한 시간과 정신적 노력이 과다하다고 생각되어 최적해가 보장되지 않더라도 신속히 만족할 만한 해를 얻고자 하는 경우에는 단계별 대안제거를 위한 절단범위(cutting range)의 폭을 조정할 수 있도록 하여 빠른 시간 내에 해에 도달하게 함으로써 의사결정자의 입장을 좀 더 현실적으로 반영할 수 있도록 하였다.

2. 수리적 가정 및 기존 연구

본 연구에서는 다음과 같이 기호를 정의하기

로 한다.

- n_0 : 원문제에서 고려할 전체 속성의 수
- m_0 : 원문제에서 고려할 전체 대안의 수
- a_i : 원문제의 i 번째 대안, $i=1, \dots, m_0$
- z : n_0 개의 전체 속성을 상호 독립적인 그룹으로 분할했을 때의 그룹의 수
- p : 단계를 의미하며 $p=1, 2, \dots, z \leq n_0$
- n_p : p 단계에서 추가로 고려하는 속성의 수, $n_0 = n_1 + n_2 + \dots + n_z$
- m_p : 전 단계에서 제거하고 남은 것으로 p 단계에서의 실행 가능한 대안의 수
- G_p : p 단계에서 고려하는 속성 그룹으로 $G_p = \{c_1^p, c_2^p, \dots, c_{n_p}^p\}$, 단 $c_j^p = G_p$ 의 j 번째 속성 ($j=1, 2, \dots, n_p$)
- A_0 : 원문제의 전체 대안들의 집합으로 $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}\}$
- A_p : p 단계에서 제거하고 남은 대안들의 집합으로 $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_z$
- λ_p : 속성 그룹의 G_p 전체에 대한 가중치로 그룹의 순서는 중요도의 순서대로 정해지기 때문에 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \lambda_i \geq 0$ 이고 $\sum_{p=1}^z \lambda_p = 1$
- x_{ij} : 벡터정규화(vector normalization)이전의 대안 a_i 의 j 번째 속성에 대한 평가치로 x_{ij} 의 값이 크면 클수록 좋은 경우로 가정 ($i=1, 2, \dots, m_0, j=1, 2, \dots, n_0$)
- x_{ij} : 각 속성에 대해서 x_{ij} 를 벡터정규화한 값으로 $x_{ij} = x_{ij} / (\max_k x_{ik})$
- $v_p(a_i)$: 대안 a_i 의 G_p 에 관한 UVF(utility/value function)
- $U_p(a_i)$: 단계 p 까지의 $v_k(a_i)$ 들에 그룹별 가중치 λ_k 를 고려한 값, $U_p(a_i) = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k \cdot v_k$

(a). 따라서 전체 속성을 모두 고려한 대안 a_i 의 UVF $U(a_i) = U_z(a_i)$

- α : UVF $v(\cdot)$ 들의 모수벡터
- $a_i P a_k$: 대안 a_i 를 대안 a_k 보다 선호(preference)함
- $a_i \sim a_k$: 대안 a_i 와 대안 a_k 가 무차별(indifference)함
- H_p : p 단계에서 의사결정자가 제시한 m_p 개 대안간의 쌍비교 결과의 수, $H_p \leq \binom{m_p}{2}$
- ϵ_k : p 단계에서 얻은 H_p 개의 쌍비교 결과 중 h 번째 쌍비교 결과를 UVF $v(\cdot)$ 가 위반하는 오류의 크기로 최소화해야 할 값, $h=1, 2, \dots, H_p$
- a_p^* : p 단계까지의 최적해(current optimal solution)
- x_p^* : a_p^* 의 p 단계까지의 속성들에 대한 정규화된 평가치들의 벡터
- C_p : p 단계에서 최적해를 보장하는 절단범위(cutting ragne)
- C_p^* : 의사결정자가 조정한 절단범위로 $C_p^* \geq C_p$
- E_p : C_p 에 의해 제거 가능한 대안의 수
- E_p^* : C_p^* 에 의해 제거 가능한 대안의 수

지금까지의 효용함수나 가치함수(utility/value function : UVF)를 이용한 대부분의 연구에서는 $p=0$ 으로 한정하여 n_0 차원을 갖는 모든 속성에 대한 평가치를 결과 공간상의 m_0 개의 스칼라 값으로 변환한다고 가정하고 있으나 이것은 매우 어려운 일이고 많은 시간을 필요로 한다[13], [30]. 또한, 지금까지의 접근방법들은 대부분 의사결정자에게 너무 많은 속성에 관한 목표치의 수준과 이들 간의 상충정보(trade-off information)의 제시를 요구하기 때문에 현실

적인 적용상의 어려움을 내포하고 있다[9], [19]. 다음의 표 2.1은 본 연구와 관련이 있는 기존의 대화형 접근방법들에 대한 주요한 내용 및 한계점을 나타내고 있다.

그리고 이러한 MADM상황하에서 속성간의 선호독립(preferential independence)관계를 만족하고 있을 지라도 n_0 의 수가 크면 클수록 최적해를 얻는다는 것이 쉽지 않은 문제이지만 종속적 속성을 갖는 경우에는 더욱 어려운 문제이다. 또한, 기존의 연구들은 주로 MODM입장에서 광범위하게 연구되고 있지만 일상생활에서 의사결정자에게 더욱 필요하다할 수 있는 제품 등의 선택·평가문제등을 돕기 위한 MADM입장의 연구가 지속적으로 필요하다 하겠다. 그러나 이러한 문제를 전반적으로 해결하기에는 너무나 많은 어려움이 따르기 때문에 일반적인 접근방법을 찾는다는 것은 거의 불가능하다[21].

이들을 부분적으로나마 해결하기 위해서 다음과 같은 3가지 범주의 대화형 접근방법들이 계속적으로 개발되고 있다[19], [22], [31].

- ① 실행가능한 점(대안)과 실행불가능한 점을 효율적으로 탐색하기 위한 방법
- ② 대안의 차별화(clustering)를 효율적으로 수행하기 위한 방법
- ③ 인접한 점들 간의 쌍비교를 함으로써 그 래디언트(gradient)를 이용하는 방법

본 연구에서는 이들 중 대안의 차별화를 효율적으로 하기 위하여 속성의 그룹간에 선호독립을 가정하여, 다음의 가정 1과 같이 전체 효용함수가 의사오목인 단조증가함수이고 그룹별 효용함수에 대해 가법성질을 만족한다고 가정한다.

가정 1 : R^z 상에 의사오목효용함수를 정의하

는 경우, 두 대안 a_i 와 a_k 에 대해 다음식을 만족하면 대안 a_i 를 대안 a_k 보다 선호한다고 할 수 있다.

$$U(a_i) - U(a_k) = \sum_{p=1}^z \lambda_p \{v_p(a_i) - v_p(a_k)\} > 0$$

그리고 모든 속성간의 선호 독립성을 가정하는 것은 지나친 제약으로 현실성이 부족하므로 최소한 그룹 내의 속성간에는 종속관계를 허용하되, 각 속성 그룹에 대한 UVF는 속성간에 교호작용(interaction)으로 발생하는 완전 다항식(complete polynomial)으로 표현할 수 있다고 보고 다음과 같이 가정하기로 한다.

가정 2 : p번째 속성 그룹으로 G_p 에 관한 대안 a_i 의 UVF

$$v_p(a_i) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n_p} \alpha_j X_{ij} + \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k>j}^{n_p} \alpha_{jk} X_{ij} X_{ik} + \dots + \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k>j}^{n_p} \sum_{l>k}^{n_p} \alpha_{jkl} X_{ij} X_{ik} X_{il} + \dots + \alpha_{12\dots n_p} X_{i1} X_{i2} \dots X_{in_p}$$

이다. 위의 함수는 의사결정자로 부터 얻은 대안간의 쌍비교 결과를 최대한 만족시키도록 α 의 원소 값을 결정함으로써 비교적 쉽게 구할 수 있다. 따라서 대안 a_i 와 대안 a_k 간의 선호관계는

$$U(a_i) > U(a_k) \iff a_i P a_k$$

$$U(a_i) = U(a_k) \iff a_i \sim a_k$$

$$U(a_i) < U(a_k) \iff a_k P a_i$$

임을 알 수 있다. 위의 $v_p(a_i)$ 에서 확인해야 하는 모수의 수는 고려하고자 하는 종속관계를

표 2.1 기존 연구의 주요내용 및 한계점

구분	기존방법	주요내용 및 한계점
1	Benayoun, Montgolfier, Tergny와 Larichev(1971)의 방법 ²¹	가장 최초의 대화형 접근방법으로 STEM(STEP Method)이라고도 하다. 이산적이거나 연속적인 문제 혹은 선형이거나 비선형문제 등에 모두 적용 가능하다. 이것은 참고기준절차(reference point procedure)에 따르며, 비피지배 해(nondominated solution)가 이상적인 해(ideal solution)와 가장 가까운 값은 갖도록 해 벡터(solution vector)와 이상해의 벡터(ideal vector)를 비교해 불만족스러운 목적함수의 수준을 개선시키는 과정을 거친다.
2	Geoffrion, Dyer와 Feinberg(1972)의 방법 ²	이 방법은 일명 GDF방법이라고도 하며, 때때로 비효율적인 대안이 의사결정자에게 제시되는 경우가 있다. 의사결정자가 자신의 전반적인 효용함수(overall utility function)를 알 수만 있다면 빠른 수렴(large-step gradient algorithm)을 할 수 있는 반면, 매 단계마다 새로운 해의 개선 방향인 그래디언트(gradient) $\nabla f(a)$ 를 얻기 위해 일반적인 의사결정자에게는 좀 어려운 질문을 요구한다. GDF방법의 핵심은 비선형 최적화를 위해 Frank-Wolfe 알고리즘을 이용한다.
3	Dyer(1972)와 Wehrung(1973)의 방법 ^{51, 261}	GDF방법을 확장한 것으로 선호정보 수집에 필요한 어려움의 일부를 완화시키기 위한 방법이지만 성공적이지 못했다.
4	Haimes, Hall와 Freedman(1975)의 방법 ¹⁴	일명 SWT방법(the surrogate worth trade-off method)이라고도 한다. 기본 가능한 목적함수를 갖는 경우에 적용할 수 있으며, 일반적인 의사결정자에게는 좀 복잡한 질문 절차에 따른다. 비피지배해의 대표성을 갖는 집합이 계산된다. 모든 대안에 대해서 $-10 \sim +10$ (무차별하다면 0)의 서수적 답을 해야 한다.
5	Zionts와 Wallenius(1976, 1983)의 방법 ^{31, 32}	일명 ZW방법이라고도 하며, 이산적 대안의 집합을 갖는 의사결정상황의 경우에 가장 간단한 대화형 접근방법 중의 하나이다. 그러나 다음의 일정한 가정하에서만 최적성을 보장한다. 즉, 최대화(maximize)문제에 대해서 모든 목적함수는 오목함수(concave function), 제한식들은 볼록 집합(convex set)이고 전체 효용함수는 선형이어야 한다. 만약, 목적함수의 수나 속성의 수가 6개 이상이면 다차원 공간상의 해(multi-dimensional solution)간에 모든 쌍비교를 하기 때문에 전체적인 비교가 어렵고, 신뢰할 만한 결과를 얻기 어렵다.
6	Wierzbicky(1977, 1982, 1986)의 방법 ²⁹	이 방법은 위의 STEM과 마찬가지로 참고기준 절차를 이용하는 방법으로, 이산적 대안의 문제만을 고려할 수 있고, 의사결정자로 하이픈 개선된 해를 발견할 수 있도록 도와주지 않는다. 그리고 최종 해의 최적성이 검토되지 않는다.
7	Steuer(1976, 1983)의 방법 ^{21, 24}	모든 효율적인 극점(all efficient extreme points)을 찾아 각 목적함수에 할당된 가중치의 상·하한 개념을 이용한 선별(filtering) 방법에 의해 최적화 이전에 많은 비효율적인 극점을 제거하는 방법이지만 최종 해의 최적성이 검토되지 않는다. 이산적 대안의 문제만을 고려할 수 있다.

갖는 속성의 수에 따라 지수적으로 증가하며, 제약식의 수는 의사결정자가 제시하는 쌍비교의 수에 비례한다. 그런데 M. Paolucci와 R. Pesenti[21]가 제시한 모형에서는 $x^t H x$ 을 만족하는 $n \times n$ hessian행렬이 존재함을 가정하고 이를 속성이 2개인 상황에 적용시켜서 α 를 구함으로써 효용함수가 대칭인지 혹은 비대칭인지 등을 고려하고 있다. 물론, 속성 값의 크기에 따라 재고관리 등의 문제에서는 효용함수의 대칭성을 이용할 수 있지만, 본 연구에서는 대안의 선별을 통해 MADM의 본질적인 측면인 최적 대안을 선정하는데 주안점을 두기 위하여 다음과 같이 대화형 접근방법을 구축하고자 한다.

3. 알고리즘의 구축

3.1 알고리즘의 절차

본 연구의 알고리즘을 흐름도 형태로 나타내면 다음의 그림 3.1과 같다.

3.2 알고리즘의 모형화

어느 의사결정자로 부터 단계 p 에서 m_p 개의 대안과 G_p 에 속한 n_p 개의 속성에 대해 H_p 개의 쌍비교 결과를 얻었다면 그룹 G_p 에 속한 UVF $v_p(\cdot)$ 의 모수벡터 α 를 결정하기 위해 본 연구에서는 다음과 같이 목적함수와 제약조건식을 제시하기로 한다.

$$\min \sum_{h=1}^{H_p} \epsilon_h \dots \dots \dots (3.1)$$

$$s. t. v_p(a_i) - v_p(a_k) \leq \epsilon_h,$$

$$a_i, a_k \in A_p, i, k \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\sum_{h=1}^{H_p} \{v_p(a_i) - v_p(a_k)\} = c \dots \dots \dots (3.3)$$

$$\epsilon_h \geq 0, h=1, 2, \dots, H_p \dots \dots \dots (3.4)$$

$$v_p(a_i) \geq 0, p=1, 2, \dots, z \leq n_p \dots \dots (3.5)$$

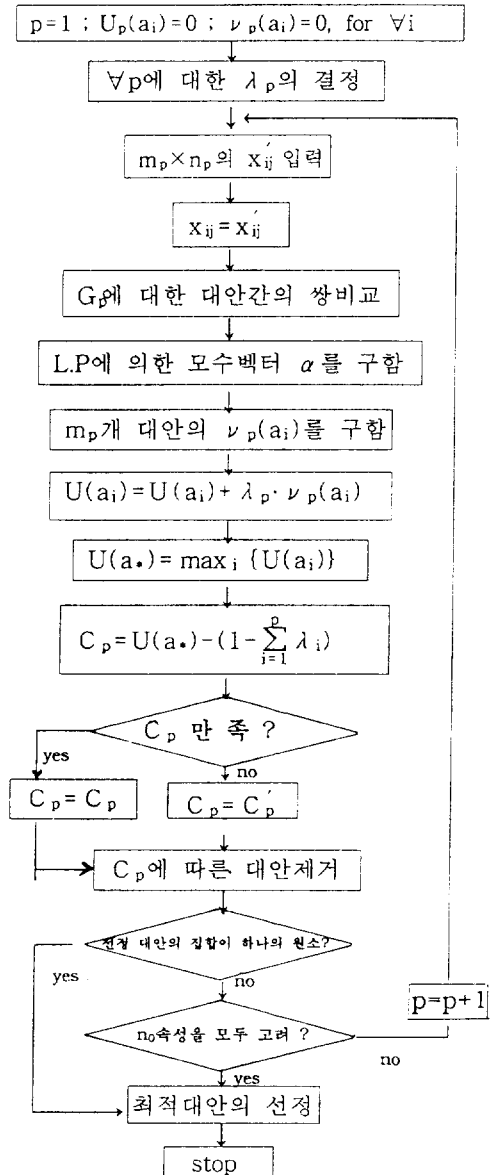


그림 3.1 본 연구의 알고리즘에 대한 흐름도

위의 식(3.2)는 G_p 에 대한 $h(h=1, 2, \dots, H_p)$ 번째의 쌍비교 결과에서 대안 a_i 를 대안 a_k 보다 선호한다고 판단한 경우에 이들 대안에 대한 UVF의 차이는 판단 상의 오류 ϵ_h 이하이어야 함을 의미한다. 또한 식(3.3)은 LINMAP (LINear programming techniques for Multi-dimensional Analysis of Preference)[16]절차에서와 유사하게 모든 α 에 관한 계수의 합이 어떤 상수(constants : c)임을 의미하는데, 이는 모든 변수의 값이 0(zero)이 되는 자명해(trivial solution)를 방지하기 위한 제약식이다. 그리고 식(3.4)는 식(3.2)에서 a_iPa_k 에 적용되는 것으로 $\epsilon_h > 0$ 일 경우 a_iPa_k 임을 의미하므로 $\epsilon_h > 0$ 은 오류의 크기이고, 식(3.5)는 G_p 의 모든 m_p 개 대안에 대한 UVF가 양(positive)의 값을 갖는 것을 의미한다. 이러한 결과를 가지고 단계 $p(p=1, 2, \dots, z, \leq n_0)$ 를 거치면서 최종해에 도달할 때까지 실행가능한 대안의 수가 점차적으로 감소되는 관계는

$$A_z \subseteq \dots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$$

으로 나타낼 수 있다. 따라서, 본 알고리즘의 목적은 식(3.1)에서와 같이 m_p 개 대안간의 선호비교결과 즉, 의사결정자가 대안 a_i 를 대안 a_k 보다 선호한다고 판단한 a_iPa_k 의 모든 H_p 가지 경우에 대해서 이들이 위반되지 않도록 하기 위한 오류 ϵ_h 의 합을 최소화시키는 것이다.

만약, 어느 의사결정자가 m_0 개의 대안과 n_0 개의 속성을 갖는 의사결정상황에 대해 속성의 그룹화를 이용하는 경우 $p=1$ 일 때 $n_1=n_0$ 라면 모든 속성을 한번에 고려하는 것으로 지금까지 대부분의 접근방법과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 어느 의사결정자로 부터 단계 p

에서 $m_p(p=1$ 일 때 $m_1=m_0)$ 개의 대안에 대해 우선적인 속성의 중요성과 속성간의 종속성에 의해 n_p 개의 쌍비교 결과를 얻는다면 식(3.1)부터 식(3.5)에 의해 L.P로 모수벡터 α 를 구함으로써 모든 m_p 개 대안에 대한 $v_p(a_i)$ 를 얻을 수 있을 것이다. 이들 중 최대값을 갖는 대안의 최적해(current optimal solution)를 a^p 라면 m_p 개의 대안들에 대한 가치는

$$0 \leq U(a_1), U(a_2), \dots, U(a_{m_p}) \leq U(a^p)$$

의 관계를 가질 것이다. 여기서 $\forall x \in [0, 1]^n$ 이므로 선호하지 않는 대안을 제거시키기 위한 임의의 값

$$C_p = U(a^p) - (1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i)$$

에 대해 $C_p > 0$ 이면 이 값보다 적은 값을 갖는 대안을 제거시킬 수 있을 것이다. 그러나 $C_p \leq 0$ 일지라도 어느 의사결정자가 최적해를 얻는데 필요한 시간과 정신적 노력이 과다하다고 생각되어 p 단계까지의 최적해로 만족하고자 하는 경우나 위의 C_p 값을 상향 조정하여 정확한 최적해를 찾지 못할 위험이 있더라도 더욱 빨리 결론에 도달하기를 원하는 경우 상향 조정된 $C_p (\geq C_p)$ 에 의해 대안의 수를 더욱 감소시킬 수 있을 것이다. 이러한 과정을 통해 대안의 집합 A_p 를 하나의 원소로 결정할 수 있다면 그 단계에서 최종 최적해를 구할 수 있다. 그러나 대안의 원소가 두 개 이상이라면 $p+1$ 단계로 하고 n_{p+1} 개의 속성을 더 추가시켜서 모든 n_0 개의 속성을 고려할 때까지 이들에 대해 다시 $U(a)$ 를 구하는 과정을 반복하게 된다. 그러면 p 단계 보다 $p+1$ 단계는 더욱 많은 속성에 관한

정보가 주어졌으므로 대안의 수를 다시 감소시킬 수 있을 것이다.

본 연구에서 C_p 와 C_p' 의 관계는 각 단계에서 제거되는 대안의 수 E_p 와 E_p' 에 영향을 미치므로 해의 수렴속도상에 있어서 $C_p < C_p'$ 이면 $E_p \leq E_p'$ 가 된다.

3.3 수치 예

다음의 표 3.1은 15개의 대안과 9개의 속성을 갖는 가상의 의사결정상황을 나타낸 것이다. 여기서 x_{ij} 는 각 속성에 대해 x_{ij} 를 0(최저수준)부터 1(최고수준)까지 갖도록 벡터정규화(vector normalization)한 값으로, 이익의 속성이면 $x_{ij} = x_{ij} / \max_i x_{ij}$ 이고 비용의 속성이면 $x_{ij} = (1/x_{ij}) / (\max_i 1/x_{ij})$ 의 관계를 갖는다. 만약, 이들의 자료를 이용해 각 속성에 대해서 등가중치 $w_i = 1/9$ 로 하고 선형성을 만족한다는 가정하에 L.P문제의 해를 구하면 최적대안이 a_8 임을 알 수 있다. 그리고 LINMAP을 이용해서 모든 m_0 개의 대안에 대해 다음식을 이용하면 a_8 를 구할 수 있다.

$$V_{LINMAP}(a_i) = \sum_{j=1}^{n_i} (w_j)(x_{ij} - x_j^*)^2$$

그러나 본 연구에서와 같이 일부의 속성간에 선호 종속성을 허용하는 경우에는 지금까지의 연구결과를 적용할 수 없다. 따라서 표 3.1의 9개 속성에 대해 속성의 그룹간에는 선호 독립 관계를 갖지만 그룹내의 속성간에는 선호 종속 관계를 허용하는 본 연구의 상황에 적용하기 위하여 $G_1 = \{c_1^1, c_2^1, c_3^1\}$, $G_2 = \{c_1^2\}$, $G_3 = \{c_1^3, c_2^3\}$, $G_4 = \{c_1^4, c_3^4\}$, $G_5 = \{c_1^5\}$ 인 5개 그룹으로 나눌 수

있고, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01)$ 와 $C_p = C_p'$ 을 가정하기로 한다. 여기서 전체 대안간의 쌍비교 횟수를 모두 얻는다면 $15C_2 = 105$ 회의 비교를 해야 한다. 그러나 어느 의사결정자로 부터 선호 종속관계를 갖는 우선적인 속성의 그룹별 중요성을 고려해 $p=1$ 일 때의 G_1 에 대해 의사결정자가 확신을 가지고 비교 가능한 대안간의 쌍들로부터

$$a_1Pa_2, a_3Pa_4, a_5Pa_6, a_7Pa_8, a_9Pa_{10}, a_6Pa_8, a_7Pa_{10}, a_{11}Pa_8, a_{11}Pa_{10}, a_{11}Pa_{13}, a_{11}Pa_{15}$$

결과를 얻었다면 a_8Pa_k 를 갖는 $h(h=1, 2, \dots, H_1=12)$ 번째의 선호관계는 $v_1(a_i) \geq v_1(a_j)$ 가 되도록 $v_1(\cdot)$ 가 정해져서는 안된다는 것을 의미한다. 따라서 이러한 경우가 되는 오류의 크기를 $\epsilon_k (\epsilon_k \geq 0)$ 라 할 때

$$v_1(a_k) - v_1(a_i) - \epsilon_k \leq 0$$

를 제한식으로 하고 $\sum \epsilon_k$ 를 최소로 하는 선형계획법의 모형을 세우면 의사결정자의 쌍비교 결과를 최대로 만족하는 $v_1(\cdot)$ 의 α 값들을 결정할 수 있을 것이다. 그리고 모든 변수 값이 0이 되지 않도록 하기 위하여 LINMAP절차에서와 유사한 제한조건식을 추가하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^{12} \epsilon_k \\ \text{s. t.} \quad & -0.013670\alpha_1 + 0.053008\alpha_2 - 0.208286\alpha_3 - 0.003066\alpha_{12} \\ & -0.034869\alpha_{13} - 0.105982\alpha_{23} - 0.019491\alpha_{25} - \epsilon_1 \leq 0.0 \end{aligned}$$

표 3.1 벡터정규화한 의사결정상황

group속성 대안	G ₁			G ₂	G ₃		G ₄		G ₅
	c ₁ ¹	c ₂ ¹	c ₃ ¹	c ₁ ²	c ₁ ³	c ₂ ³	c ₁ ⁴	c ₂ ⁴	c ₁ ⁵
a ₁	0.127234	0.664627	0.820483	0.751802	0.855460	0.074747	0.524064	0.518223	0.113951
a ₂	0.113563	0.717635	0.612197	1.000000	0.343683	0.965656	1.000000	0.609339	0.600638
a ₃	0.705573	0.716615	0.852704	0.686920	0.486081	0.337373	0.000000	0.838268	0.578274
a ₄	0.447949	0.000000	0.883774	0.529351	0.603854	0.748484	0.708021	0.263097	0.494142
a ₅	0.135646	0.494393	0.000000	0.373841	0.611349	0.908080	0.310160	0.749430	1.000000
a ₆	0.399579	0.907237	0.918296	0.243048	0.345824	0.417171	0.454545	0.833712	0.233226
a ₇	0.231335	0.778797	0.785960	0.737384	0.000000	0.264646	0.552941	0.537585	0.252396
a ₈	0.508937	0.620795	0.203682	0.338825	0.262312	0.575757	0.868449	0.000000	0.000000
a ₉	0.000000	0.171253	1.000000	0.540679	0.998929	0.617171	0.593582	0.818906	0.463258
a ₁₀	0.107255	0.348623	0.969723	0.939208	0.485010	0.195959	0.879144	0.653758	0.904153
a ₁₁	0.119873	1.000000	0.669735	0.663367	0.744111	0.860606	0.408556	0.259681	0.071352
a ₁₂	0.371188	0.284403	0.673187	0.000000	0.186295	0.270270	0.549732	1.000000	0.441959
a ₁₃	1.000000	0.559633	0.410817	0.493305	0.702355	0.943434	0.391443	0.240318	0.467518
a ₁₄	0.944269	0.796126	0.332566	0.501544	0.000000	1.000000	0.922994	0.463553	0.775292
a ₁₅	0.623554	0.458715	0.822784	0.873326	0.376873	0.000000	0.439572	0.381548	0.425985

$$\begin{aligned}
 & -0.578339\alpha_1 + 0.051988\alpha_2 + 0.03221\alpha_3 + 0.421061\alpha_{12} \\
 & + 0.497252\alpha_{13} + 0.065745\alpha_{23} + 0.361765\alpha_{23} - \varepsilon_2 \leq 0.0 \\
 & -0.697624\alpha_1 - 0.716615\alpha_2 + 0.031070\alpha_3 - 0.505624\alpha_{12} \\
 & - 0.205759\alpha_{13} - 0.611061\alpha_{23} - 0.431148\alpha_{23} - \varepsilon_3 \leq 0.0 \\
 & -0.569927\alpha_1 - 0.222222\alpha_2 - 0.852704\alpha_3 - 0.438562\alpha_{12} \\
 & - 0.601645\alpha_{13} - 0.611061\alpha_{23} - 0.431148\alpha_{23} - \varepsilon_4 \leq 0.0 \\
 & -0.263933\alpha_1 - 0.412844\alpha_2 - 0.918296\alpha_3 - 0.295451\alpha_{12} \\
 & - 0.366932\alpha_{13} - 0.833113\alpha_{23} - 0.332894\alpha_{23} - \varepsilon_5 \leq 0.0 \\
 & -0.168244\alpha_1 - 0.128440\alpha_2 - 0.132336\alpha_3 - 0.182350\alpha_{12} \\
 & - 0.185112\alpha_{13} - 0.221009\alpha_{23} - 0.191293\alpha_{23} - \varepsilon_6 \leq 0.0 \\
 & 0.109358\alpha_1 - 0.286442\alpha_2 - 0.714614\alpha_3 - 0.046567\alpha_{12} \\
 & - 0.263271\alpha_{13} - 0.706668\alpha_{23} - 0.268542\alpha_{23} - \varepsilon_7 \leq 0.0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -0.124110\alpha_1 - 0.430174\alpha_2 + 0.173763\alpha_3 - 0.142772\alpha_{12} \\
 & - 0.078885\alpha_{13} - 0.277522\alpha_{23} - 0.105716\alpha_{23} - \varepsilon_8 \leq 0.0 \\
 & 0.389064\alpha_1 - 0.379205\alpha_2 - 0.466053\alpha_3 - 0.196073\alpha_{12} \\
 & + 0.023378\alpha_{13} - 0.543290\alpha_{23} - 0.015931\alpha_{23} - \varepsilon_9 \leq 0.0 \\
 & -0.435332\alpha_1 - 0.175331\alpha_2 - 0.128884\alpha_3 - 0.435811\alpha_{12} \\
 & - 0.210370\alpha_{13} - 0.138319\alpha_{23} - 0.185657\alpha_{23} - \varepsilon_{10} \leq 0.0 \\
 & 0.055731\alpha_1 - 0.236493\alpha_2 + 0.078251\alpha_3 - 0.192124\alpha_{12} \\
 & + 0.096786\alpha_{13} - 0.034858\alpha_{23} - 0.020103\alpha_{23} - \varepsilon_{11} \leq 0.0 \\
 & -0.320715\alpha_1 - 0.337411\alpha_2 + 0.490218\alpha_3 - 0.465723\alpha_{12} \\
 & + 0.199019\alpha_{13} + 0.112660\alpha_{23} - 0.014665\alpha_{23} - \varepsilon_{12} \leq 0.0 \\
 & 2.617741\alpha_1 + 3.220181\alpha_2 + 2.615650\alpha_3 + 2.090916\alpha_{12} \\
 & + 1.130408\alpha_{13} + 3.904478\alpha_{23} + 1.654823\alpha_{23} = 1.0
 \end{aligned}$$

$$e_h \geq 0, \quad h=1, 2, \dots, 12$$

위의 결과를 이용해 구한 UVF는

$$v_1(a_i) = \alpha_0 + 0.14820x_1 + 0.08372x_2 + 0.76808x_{23}$$

이다. 위의 LP문제의 결과는 1986년 Y. L. Chang과 R. S. Sullivan이 제시한 QSB 2.5판 (Quantitative Systems for Business Version 2.5)를 이용해 Big-M방법에 의해 해를 구한 것으로 반복 5단계에서 모든 $e_h=0$ 이고 목적함수 값이 0을 갖는다. 각 대안에 대한 $U_1(a_i) = \lambda_1 \cdot v_1(a_i)$ 을 계산한 결과는 다음의 표 3.2와 같다. 여기서 $a_6^1 = a_6$ 이므로 $x_1^1 = [0.399579, 0.$

907237, 0.918296]이다. 그리고 $p=2$ 이후의 단계에서 얻을 수 있는 최대값은 0.4이고 $C_1 = U_1(a_6) - 0.4 = 0.037679$ 이므로 대안 a_3 를 제거시킬 수 있다. 이것은 $p=1$ 까지의 그룹 속성의 중요도에 의해서 나머지 그룹의 속성값이 어떤 값을 갖더라도 순위가 뒤바뀔 수 없는 대안을 제거시킨 것이다. 다음으로 $p=2$ 에 대해 n_2 의 원소 수는 하나이고 그룹간에는 선호 독립관계를 갖기 때문에 가법성질에 따른 $U_2(a_i) = \lambda_1 \cdot v_1(a_i) + \lambda_2 \cdot v_2(a_i)$ 을 계산한 결과는 표 3.3과 같은데, 여기서 $p=3$ 이후의 단계에 얻을 수 있는 최대값이 0.15이므로 $C_2 = U_2(a_6) - 0.15 = 0.391474$ 보다 적은 값을 갖는 대안 a_1, a_8, a_9, a_{12} 와 a_{14} 를 제거시킬 수 있으므로 $m_3=9$ 임을 알 수

표 3.2 $U_1(a_i)$ 와 대안선별

대안	$v_1(a_i)$	$U_1(a_i)$	비고
a_1	0.444782	0.266869	
a_2	0.361097	0.216658	
a_3	0.616240	0.369744	
a_4	0.066386	0.039832	
a_5	0.025717	0.015430	제거
a_6	0.729465	0.437679	a_6^1
a_7	0.519512	0.311707	
a_8	0.198995	0.119397	
a_9	0.131536	0.078922	
a_{10}	0.276011	0.165606	
a_{11}	0.542211	0.325327	
a_{12}	0.210902	0.126541	
a_{13}	0.371639	0.222983	
a_{14}	0.406238	0.243743	
a_{15}	0.405953	0.243572	

표 3.3 $U_2(a_i)$ 와 대안선별

대안	$v_2(a_i)$	$U_2(a_i)$	비고
a_1	0.751802	0.454820	
a_2	1.000000	0.466658	
a_3	0.686920	0.541474	a_3^2
a_4	0.529351	0.172170	제거
a_5	0.373841	0.108890	제거
a_6	0.243048	0.498441	
a_7	0.737384	0.496053	
a_8	0.338825	0.204103	제거
a_9	0.540679	0.214091	제거
a_{10}	0.938208	0.400158	
a_{11}	0.633367	0.483669	
a_{12}	0.000000	0.126541	제거
a_{13}	0.493305	0.456243	
a_{14}	0.501544	0.369129	제거
a_{15}	0.873326	0.461904	

있다. 따라서 $A_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{13}, a_{15}\}$ 이다. 이 단계에서는 전단계의 최적대안 a_6 이 현재의 최적대안 a_3 으로 바뀌었는데, 이것은 전 단계에서의 이들 대안간의 효용의 차 $0.067935 (=U_1(a_6) - U_1(a_3))$ 를 이번 단계에서의 대안간의 차 0.443872 에 따른 효용이 상쇄하고 남음을 의미한다. $a_2^2 = a_3$ 으로 변화하였으므로 $x_2^2 = [0.705573, 0.716615, 0.852704, 0.686920]$ 이다. 그러므로 A_2 에 대해 $p=3$ 으로 하고 대안간의 쌍비교를 통해 L.P를 이용해 $v_3(a_i)$ 를 구하는 과정을 반복하게 된다. 여기서

$$a_2Pa_1, a_2Pa_3, a_3Pa_6, a_7Pa_6, a_{11}Pa_6, a_{11}Pa_{10}, a_{13}Pa_3, a_{13}Pa_7, a_{13}Pa_{11}, a_{13}Pa_{15}$$

의 쌍비교 결과를 얻었다면

$$v_3(a_i) = a_0 + 0.36268x_1 + 0.63732x_2$$

이 되고 표 3.4와 같이 $U(a_3) = 0.580605$ 와 $C_3 = 0.530605$ 를 이용해서 $A_3 = \{a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}\}$ 을 다시 구할 수 있을 것이다. 여기서 $a_3^3 = a_3$ 으로 변하지 않았음을 알 수 있다. 현재 6개의 대안이 남아 있으므로 $p=4$ 에 대해

$$a_2Pa_3, a_2Pa_6, a_6Pa_7, a_7Pa_{11}, a_{11}Pa_{13}$$

을 얻었다면

$$v_4(a_i) = a_0 + 0.75060x_1 + 0.24940x_2$$

이다. 이들로부터 구한 $U(a_i)$ 는 표 3.5와 같다. 여기서 $U_4(a_3) = 0.588968$ 과 $C_4 = 0.578968$ 을 이용해 $A_4 = \{a_3, a_{11}\}$ 을 구할 수 있다. 그러나 지금까

지의 결과 a_4^4 와 나머지 G_3 에 속한 하나의 속성을 비교할 때 완전 지배관계를 갖는다. 즉, 아직 고려하지 않은 속성이 하나 더 남아 있지만 더 이상의 계산과정을 필요로 하지 않는다. 따

표 3.4 $U_3(a_i)$ 와 대안선별

대안	$v_3(a_i)$	$U_3(a_i)$	비고
a_1	0.357869	0.490609	제거
a_2	0.740079	0.540666	
a_3	0.391306	0.580605	a_3^3
a_6	0.391295	0.537750	
a_7	0.531344	0.549187	
a_{10}	0.300792	0.430237	제거
a_{11}	0.818356	0.565505	
a_{13}	0.855999	0.541842	
a_{15}	0.136684	0.475572	제거

표 3.5 $U_4(a_i)$ 와 대안선별

대안	$v_4(a_i)$	$U_4(a_i)$	비고
a_2	0.902569	0.576768	제거
a_3	0.209064	0.588968	a_3^4
a_6	0.549111	0.559534	제거
a_7	0.549109	0.571151	제거
a_{11}	0.371427	0.580362	
a_{13}	0.353752	0.555992	제거

라서 하나의 최적해를 제외한 모든 대안들이 제거되었으므로 대안 a_{11} 이 최종의 최적대안(final optimal solution)이어서 $x_4^3 = [0.705573, 0.716615, 0.852704, 0.686920, 0.486081, 0.337373, 0.000000, 0.838268, 0.578274]$ 임을 알 수 있다.

다음의 표 3.6은 절단범위 C_p 를 C_p 보다 증가시켜감에 따라 제거되고 남은 대안들이 각 단계 별로 어떻게 되는지를 보여주고 있다. 여기서

$$C'_p = U(a_i) - \rho(1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i)$$

의 관계를 갖기 때문에 ρ 는 C_p 를 조정하기 위한 상수이고 $0 < \rho \leq 1$ 인데, 만약 $\rho = 1.0$ 이면 $C_p = C'_p$ 이다. 위의 예제에서 즉, $C_p = C'_p$ 일 경우 $p=4$ 에서 최종의 최적대안 a_3 를 얻었는데 $p=1.0$ 에서 ρ 를 점차 감소시켜 0.1까지 변화시켜 나가면 a_6 만 남고 a_3 가 제거된다. 이러한 사실은 본 예제에서 ρ 를 0.2까지 변화시켜도 최적

대안을 보장하는데 별다른 문제가 발생하지 않는다는 것을 의미한다. 또한, $p=2$ 이후에는 ρ 를 아주 적게 즉, 절단범위를 아주 크게 설정해도 문제가 없음을 알 수 있다.

따라서 의사결정자가 어느 정도 합리적인 범위(예를 들어 $\rho \geq 0.5$)에서 절단범위를 상향조정하여 빨리 해에 도달하고자 하는 경우, 최적 해에는 큰 영향을 주지 않으면서 전체적인 계산량이나 요구정보량을 대폭 줄일 수 있음을 알 수 있다.

지금까지의 수치 예를 통해, 본 연구에서와 같이 속성의 그룹간에는 선호 독립관계를 갖지만 그룹 내의 속성간에 보다 현실적인 선호 종속관계를 갖는 의사결정 상황에 대해 기존의

표 3.6 ρ 의 변화에 의한 pE 계에서 제거되고 남은 대안

ρ	1	2	3	4	5
1.0	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{13}, a_{15}$	$a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}$	a_3, a_{11}	a_3
0.9	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}, a_1$	$a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}$	a_3, a_{11}	—
0.8	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}, a_1$	$a_2, a_3, a_7, a_{11}, a_{13}$	a_3	—
0.7	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}, a_1$	a_3, a_7, a_{11}	—	—
0.6	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$	$a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{13}, a_1$	a_3, a_{11}	—	—
0.5	$a_1, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{14}, a_{15}$	$a_2, a_3, a_6, a_7, a_{11}$	a_3, a_{11}	—	—
0.4	a_3, a_6, a_7, a_{11}	a_3, a_6, a_7, a_{11}	a_3, a_{11}	—	—
0.3	a_3, a_6, a_{11}	a_3, a_6	a_3	—	—
0.2	a_3, a_6	a_3	—	—	—
0.1	a_6	—	—	—	—

연구결과를 적용한다는 것은 매우 어려운 일임을 알 수 있다. 또한, 기존의 방법은 선호독립을 가정하는 경우라도 모든 속성을 고려해야만 최적해를 구할 수 있지만, 본 연구에서 제시한 방법은 일부의 속성간의 선호 종속성을 허용하는 경우에도 최적해를 보장하면서 전체 속성을 동시에 고려하지 않아도 되기 때문에 보다 효율적으로 의사결정자를 도울 수 있으며 해에 빨리 도달할 수 있다.

4. 결 론

일반적으로 제품의 선택·평가 문제 등에서 접하게 되는 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making; MADM)문제는 대안과 속성의 수가 매우 많은 것이 보통이기 때문에 이것들을 모두 합리적으로 고려하여 최적대안을 선정한다는 것은 시간적으로나 정신적으로 많은 어려움이 따를 수 있다.

그러나 지금까지의 주요한 연구·개발 기법들 중 수리적 방법들은 주어진 문제에 대한 모형이나 선호구조에 제약을 가하여 최적해(optimal solution)를 구할 수 있지만 의사결정자의 입장을 거의 반영할 수 없으며, 이를 개선하기 위한 기존의 대화형 접근방법 역시 전체의 대안과 속성을 고려해야 하기 때문에 이들의 수가 많으면 많을 수록 쌍비교등으로 발생하는 경우의 수가 기하급수적으로 많아져서 의사결정자가 제공해야 하는 정보의 양이 매우 많아진다는 어려움을 내포하고 있다. 또한, 지금까지의 방법들은 대부분 속성간의 선호독립성(preferential independence)을 가정하고 있기 때문에 현실성이 부족하다.

따라서, 본 연구는 이러한 기존의 여러 가지의 문제점을 좀 더 현실적인 입장에서 보완하기 위하여 대안과 속성의 수가 매우 많은 다속성 의사결정문제에 적용시켜 속성의 그룹화를 통해 최적해일 가능성이 적은 대안을 점차적으로 제거시킴으로써 의사결정자에게 도움을 줄 수 있는 대화형 접근방법을 구축하는데 목적이 있다.

특히, 본 연구에서는 대안제거를 위한 절단범위(cutting range)의 폭을 조정할 수 있도록 하여 고려해야 할 대안의 수를 대폭 줄일 수 있어서 해에 훨씬 빨리 수렴(convergence)할 수 있으면서도 해가 얻어지는 과정을 쉽게 알 수 있다. 반면, 절단범위 C_n 를 C_0 보다 너무 크게 설정하면 최적해를 놓칠 가능성이 있다. 이러한 가능성은 빨리 해에 도달하는 잇점과 비교하여 의사결정자가 감수할 만한 위험이라고 판단하였다면 별 문제가 없을 것이다. 사실 이러한 것을 좀 더 효율적으로 해결하는 것이 의사결정자의 입장을 더 잘 반영하는 방법이라고 생각되며, 앞으로의 지속적인 연구가 필요하다 하겠다.

참 고 문 헌

- [1] Barron, H., and Schmidt, C. P., "Sensitivity Analysis of Additive Multi-attribute Value Models", *Operations Research Society of America*, Vol.36(1988), PP.122-127.
- [2] Benayoun, R., Montgolfier, J.D., Tergny, J., and Larichev, O., "Linear Programming with Multiple Objective Function

- : STEp Method(STEM)", *Mathematical Programming*, Vol.1(1971), PP. 366-375.
- [3] Chankong, V., and Haimes, Y.Y., "The Interactive Surrogate Worth Trade-off (ISWT) Method for Multi-objective Decision Making", in S. Zionts(ed.), *Multiple Criteria Problem Solving*, Springer-Verlag, Verlin, 1978.
- [4] Costa, C. A., *Reading in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] Dyer, J. S., "Interactive Goal Programming", *Management Science*, Vol. 19, No.1(1972), PP. 62-70.
- [6] Dyson, R. G., "Maximum Programming, Fuzzy Linear Programming, and Multi-Criteria Decision Making", *Journal of Operations Research Society*, Vol. 31 (1980), PP. 263-267.
- [7] Ecker, J. G., Hegner, N. S., and Kouada, I. A., "Generating all Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 30(1980), PP. 353-381.
- [8] _____, and Kouada, I. A., "Finding Efficient Points for Multiple Objective Linear Programs", *Mathematical Programming*, Vol. 8(1975), PP. 375-377.
- [9] Evans, J. P., and Steuer, R. E., "A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs", *Mathematical Programming*, Vol. 5(1973), PP. 54-72.
- [10] French, S., "Interactive Multi-objective Programming: Its aims, Applications and Demands", *Journal of Operations Research Society*, Vol. 35(1984), PP. 827-834.
- [11] Gal, T. A., "General Method for Determining the Set of all Efficient Solutions to a Linear Vector Maximum Problem", *European Journal of Operations Research*, Vol. 2(1977), PP. 307-322.
- [12] Geoffrion, A. M., Dyer, J. S., and Feinberg, A., "An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department", *Management Science*, Vol. 19(1972), PP. 357-368.
- [13] Goicoechea, A., Hansen, D. R., and Duckstein, L., *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Application*, John Wiley and Sons, New York, 1982.
- [14] Haimes, Y. Y., Hall, W. A., and Freedman, H.T., *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems: The Surrogate Worth Trade-off Method*, Elsevier, The Netherlands, 1975.
- [15] Hultz, J. W., Klingman, D, Ross, G. T., and Soland, R. M. "An Interactive Computer System for Multicriteria Facility Location", *Computers and Operations Research*, Vol. 8(1981), PP. 249-261.
- [16] Hwang, C.L. and Yoon, K. S., *Multiple Attribute Decision Making*, Lecture

- Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [17] Keeney, R. L., and Raiffa, H., *Decision with Multiple Objectives : Preference and Value tradeoffs*, John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [18] Köksalan, M., "Identifying and Ranking a Most Preferred Subset of Alternatives in the Preference of Multiple Criteria", *Naval Research Logistics*. Vol. 36(1989), PP. 359-372.
- [19] Korhonen, P., Moskowitz, H., Salminen, P., and Wallenius, J., "Further Developments and Tests of a Progressive Algorithm for Multiple Criteria Decision Making", *Operations Research*, Vol. 41, No.6(1993), PP. 1033-1045.
- [20] _____, and Talavage, J., "A Trade-off Cut Approach to Multiple Objective Optimization", *Operations Research*, Vol.28(1980), PP. 225-232.
- [21] Paolucci, M., and Pesenti, R., "Assessing a New Utility/Cost Function for Multiattribute Decision Making", *Operations Research Letters*, Vol. 12 (1992), PP.331-336.
- [22] Rosinger, E. E., "Interactive Algorithm for Multiobjective Optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 35(1981), PP. 339-365.
- [23] Steuer, R. E., "Multiple Objective Linear Programming with Interval Criterion Weights", *Management Science*. Vol. 23(1976), PP. 305-316.
- [24] _____, and Choo, E. U., "An Interactive Weighted Tchebycheff Procedure for Multiple Objective Programming", *Mathematical Programming*, Vol. 26(1983), PP. 326-344.
- [25] Wallenius, J., "Comparative Evaluation of Some Interactive Approaches to Multicriterion Optimization", *Management Science*, Vol. 21(1975), PP. 1387-1396.
- [26] Wehrung, D. A., "Interactive Identification and Optimization using a Binary Preference Relation", *Operations Research*, Vol. 26(1978), PP.322-331.
- [27] White, D. J., "Multi-Objective Interactive Programming", *Journal of Operations Research Society*, Vol. 31(1980), PP. 517-523.
- [28] Yu, P. L., "Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 7 (1974), PP. 319-377.
- [29] _____, and Zeleny, M., "The Set of all Non-dominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 49 (1975), PP. 430-468.
- [30] Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.
- [31] Zionts, S., and Wallenius, J., "An Interactive Programming Method for

Solving the Multiple Criteria Problem”, *Management Science*, Vol. 22 (1976), PP. 652-663.

- [32] _____, and _____, “An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Nonlinear Utility Functions”, *Management Science*, Vol. 29(1983), PP. 519-529.