

## 사진렌즈 설계에서 SVD에 의한 감쇠최소자승법의 수렴성과 안정성

김 태희

영남대학교 물리학과

김 경찬

제명대학교 물리학과

(1995년 1월 5일 받음)

렌즈 설계에 적합한 감쇠계수를 결정하는 방법을 연구하였다. 구해진 감쇠계수를 additive 감쇠최소자승법에 도입하였을 때, triplet형 사진렌즈 설계에서 최적화 과정의 수렴성과 안정성에 관해서 조사하였다. 오차함수의 Jacobian 행렬의 곱에 대한 고유값을 SVD(singular value decomposition)를 통해 구한 후 고유값들의 중간치를 적합한 감쇠계수로 결정하였다. 적합한 감쇠계수를 이용하여 triplet형 사진렌즈를 최적화한 결과 수렴성과 안정성이 향상되었다. 직교변환 방법으로 Jacobian 행렬의 해를 구하면 정규방정식을 사용하여 해를 구할 때 발생하는 수치적 부정확성을 개선할 수 있었다. 적합한 감쇠계수 선택법과 Jacobian 행렬의 직교변환 방법을 같이 사용하는 것이 고차의 항들을 가지는 비구면 렌즈 설계에 유용함을 알 수 있었다.

### I. 서 론

최적화 방법에 의한 광학계 설계는 반복적인 과정을 거쳐서 오차(광학계의 수차 또는 제한 조건) 함수의 제곱 항들의 합으로 정의되는 merit 함수를 최소화하는 설계 변수를 구함으로써 최적의 성능을 가진 광학계를 찾아내는 것이다. 최소자승법을 사용한 최적화 기법은 최적화 과정 동안 오차 함수의 비선형성과 계산에서의 수치적 부정확성으로 인해 최적점에 수렴하지 못하고 merit 함수가 진동하는 경우가 자주 발생한다.

설계 변수에 대한 오차 함수의 비선형성에 의해 merit 함수가 진동하는 현상은 스칼라량인 감쇠항을 도입하여 변수의 변화량을 제한해 주는 감쇠최소자승법을 사용함으로서 보정되어지는데, 이 방법은 현재 광학계 설계에서 가장 널리 사용하고 있는 최적화 기법이다. 감쇠최소자승법에서 감쇠항은 설계 변수의 변화량의 크기를 제한해 주는 스칼라량인 감쇠계수와 스케일 행렬의 곱으로 구성된다. 감쇠최소자승법은 스케일 행렬에 따라 additive 감쇠와 multiplicative 감쇠 등으로 나눌 수 있다. Additive 감쇠에서는 스케일 행렬로서 단위 행렬을 사용하여 모든 설계 변수를 동일하게 취급하는데 반해, multiplica-

tive 감쇠에서는 스케일 행렬로서 오차 함수의 1계 미분을 사용하여 변수간의 각각 다른 비선형도를 고려해 준다.<sup>[1]</sup>

감쇠최소자승법을 사용한 최적화 과정의 수렴 속도와 안정성은 최적화의 초기에 선택한 감쇠계수에 전적으로 의존하기 때문에 감쇠계수 선택 방법에 대한 연구가 수행되어 왔다. Wynne와 Wormell은 오차 함수의 실제 개선치와 선형 예언 개선치 사이의 모순도를 기초로 하여 감쇠계수를 계산하는 방법을 제안하였으며<sup>[2]</sup>, Jamieson은 일련의 감쇠계수에 대한 merit 함수값을 구한 뒤 curve fitting에 의해 적합한 감쇠계수를 찾는 방법을 제안하였다.<sup>[3]</sup> Matsui와 Tanaka는 additive 감쇠를 사용한 최적화에서 오차 함수에 대한 Jacobian 행렬의 곱의 고유값들과 감쇠계수 사이의 관계를 분석하여 고유값들의 중간치를 최적의 감쇠계수로 택하는 방법을 제안하였다.<sup>[4]</sup>

구하여진 해의 정확도를 지시하는 조건수는 행렬의 최소 singular value에 대한 최대 singular value의 비로 계산된다.<sup>[5]</sup> LU factorization을 사용하여 정규 방정식의 해를 구하면 대칭(혹은 정규 방정식) 행렬 ( $A^T A$ )의 조건수가 오차 함수에 대한 Jacobian 행렬  $A$ 의 조건수의

제곱배가 되기 때문에 불량 조건(ill-condition)이 발생하여 해가 부정확해지기 쉽다.<sup>[6]</sup> 이를 방지하기 위해 부정확한 수치 계산의 가능성이 있는 ( $A^T A$ )의 계산을 피하고 QR factorization<sup>[7]</sup>, SVD(singular value decomposition)<sup>[8,9]</sup> 방법의 직교 변환을 사용하여  $A$ 를 직접 변환시킨 뒤 이를 이용하여 해를 구하는 해법들이 발표되었다.<sup>[10,11,12]</sup>

본 연구에서는 Matsui와 Tanaka가 시도한 ( $A^T A$ )의 고유값들의 중간치를 감쇠계수로 사용하는 additive 감쇠최소자승법의 수렴성과 안정성을 알아보기 위하여, 첫째 이 등과 김 등에 의해 발표된 최적화 기법을 이용한 double-Gauss형 사진렌즈계 설계<sup>[13,14]</sup>를 고유값들의 중간치를 감쇠계수로 사용하여 최적화 해보았으며 둘째 triplet 사진렌즈계(초점거리: 50 mm, F-수: 3.5, 시계각: ± 15°) 설계에 적용하여 보았다. 이때 해법으로는 LU factorization을 사용하였다. 셋째 최적화의 해를 구하는 과정에서 수치 계산의 안정성을 높이기 위하여 오차 함수에 대한 Jacobian 행렬  $A$ 를  $A'$ 로 변경한 뒤 변경된  $A'$ 에 QR factorization과 SVD 방법을 적용하여 해를 구하고, 변경된 Jacobian 행렬의 곱( $A'^T A'$ )에 LU factorization<sup>[15]</sup>을 적용하여 해를 구한 경우와 비교하였다.

## II. 정규 방정식의 해

상호 독립인  $n$ 개의 설계 변수  $x_i$ 로 이루어진  $m$ 개의 오차 함수는

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \mu_i(g_i - t_i), \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

이며,  $\mu_i$ 는 가중치,  $g_i$ 는 광학계의 수차 또는 제한 조건,  $t_i$ 는  $g_i$ 에 대한 목표치이다. 이러한 오차 함수의 제곱 합들의 합으로 이루어진 merit 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\phi = \sum_{i=1}^m f_i^2. \quad (2)$$

설계 변수  $x_0$ 로 주어진 초기 설계에서  $\phi$ 는 최소값을 가지지 않기 때문에  $\phi$ 를 최소로 하는 설계를 생성하는 변수의 변화량 ( $x_i - x_0$ )를 구하여야 한다.

$\phi$ 가 최소일 때  $\text{grad } \phi = 0$ 이 되므로, 함수  $\text{grad } \phi$ 가 0이 되는  $n$ 개의 설계 변수의 변화량을 구하기 위해 Newton-Raphson 방법을 사용하면

$$\sum_{j=1}^n \frac{d(\text{grad } \phi_k)}{dx_j} (x_j - x_{0j}) = -\text{grad } \phi_k, \quad (k=1, \dots, n), \quad (3)$$

이 되며,  $\text{grad } \phi_k$ 는 벡터  $\text{grad } \phi$ 의  $k$ 번째 성분이다. (2)식을 (3)식에 대입하면

$$2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left( \frac{df_i}{dx_j} \frac{df_i}{dx_k} + f_{0i} \frac{d^2 f_i}{dx_j dx_k} \right) (x_j - x_{0j}) = - \sum_{i=1}^m f_{0i} \frac{df_i}{dx_k}, \quad (k=1, \dots, n) \quad (4)$$

로 쓸 수 있으며,  $f_{0i}$ 는  $x_0$ 에서의  $f_i$  값이다. (4)식의  $df_i/dx_j$ 를  $a_{ij}$ 로 두면

$$2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left( a_{ij} a_{ik} + f_{0i} \frac{d^2 f_i}{dx_j dx_k} \right) (x_j - x_{0j}) = -2 \sum_{i=1}^m f_{0i} a_{ik}, \quad (k=1, \dots, n) \quad (5)$$

이 된다. 이들을 벡터와 행렬의 형태인  $X$ ,  $X_0$ ,  $F_0$ ,  $A$ 로 표현한 뒤 (5)식의 2계미분항을 무시하면 최소자승법의 정규 방정식인 (6)식이 주어지고, 2계미분항을  $\rho I$ 로 근사시키면 additive 감쇠를 사용하는 감쇠최소자승법의 정규 방정식인 (7)식이 주어진다.<sup>[16]</sup>

$$A^T A(X - X_0) = -A^T F_0, \quad (6)$$

$$(A^T A + \rho I)(X - X_0) = -A^T F_0. \quad (7)$$

(7)식에서 스칼라량인  $\rho$ 는 감쇠계수이며 단위 행렬인  $I$ 는 스케일 행렬인데, 스칼라 행렬  $\rho I$ 를 감쇠 행렬이라고 부르는 대각 행렬  $D$ 로 두고 해 벡터  $(X - X_0)$ 를  $\Delta X$ 로 두면 (8)식이 얻어진다.

$$(A^T A + D)\Delta X = -A^T F_0. \quad (8)$$

(8)식을 (6)식의 형태와 동일하게 하기 위해

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ D^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$F'_0 = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

을 사용하여 (8)식을 다시 쓰면 (11)식이 된다.<sup>[10]</sup>

$$(A'^T A')\Delta X = -A'^T F'_0. \quad (11)$$

(11)식의  $\Delta X$ 를 계산하는 해법으로 다음의 factorizations (LU, QR, SVD)을 사용하였다.

첫째 정규 방정식 행렬 ( $A'^T A'$ )를 상삼각 행렬  $L$ 과 하삼각 행렬  $U$ 의 곱으로 표현하는 LU factorization에 의해 해를 계산하는 과정은

1단계 :  $(A'^T A')$ 와 벡터( $-A'^T F'_0$ )를 구한다.

2단계 :  $(A'^T A')$ 의 LU factorization을 실시한다.

3단계 :  $LY = -A'^T F_0'$ 의 벡터  $Y$ 를 구한 뒤  $U\Delta = Y$ 를 풀어서  $\Delta X$ 를 계산한다.

위 방법으로 정규 방정식의 해 벡터를 계산할 때 사용하는  $(A'^T A')$ 는  $A'$ 의 조건수의 제곱배인 조건수를 가지는데, 이로 인해  $A'$ 가 단지 보통의 불량 조건이더라도  $(A'^T A')$ 는 격심한 불량 조건이 된다. 불량 조건은 계산된 해의 부정확성을 초래한다. 계산 과정에서 나타나는 이러한 수치적 문제의 발생 가능성을 피하기 위해 변경된 Jacobian 행렬인 비정방 행렬  $A'$ 를 직접 활용하는 다음의 해법들이 사용된다.

둘째  $A'$ 를  $(m+n) \times (m+n)$ 의 직교 행렬  $Q$ 와  $(m+n) \times n$ 의 상삼각 행렬  $R$ 의 곱으로 표현하는 QR factorization에 의해 해를 계산하는 과정은

1단계 :  $A'$ 의 QR factorization을 실시한다.

$$A' = QR. \quad (12)$$

2단계 : (12)식을 (11)식에 대입하여 얻은  $R\Delta X = -Q^T F_0'$ 를 풀어서  $\Delta X$ 를 계산한다.

셋째  $A'$ 를  $(m+n) \times (m+n)$ 의 직교 행렬  $U$ ,  $(n \times n)$ 의 직교 행렬  $V$  그리고 대각 성분  $t_{ij}$  (singular value), ( $j=1, 2, \dots, n$ )가

$$t_{11} \geq t_{22} \geq \dots \geq t_{nn} \geq 0,$$

인  $(m+n) \times n$ 인 대각 행렬  $T$ 의 곱으로 표현하는 SVD에 의해 해를 구하는 과정은

1단계 :  $A'$ 의 SVD를 실시한다.

$$A' = UTV^T. \quad (13)$$

2단계 : (13)식을 (11)식에 대입하여 얻은  $\Delta X = -(VT^T U^T)F_0'$ 를 풀어서  $\Delta X$ 를 계산한다. 여기서  $T^T$ 는  $T$ 의 pseudoinverse라고 불리는 대각 행렬로서 대각 성분  $t_{ij}^{-1}$ 는 아래 식에 의해 구해진다.

$$t_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1/t_{jj} & : t_{jj} \neq 0; \\ 0 & : t_{jj} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

### III. 최적 감쇠계수 선택 방법

벡터들의 유클리디안 norm(원점으로부터의 거리를 나타내는 개념과 일치함)은 직교 변환에 의해 변하지 않는다는 성질을 이용하여 (6)식과 (8)식의 해 벡터를 직교 행렬  $V$ 를 사용하여 아래와 같이 직교 변환시킨다.

$$\Delta X_{LS}' = V^T \Delta X_{LS}, \quad \Delta X_{DLS}' = V^T \Delta X_{DLS}.$$

$A$ 의 SVD는  $A$ 를  $UTV^T$ ,  $(A^T A)$ 의 eigen value decomposition은  $(A^T A)$ 를  $VSV^T$ 로 변환시키며, 행렬  $S$ 의 대각 성분은  $(A^T A)$ 의 고유값이 된다. 이들을 (8)식에 대입하면 (15)식이 주어진다.

$$(S+D)\Delta X_{DLS}' = Y, \quad (15)$$

$$Y = -T^T U^T F_0. \quad (16)$$

(15)식에서  $(S+D)$ 는 대각 행렬이므로  $\Delta X_{DLS}'$ 와  $\Delta X_{LS}'$   $k$ 번째 성분은

$$\Delta X_{DLS,k}' = \frac{y_k}{(s_k + d_k)}, \quad \Delta X_{LS,k}' = \frac{y_k}{s_k}, \quad (17)$$

으로 쓸 수 있다.

감쇠항은 설계 변수의 변화량을 줄여주기 때문에 감쇠최소자승법에 의해 구한 해 벡터의 유클리디안 norm은 0보다는 크고 최소자승법에 의해 구한 해 벡터의 유클리디안 norm보다는 작다. 최적의 감쇠계수를 사용했을 때 유클리디안 norm은

$$||\Delta X_{DLS}'|| = \frac{||X_{LS}'||}{2}, \quad \cdot \quad (18)$$

i) 된다. (17)식을 (18)식에 대입하면  $s_k = d_k$ , ( $k=1, 2, \dots, n$ )라는 관계가 얻어지고 additive 감쇠최소자승법에서  $D$ 는  $\rho I$ 이므로

$$\begin{aligned} ||\Delta X_{DLS}'|| &= \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{(s_i + \rho)} \right)^2 \right)^{1/2} > \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{(2s_i)} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{||\Delta X_{LS}'||}{2}, \quad \rho = s_{min}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$||\Delta X_{DLS}'|| < \frac{||\Delta X_{LS}'||}{2}, \quad \rho = s_{max}, \quad (20)$$

인 관계식이 주어진다. (19)식과 (20)식으로부터 감쇠계수는 고유값들의 최소치와 최대치 사이에 존재해야 하고,  $\rho$ 가 고유값들의 중간치일 경우  $||\Delta X_{DLS}'||$ 는  $||\Delta X_{LS}'||/2$ 로 근사됨을 알 수 있다. 따라서 최적의 감쇠계수는

$$\begin{aligned} \rho &= s_{(n-1)/2}, & n &= 홀수, \\ (s_{(n)/2} + s_{(n/2)-1})/2, & n &= 짝수, \end{aligned} \quad (21)$$

에 의해 계산된다. 여기서 고유값들( $s_1, s_2, \dots, s_n$ )은 내림차순으로 정렬하였다.

### IV. 수치 계산에 의한 최적 감쇠계수의 선택 방법

감쇠계수의 최적 차수를 구하는 (21)식의 유효성을

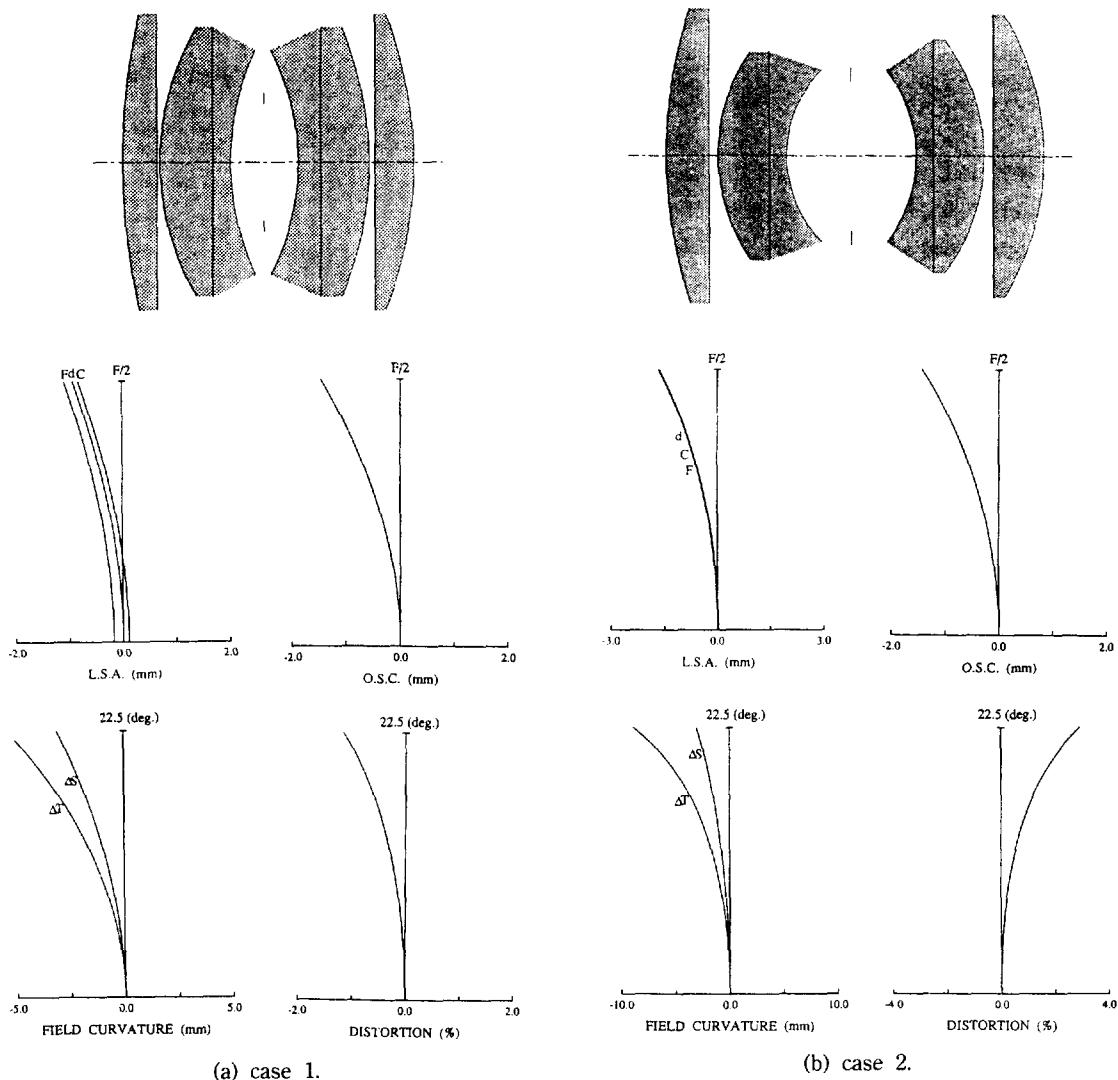


그림. 1. Initial configuration and finite ray aberrations.

증명하기 위해 이종웅 등(case 1)<sup>[13]</sup>과 김기태 등(case 2)<sup>[14]</sup>에 의해 설계된 double-Gauss형 사진렌즈계의 최적화를 조사하였다. 그림 1에 나타낸 초기 설계의 형태와 수차를 비롯해서 최적화의 모든 조건은 case 1, 2에서 사용한 것과 동일하게 하였으며, additive 감쇠를 사용한 감쇠최소자승법에 의해 최적화를 실시하였다.

대칭 행렬의 singular values는 그 행렬의 고유값들의 절대치와 동일하므로, 대칭 행렬 ( $A^T A$ )의 고유값을 구하기 위해 최적화의 초기 단계에서 ( $A^T A$ )의 SVD를 실시하였다. 얻어진 고유값들의 분포를 그림 2에 정리하

였다.

10개의 짹수 설계 변수를 사용하므로 (21)의 짹수 식을 사용하여 계산한 고유값들의 중간치는 각각  $1.9 \times 10^{-1}$ 과 1.0이다. 고유값의 최소, 중간, 최대 근방에서 표 1과 같이 감쇠계수를 선택하여 최적화를 실시하였다.

초기 설계의 merit 함수값을  $\phi_0$ 로 두었을 때 최적화 동안 감쇠계수에 대한  $\phi/\phi_0$ 의 변화를 그림 3에 나타내었다.

그림 3에서 감쇠계수가 고유값의 최소에 가까울 때는 merit 함수가 매우 불안정하게 진동하여 최적화가 진행

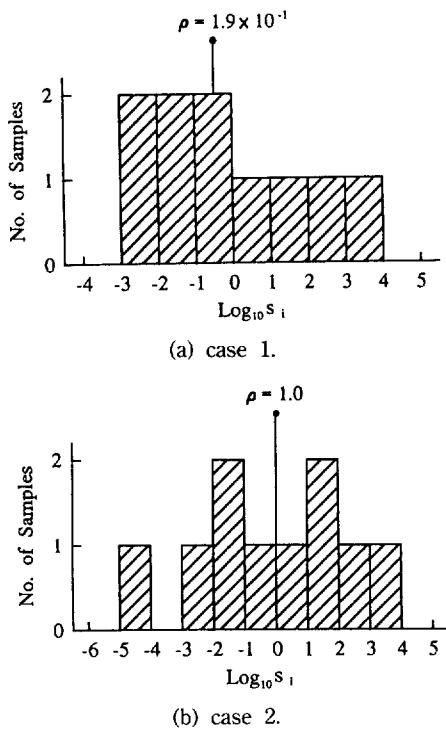
그림 2. Distribution of the eigenvalues of  $(A^T A)$ .

표 1. Three different damping factors for two cases.

damping factor ( $\rho$ )			
case 1	$1.9 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-1}$	$5.0 \times 10^1$
case 2	$5.0 \times 10^{-3}$	1.0	$5.0 \times 10^1$

되지 않음을 알 수 있는데, 이는 감쇠계수가 너무 작아서 변경된 Jacobian 행렬의 꼽인  $(A'^T A')$ 를 적절한 조건수를 가진 행렬로 충분히 보정하지 못하였기 때문이라고 생각된다. 즉, 최적화 초기에  $(A^T A)$ 의 조건수는  $1.0 \times 10^6$ 과  $1.1 \times 10^7$ 이었는데 고유값의 최소를 감쇠계수로 사용한  $(A'^T A')$ 의 조건수는  $7.7 \times 10^5$ 과  $1.1 \times 10^7$ 로 되었다. 그러나 감쇠계수가 고유값의 중간일 때는  $(A'^T A')$ 의 조건수가  $1.4 \times 10^4$ ,  $1.3 \times 10^3$ 로 적절하게 보정되므로 불안정성이 현저하게 감소되어 안정하면서 수렴 속도가 빠르게 최적점에 수렴하였다. 또한 감쇠계수의 차수가 고유값들의 중간보다 크면 해 벡터의 유클리디안 norm이 너무 작아져서 30회 안에 최적점에 수렴하지 못하고 있음을 알 수 있다.

최적화된 최종적인 사진렌즈계의 형태와 수차를 그림 4에 나타내었다.

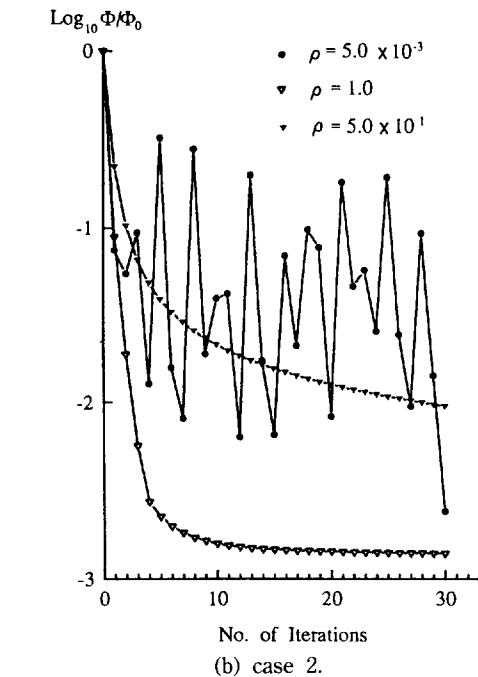
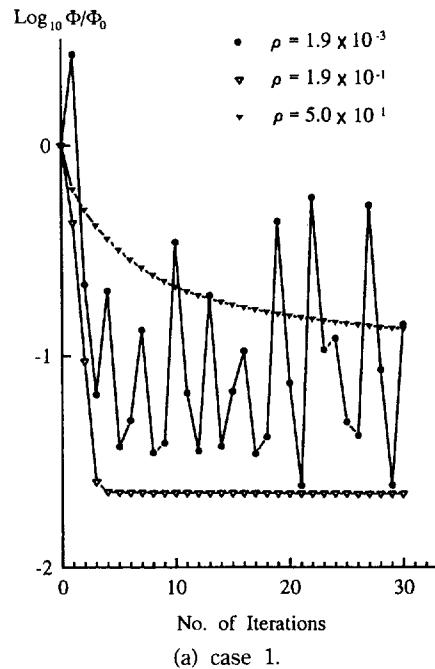


그림 3. Comparison of the rates of convergence and the stability of the optimizations by three different damping factors.

이상의 결과로부터 감쇠계수가 (21)식을 만족할 때 최적화의 수렴성과 안정성이 가장 좋음을 확인할 수

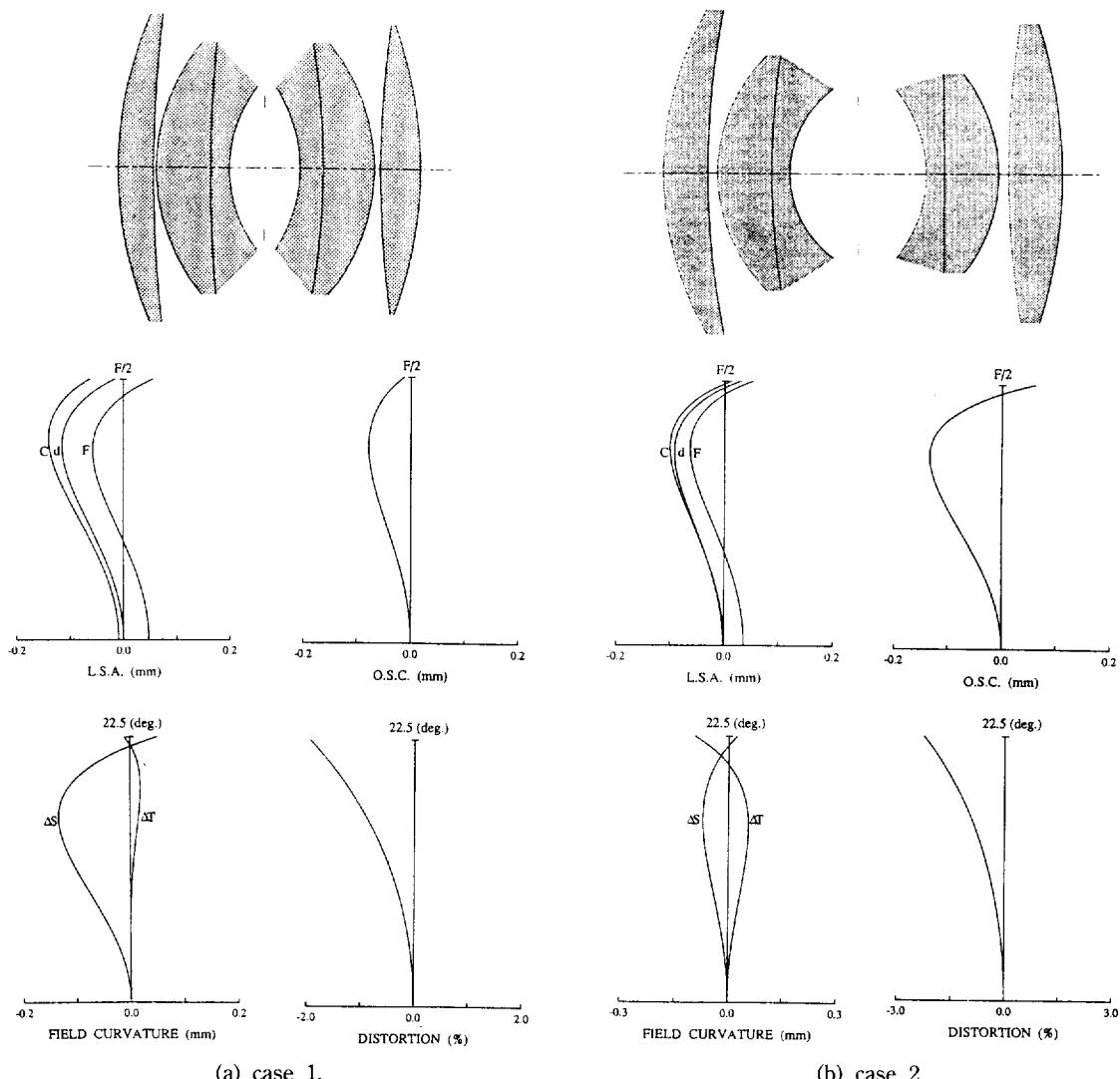


그림 4. Final configuration and finite ray aberrations.

있었다.

## V. 사진렌즈계 설계에 적용

최적화에서 수렴성과 안정성을 결정해 주는 (21)식을 triplet 사진렌즈계 설계(case 3)에 직접 적용하였다.

최적화에 사용하는 초기 설계의 제원을 구하기 위하여 Kingslake에 의해 설계된 triplet 사진렌즈계<sup>[17]</sup>를 참고하였다. 전체 굴절능과 종 색수차와 Petzval sum과 횡 색수차의 목표치를 0.2, 0.0037, -0.0037, 0.0039로 정한 다음 표 2의 초자값들을 schwarzschild가 제안한 반복

표 2. Data of chosen glasses.

element	glass	$n_d$	$\xi$ -value
a, c	SK-16	1.6204	60.28
b	F-4	1.6166	36.61

적인 근사법에 대입하여 풀어서 단 렌즈(a, b, c)의 굴절능과 간격,  $\phi_a = 0.04803$ ,  $\phi_b = -0.07112$ ,  $\phi_c = 0.02931$ ,  $s_a = 6.9901$ ,  $s_b = 11.428$ 을 구하였다.

곡률을 적절하게 설정하고 유한량의 두께를 부기한 뒤, 위에서 구한 굴절능을 유지하기 위해 단 렌즈를 sca-

표 3. Initial configuration data of triplet lens.

surface #	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>n<sub>d</sub></i>
1	.00774	6.5090	1.6204
2	.00000	2.2314	1.0
3	-.02437	1.5424	1.6166
4	.08969	9.1517	1.0
5	.00000	2.8998	1.6204
6	-.04725	3.2781	1.0

Focal length is 50 mm; back focal length is 33 mm; the F-number is 3.5; field angle is  $\pm 15^\circ$ .

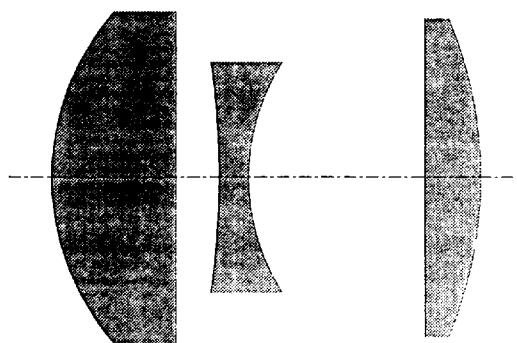


그림 5. Initial configuration of triplet lens.

ling 하였고 주평면 간의 거리를 위에서 구한 간격으로 유지하기 위해 단 렌즈간의 간격을 계산하여 재위치 시켰다. 구해진 초기 사진렌즈계의 설계 제원과 형태를 표 3과 그림 5에, 수차 특성을 그림 6에 나타내었다.

Additive 감쇠를 사용한 감쇠최소자승법에 의한 최적화 동안에 6개의 곡률변수를 설계 변수로 사용하였으며, 곡률에 대한 미분 증가분으로 0.005를 주었다. 최종 triplet 사진렌즈계의 수차와 제한 조건의 목표치로서 왜곡수차는 2% 이내, 다른 유한광선수차는 0.2 mm 이내, 초점거리는 50 mm, 후초점거리는 35 mm로 두었다.

수차는 유한광선수차를 계산하였다. 축수차인 종 구면수차(d-line, C-line, F-line)와 O.S.C.는 입사고에 따라 5등분한 높이에서 입사하는 광축평행광선을 추적하였고, 비축수차인 tangential ray 수차, sagittal ray 수차, 비점수차, 왜곡수차는 시계각을 5등분한 각도에서 입사하는 경사 광선을 추적하였다. 왜곡수차는 상대 왜곡수차를 사용하였으므로 다른 수차와의 차원을 같게 하기 위하여 가중치를 0.01로 주었다. 또한 최적화 동안 설계 조건이 변하여 사용 불가능한 광학계가 설계되는 것을 방지하기 위하여 초점거리와 후초점거리를 제한 조건으로 하였다.

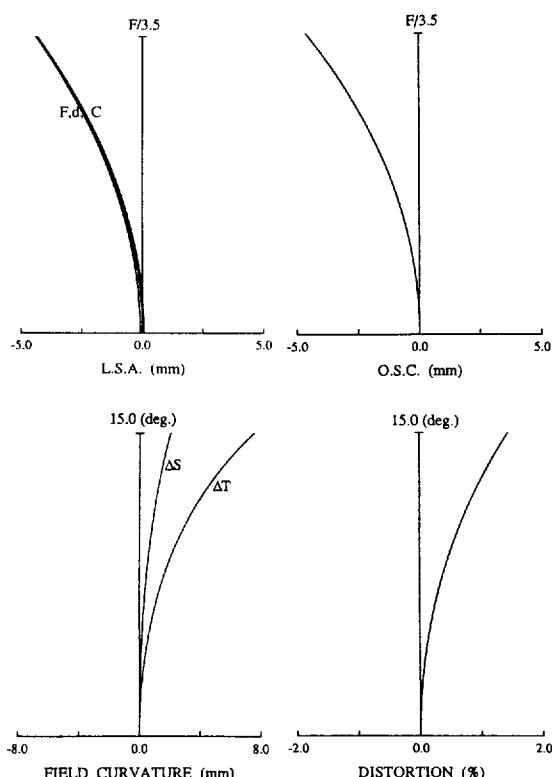


그림 6. Finite ray aberrations for initial configuration of triplet lens.

표 4. Error functions for optimization of triplet lens.

	error terms	number	weighting
aberrations	longitudinal spherical aberration at d-line	5	5/EFL
	longitudinal spherical aberration at C-line	5	5/EFL
	longitudinal spherical aberration at F-line	5	5/EFL
	offence against sine condition	5	5/EFL
	astigmatism	5	5/EFL
	tangential ray aberration	5	5/EFL
	sagittal ray aberration	5	5/EFL
	distortion	5	0.01
	Petzval sum	1	1
	constraints	error of EFL	1
	error of BFL	1	0.5

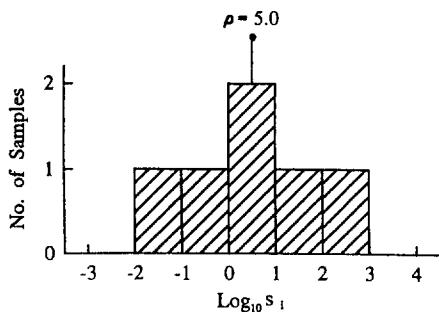


그림 7. Distribution of the eigenvalues of  $(A^T A)$  in case 3.

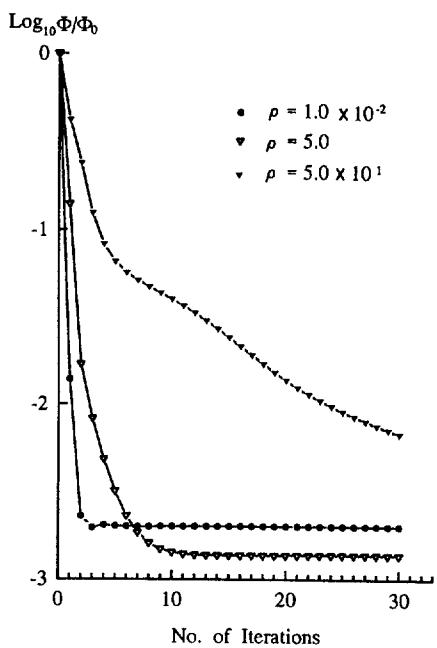


그림 8. Comparison of the rates of convergence and the stability of the optimizations by three different damping factors in case 3.

최적화에서 사용한 총 43개의 오차 함수들을 표 4에 정리하였다.

최적화 초기에 SVD로 얻은  $(A^T A)$ 의 고유값의 분포를 그림 7에 나타내었다.

6개의 짹수 설계 변수를 사용하므로 (21)의 짹수 식을 사용하여 감쇠계수를 계산하면  $\rho$ 는 5.0이 된다. 고유값의 최소, 중간 그리고 최대 균방에서 아래와 같이 감쇠계수를 선택하여 최적화를 실시하였다.

$$\rho = 1.0 \times 10^{-2}, 5.0, 5 \times 10^1.$$

표 5. Comparison of minimum merit function of three solvers.

	LU factorization	QR factorization	SVD
case 1	0.01256	0.01256	0.01256
case 2	0.00316	0.00316	0.00257
case 3	0.00338	0.00338	0.00320

최적화 동안 세 가지 감쇠계수에 대한  $\phi/\phi_0$ 의 변화를 그림 8에 나타내었다.

그림 8을 살펴보면 감쇠계수가 고유값의 중간일 때 merit 함수의 수렴 속도가 가장 빠름을 알 수 있다. 6회까지는 감쇠계수  $5.0 \times 10^{-2}$ 보다 더 느리게 수렴하지만 최종적인 최적 설계로의 도달은 전자가 더 빠른데, 이는 고유값들의 중간치인 감쇠계수가 단일 반복에서 merit 함수를 최대한으로 감소시키기는 못하더라도 전체적 최적점을 향해 수렴을 꾸준하게 진행시켜 주고 있기 때문으로 생각된다.

또한 해 벡터를 계산하는 과정에서 고유값들의 중간치를 감쇠계수로 하는 additive 감쇠최소자승법의 해법으로는 여러가지가 있으나 수치적 정확성을 향상시키기 위하여 LU factorization, QR factorization, SVD를 적용하였다. SVD를 사용하여  $\Delta X$ 를 구하는 해법에서는 최대 singular value에 대한 모든 singular values의 비를 구하여 주어진 값 ( $N$ )보다 작은 비를 가지는 singular value에 대해서는 (14)식과 같이 그것의 역수를 0으로 두어서 반올림 오차에 기인한 수치적 부정확성을 방지한다. 따라서 본 연구에서는 역수를 0으로 둘 수 있는  $N$ 을 case 1에서는 0.04, case 2에서는 0.009, case 3에서는 0.13으로 두었다. 이러한 해법들을 적용하여 도달한 최적 설계 제원에 대응하는 merit 함수값을 표 5에 정리하였다.

case 1에서 각 해법에 의해 도달한 최소 merit 값은 모두 동일하며, case 2와 case 3에서 SVD를 해법으로 사용하여 도달한 최소 merit 함수값은 LU, QR factorization을 사용하여 도달한 최소 merit 함수값의 81.4%와 95 %로 감소하였다. 각각의 해법들을 사용하여 도달한 merit 함수값이 크게 개선되지 않는 이유는 고유값의 최소치를 감쇠계수로 사용했을 경우  $(A^T A')$ 의 조건수가 상당히 보정되었기 때문으로 생각된다.

이상의 최적화 방법에 의해 도달한 최소 merit 함수값에 대응하는 triplet 사진렌즈계들의 형태와 수차 특성을 조사해 본 결과 큰 차이가 없으므로, additive 감

표 6. Final configuration data of triplet lens.

surface #	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>n<sub>d</sub></i>
1	.00664	6.5090	1.6204
2	-.01609	2.0360	1.0000
3	-.03910	0.1542	1.6166
4	.07783	0.9152	1.0000
5	.01876	0.2899	1.6204
6	-.03039	3.4559	1.0

Focal length is 50 mm; back focal length is 35 mm; the F/number is 3.5; field angle is  $\pm 15^\circ$ .

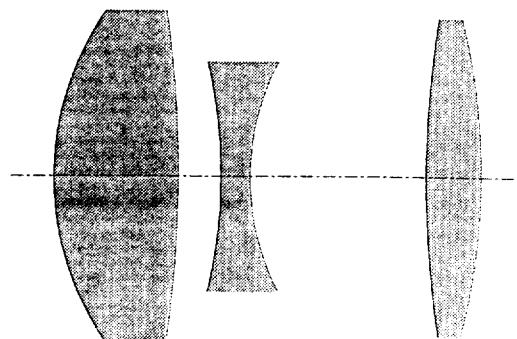


그림 9. Final configuration of triplet lens.

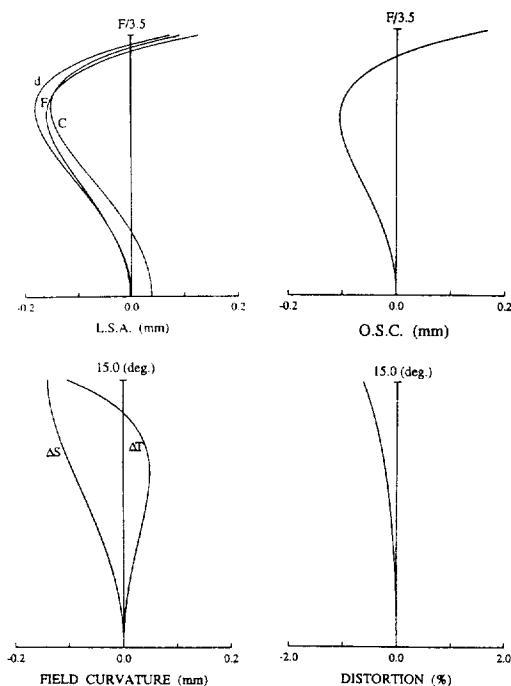


그림 10. Finite ray aberrations for final configuration of triplet lens.

쇠를 사용하는 최적화 기법에 감쇠계수 5.0과 SVD를 해법으로 사용하여 도달한 최소 merit 함수값에 대응하는 사진렌즈계의 설계 제원을 표 6에 정리하였으며, 설계의 형태와 수차를 그림 9와 10에 나타내었다. 설계된 사진렌즈계의 유한광선수차와 초점거리와 후초점거리를 살펴보면 최적화 초기에 설정한 목표치 이내로 보정이 되었으므로 이 때의 설계 제원을 최종적인 설계로 확정하였다.

## VI. 결 론

본 연구에서는 additive 감쇠를 사용하는 최적화 초기에 Jacobian 행렬들의 곱 ( $A^T A$ )의 고유값들의 중간치를 구하였으며, 그 값을 감쇠계수로 사용한 최적화 과정에서 수렴 속도와 안정성에 대하여 연구하였다. 3가지 경우의 렌즈계 설계 최적화에서 고유값들의 최소를 감쇠계수로 사용할 때는 merit 함수가 불안정하게 진동하여 최적화하는데 실패하였고, 고유값들의 최대치에 근접한 값을 감쇠계수로 사용할 때는 최적화가 너무 느리게 진행되었다. 그러나 고유값들의 중간을 감쇠계수로 사용한 결과 최적화의 속도가 가장 빠르면서 안정하게 진행되었다.

또한 정규 방정식을 사용하여 해를 구할 때 발생하는 수치적 부정확성을 피하기 위하여 QR factorization과 SVD를 사용하였으며, 이때의 수치적 안정성에 관하여 연구하였다. 이를 해법에서 변경된 Jacobian 행렬의 곱 ( $A^T A'$ )보다는 상대적으로 조건수가 작은  $A'$ 를 사용하여 해를 구하기 때문에 보다 정확한 해 벡터를 구할 수 있어서 감쇠최소자승법의 stagnation이 상당히 개선될 수 있을 것으로 예상하였다. 그러나 실제 렌즈계의 설계에서 이러한 방법으로 최적화를 실시한 결과 merit 함수값은 초기 merit 함수값의 81.4%(case 2), 95 %(case 3)로 감소되어 개선의 가능성만을 확인할 수 있었다. 크게 개선되지 못한 이유는 본 연구에서 사용한 ( $A^T A'$ )의 조건수가 일반적으로 불량 조건이라고 불리는 행렬의 조건수<sup>[18]</sup>보다는 상대적으로 작아서 비교적 수치적으로 안정되었기 때문으로 생각된다.

그러므로 고유값들의 중간치를 감쇠계수로 하면서  $A'$ 를 이용하는 해법들을 적용한 최적화 방법의 수렴성과 안정성이 뛰어남을 보이기 위해서는 본 연구에서 제시한 최적화 기법을 고차의 비구면항들을 가지는 즉 비선형성이 큰 비구면 렌즈에 적용하여 설계하는 연구가 필요하다.

## 참 고 문 헌

- [1] T. H. Jamieson, *Optimization Techniques in Lens*

- Design*, Monographs on Applied Optics NO. 5 (American Elsevier Pub. Co., New York, 1971) Chap. 3.
- [2] C. G. Wynne, P. M., J. H. Wormell, *Appl. Opt.* **2**, 1233(1963).
- [3] A. Faggiano, *Appl. Opt.* **19**, 4226(1980).
- [4] H. Matsui, K. Tanaka, *Appl. Opt.* **33**, 2411(1994).
- [5] *The Student Edition of Matlab* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992) Chap.11.
- [6] P. E. Gill et al., *Numerical Linear Algebra and Optimization*, Volume 1 (Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City, 1991) pp. 223-225.
- [7] P. Businger, G. H. Golub, *Numer. Math.* **7**, 269 (1965).
- [8] G. H. Golub, C. Reinsch, *Numer. Math.* **14**, 403 (1970).
- [9] W. H. Press et al., *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, New York, 1986) pp. 51-63.
- [10] K. Tanaka, *Appl. Opt.* **29**, 4537(1990).
- [11] H. Matusi, K. Tanaka, *Appl. Opt.* **31**, 2241(1992).
- [12] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations* (The John Hopkins University Press, London, 1989) Chap. 6.
- [13] 이종웅, 이상수, 새물리 **27**, 8(1987).
- [14] 김기태, 이종웅, 한국광학회지 **4**, 363(1993).
- [15] S. Yakowitz, F. Szidarovszky, *An Introduction to Numerical Computations* (Macmillian Pub. Co., New York, 1989) pp. 85-91.
- [16] D. R. Buchele, *Appl. Opt.* **7**, 2433(1968).
- [17] R. Kingslake, *Lens Design Fundamentals* (Academic Press, New York, 1978) pp. 287-290.
- [18] R. W. Daniels, *An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques* (Elsevier North-Holland, Inc., New York, 1978) p. 37.

Tae-Hee Kim

Department of Physics, Yeungnam University, Kyoungsan 712-749, Korea

Kyung-Chan Kim

Department of Physics, Keimyung University, Taegu 704-701, Korea

(Received: January 5, 1995)

The method that determines the appropriate damping factor is studied for a lens design. When suitable damping factor is applied to the additive damped least-squares (DLS) method, the convergence and the stability of the optimization process are examined in a triplet-type photographic lens design. We calculate eigenvalues of the product of the Jacobian matrix of error functions by using the singular value decomposition (SVD) method. We adopt the median of eigenvalues as an appropriate damping factor. The convergence and the stability of the optimization process are improved by choosing the adequate damping factor for the optimization of a photographic lens. It is known that the numerical inaccuracy in the calculation of normal equation is overcome by using the orthogonal transformations of the Jacobian matrix. Therefore, a combination of the method for setting a proper damping factor and the orthogonal transformations of the Jacobian matrix is good for application to the design of an aspheric lens with high-order terms.