

H_∞ 견실제어기 설계기법 소고

최 병 옥

서울대학교 제어계측신기술연구소

1. 머리말

소위 '현대제어이론'이라 불리면서 종전의 고전적 주파수 영역 설계기법과 달리, 상태변수 등의 개념을 이용한 제어 기법이 등장한 것은 1960년대였다. 이로부터 제어시스템 분야에는 상태궤환, 관측자, Kalman filter, 제어성 및 관측성, LQ제어 등과 같은 용어가 확고히 자리를 잡아오고 있다. 1970년대에는 영국을 중심으로 고전적 주파수영역 설계기법을 다변수 시스템으로 확장하려는 연구가 활발하였고, 스웨덴을 중심으로한 서유럽에서는 자기동조 제어기의 개발을 위한 연구가 광범위하게 확산됐다. 자기동조 제어기는 제어 대상 시스템을 온라인으로 식별하고 그 모델에 근거하여 설계하는 제어기로서, 많은 계산량의 필요성으로 인해 CACSD의 출현을 재촉하였다.

한편, 1970년대의 미국에서는 제어기 설계를 위한 시스템 모델이 실제의 시스템과 같지 않을 경우, 모델에 근거한 제어기 설계기법에서 도출된 시스템의 안정성과 성능이 실제 시스템에서는 어떻게 달라지는가에 대한 연구에 많은 관심을 기울이기 시작하였다. 그 결과, 제어기 설계에서 근본적으로 요구되는 페루우프 시스템의 안정성을 잃는 등 심각한 문제가 발생할 수 있음을 알게 되었다. 예를 들어, LQG설계기법은 안정도 여유가 아주 작아질 수 있음이 확인되었고, 자기동조방법은 일반적으로 시스템의 고차 동특성을 무시하고 저차의 모델에 근거하는데, 이 때 무시된 고차 동특성으로 말미암아 그 제어시스템이 불안정해질 수 있음도 알려졌다. 그리하여, 1980년대에는 견실성(robustness)의 개념이 주요 이슈로 등장하였고, 견실제어기(robust controller) 설계의 필요성도 크게 대두되었다. 이러한 분위기 속에서 등장한 견실제어기 설계기법의 하나가 H_∞ 제어기법이며,

1980년대 이래 많은 관심속에 발전해 오고 있다.

그러면, H_∞ 란 무엇인가? 많은 사람들이 궁금해하는 이 질문에 한두마디로 좋은 대답을 하기란 쉬운 일이 아니다. 최적화기법에 근거한 제어설계기법이다, 견실성을 보장한다, 다변수 시스템을 다룰 수 있다, 제어기 설계시 성능과 견실성 사이의 trade-offs를 쉽게 보완해 준다 등의 대답을 생각할 수 있다. 그러나, 이러한 대답들은 H_∞ 제어기법의 특성을 단편적으로 나타내기는 하지만, 그 모습을 온전히 보여 주기에는 미흡하다할 것이다. H_∞ 는 영국의 수학자 Hardy가 연구했던 하나의 수학적 틀(setting)로서 모든 안정한 전달함수의 집합—the set of all stable transfer functions—을 일컫는 것이며, 간단히 Hardy space라고 부른다. H_∞ 는 추상적이고 수학적인 이름으로 들리기 때문에 실세계와는 관련이 없는 것으로 여겨지기도 하는데, H_∞ 는 Hardy의 이름 머릿글자 'H'를 따서 제어분야의 여러 선각자들이 붙인 이름이다. 우리에게 쉽게 와닿지 않는 어색한(?) 이름이지만, 지금에 와서 그 이름을 바꿀 수도 없는 형편이니 우리는 그 어색함을 감수할 수밖에 없을 듯하다.

H_∞ 설계기법은, 설계자가 제어대상 시스템에 포함된 불확실성의 모델을 결정한 후, 궤환시스템이 내부적으로 안정해야 한다는 제한조건을 만족시키면서 설계자가 결정한 불확실성에 걸맞게 페루우프 시스템의 견실안정도를 최대화시키려 하는, 즉 제약조건하에서의 최적화 문제를 푸는 것이라고 말할 수 있다. 성능상의 여러 목표들도 최적화 함수에 포함시킬 수 있어서 H_∞ 설계기법은 견실안정도와 성능을 함께 고려하여 수학적으로 풀어내는 새로운 유형의 설계기법인 셈이다. 수학적으로 다소 어려워 보였던 H_∞ 설계기법은 상태공간 해법의 개발[3, 4], 고전적 설계기법과의 결합을 통한 루우프형상기법[7], 2-자유도 및 모델추종능력 추가

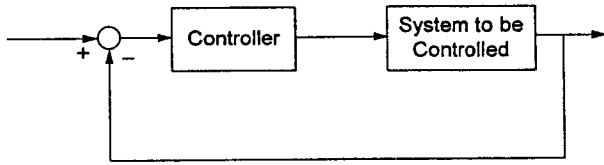


그림 1. 폐환제어시스템 구성도

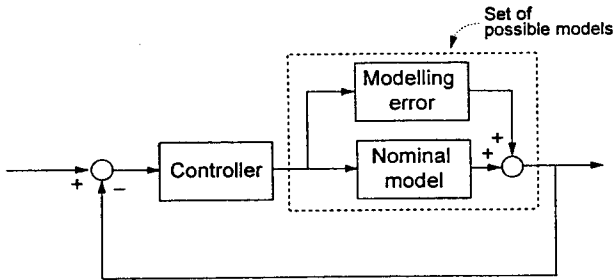


그림 2. 폐환제어기 설계를 위한 구성도(모델링 오차를 반영한 경우)

[5], 사용하기 편리한 소프트웨어의 등장[1, 2] 등으로 인하여 이제 매력적인 견실제어기 설계기법으로 자리매김을 하고 있다.

2. 견실성(Robustness)

먼저 견실성의 개념에 대해 생각해 보기 위해, 그림 1의 폐루우프 시스템에서 동적 시스템을 위한 폐환제어기를 설계하는데 H_{∞} 제어기법이 어떻게 사용되는지를 검토해 본다.

한편, 실제로 대부분의 시스템에서는 다음과 같은 경우에 발생하는 불확실성 혹은 모델링 오차가 존재한다.

(i) 시스템을 표현하는 하나의 동적특성에는 어떤 불확실성이 있음을 고려할 경우. 예를 들어, 시스템의 물리법칙을 구성할 때 적용하는 여러 가정들, 고차의 시스템을 저차의 시스템으로 간소화하는 과정에서 발생하는 모델화 안된 동특성, 시스템의 내부적 환경변화에 기인하여 발생하는 시스템 파라미터의 변동 등.

(ii) 시스템의 동적특성이 다른 동작점에서 변한다는 사실을 반영할 경우, 즉 비선형 시스템을 어떤 한 동작점에서 선형화시킴으로 인해 생기는 비선형 효과가 있는 경우. 속도 변화에 따라 동적특성이 크게 달라지는 비행체는 이러한 경우에 속하는 한가지 예가 될 수 있다.

그림 2는 설계시점에 제어대상 시스템이 정확하게 알려져 있지 않음을 나타내고 있다. 설계자의 입장에서 우리는 실제 시스템을 완벽히 표현하지 않고 오히려 실제 시스템의 성능을 어느 정도 근사화시킨 모델을 가지고 일을 하게 된다. 그러므로, 폐환제어기를 설계할 때 우리는 공칭 시스템

을 안정화 시키는 것은 물론, 일련의 가능한 시스템 모델의 집합을 안정화 시키기 위하여 공칭 모델에 모델링 오차를 반영한 설계문제를 고려해야 한다.

그러므로 견실제어 개념의 핵심은 모델화된 시스템에 오차가 있는 경우에도 폐루우프 시스템이 안정하게 유지되도록 제어기를 설계하는 것이다. 폐루우프 시스템의 안정도가 보장되는 한, 모델링 오차가 크면 클수록 그 시스템은 보다 더 견실하다고 말할 수 있다. 따라서, 어느 정도 수준의 견실안정도를 보장하는 설계기법인 H_{∞} 제어기법의 큰 장점중의 하나는 바로 모델링 오차에도 불구하고 시스템을 견실하게 안정화 시킬 수 있다는 점이다.

3. 고전적 주파수영역 설계

그렇다면 과거에는 견실성의 문제를 어떻게 다루어 왔는가에 대해 간단히 살펴보기로 한다. 불확실성과 파라미터 변동에 대처하는 많은 제어시스템이 존재해 왔고, 어느 정도의 견실성을 가지고 있는 것도 사실이다. Nyquist선도나 Bode선도를 이용하여 주파수 영역에서 문제를 해결하는 고전적 설계방법은 설계자로 하여금 단일 입출력(SISO) 시스템의 경우에 어느 정도의 견실성을 달성하도록 해준다. 이 경우, 시스템의 견실성은 이득여유와 위상여유로 측정한다. 이런 값들은 Bode선도를 이용하여 쉽게 구할 수 있다(그림 3 참조).

위상여유는 시스템 이득이 1(0dB)이 되는 주파수에서 측정하며, 위상변이가 180도가 되게 하는 위상의 여유분이다. 마찬가지로, 이득여유는 위상이 180도인 주파수에서 시스템 이득이 1이 되게 하는 이득의 여유분을 말한다. 고전적 제어기술자는 충분한 이득여유와 위상여유를 갖는 제어기를 설계함으로써 견실성의 문제에 대처해 왔다. 그림 4는 개루우프 제어시스템을 나타내고 있다. 여기서 제어기가 개루우프 주파수 응답이 예를 들어 6dB의 이득여유와 45도의 위상여유를 갖도록 설계되었다고 하면, 이러한 정도의 안정도

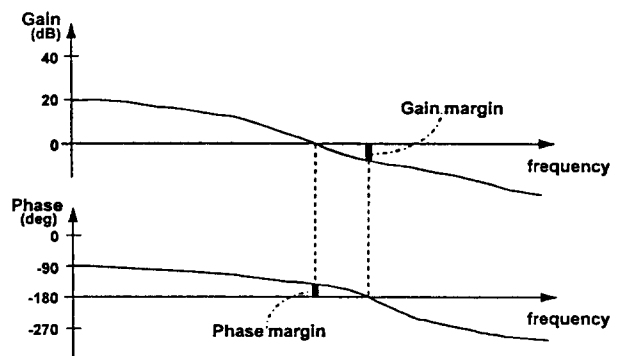


그림 3. 단일 입출력 주파수 응답의 Bode선도



그림 4. 개루우프 시스템을 통한 고전적 설계

여유는 시스템의 동적특성에 약간의 모델링 오차나 변화가 있어도 시스템이 불안정해지지 않을 정도의 여유이므로 건실성이 확보되었다고 말할 수 있다.

이렇게 건실안정도를 확보한 후, 고전적 설계자는 어떻게 성능을 향상시킬 수 있을까를 생각한다. 예를 들어, 저주파수 영역에서의 높은 이득은 정상상태오차를 작게 하므로 향상된 성능을 구할 수 있다. 따라서, 그림 3에서 처럼, 시스템이 저주파수 영역에서 높은 이득을 갖도록 할 필요가 있다. 일반적으로 이는 적분기를 사용하여 저주파수 영역에서의 이득을 높임으로써 가능해질 것이다. 고전적 설계자는 이와같은 방법으로 설계시 개루우프 주파수 응답의 형상을 조정하는 방식을 사용해 왔는데, 루우프 형상기법(loop shaping)이라 불리운다. 한편, PID tuning은 시스템의 응답을 관찰해 가면서 어떻게 비례, 적분 및 미분 상수들을 취해야 할 것인지에 대한 원칙을 제공함으로써 개루우프 주파수 설계기법을 한단계 발전시켰다(여기서는 주파수 응답은 고려하지 않는다). PID tuning은 비교적 잘 알려져 있고 실제 산업계에서 광범위하게 사용되고 있으며, 고전적 주파수 영역 설계기법도 널리 사용되고 있다. 그렇다면, 왜 H_∞ 를 생각하고 필요로 하게 되는 것인가?

다입력 다출력(MIMO) 시스템에 대한 설계를 할 경우, 건실안정도 평가를 위해 하나의 이득여유와 하나의 위상여유만을 고려한다면 이는 적절하다고 할 수 없다. 다변수 시스템의 내부에 존재하는 상호연계작용은 고전적 접근방법이 다변수 시스템의 해석 및 설계에 적합하지 못함을 설명해주는 좋은 이유가 된다. 또한, H_∞ 제어기법은 고전적 설계기법에 비해서 건실성의 문제를 수학적인 방법을 이용하여 보다 더 정량적으로 다룰 수 있다는 강점도 한 이유가 될 것이다.

4. H_∞ 설계기법

H_∞ 설계기법은 여러 가지의 장점을 갖고 있는 매력적인 설계방법이라 할 수 있다. 첫째, 다변수 시스템에 적용이 가능하고 어느 정도의 건실성을 보장한다. 둘째, 복잡한 수학적 계산은 컴퓨터에 맡기게 되 설계자가 중간에 개입하여 설계과정을 수정하거나 보강할 수 있다(예를 들어, 여러 주파수 응답을 분석하여). 셋째, 최적화기법에 근거해서 건실안정도과 성능향상의 문제를 혼합하여 함께 해결할 수 있는 제어기 설계기법이다.

H_∞ -norm : H_∞ 설계기법에서는 제어문제를 정량적으로 다루기 위해 시스템의 크기를 나타내는 norm을 사용하는데, 특별히 H_∞ -norm을 사용하여 Hardy space에 포함되는 안정한 (페루우프) 전달함수를 갖는 시스템을 대상으로 한다. 전달함수가 $T(s)$ 인 시스템의 경우, 이 시스템의 크기는 H_∞ -norm을 사용하여 다음과 같이 수학적으로 정의한다.

$$\| T \|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[T(j\omega)] \quad (1)$$

여기서, $\sigma_{\max}[T(j\omega)]$ 는 전달함수 $T(s)$ 의 어느 한 주파수에서의 최대특이치(maximum singular value)를 의미한다. 따라서, H_∞ -norm은 모든 주파수영역에 걸친 전달함수의 최대특이치에 해당한다. 특이치는 수학적인 값이지만 물리적으로는 시스템 이득에 해당하며, SISO 경우의 시스템 이득을 MIMO의 경우로 확장시킨 개념이다. 그러므로, SISO의 경우, $\| T \|_\infty$ 은 $T(s)$ 의 Bode선도 상에서 최대의 이득값에 해당한다.

H_∞ -norm은 전달함수로 표시되는 시스템이 어떤 입력신호를 다른 출력신호로 바꿔주는 역할을 하기 때문에 연산자 노름이라고도 한다[6]. H_∞ -norm은 유한한 에너지를 갖는 임,출력 신호의 최대 에너지 비율로도 나타낼 수 있다. 예를 들어, $u(t)$ 가 시스템 입력을, $y(t)$ 는 그에 상응하는 출력을, 그리고 $T(s)$ 는 이 두 신호 사이의 (페루우프) 전달함수라고 할 때, $T(s)$ 의 H_∞ -norm은

$$\| T \|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\| y \|_2}{\| u \|_2} \quad (2)$$

에 해당하며, 여기서 $\| u \|_2$ 는 신호 $u(t)$ 의 2-norm으로서

$$\| u \|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^T u(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

로 정의되는 $u(t)$ 의 에너지이다.

4.1 H_∞ 최적화 문제

H_∞ 설계기법에서는 H_∞ -norm의 대상 시스템으로 개루우프 시스템이 아니라 페루우프 시스템을 선정하여 다룬다. 예를 들어, 위 예의 경우 $u(t)$ 가 외란입력이라면, $\| T \|_\infty$ 은 외란에 의해서 발생할 수 있는 출력중 최대값에 해당하는 시스템의 크기를 나타내므로 최악의 경우의 시스템이득(worst case gain)이라고 말할 수 있다. 그러므로, 우리가 페루우프 전달함수 $T(s)$ 의 H_∞ -norm을 최소화 시킬 수 있는 제어를 찾을 수 있다면, 즉

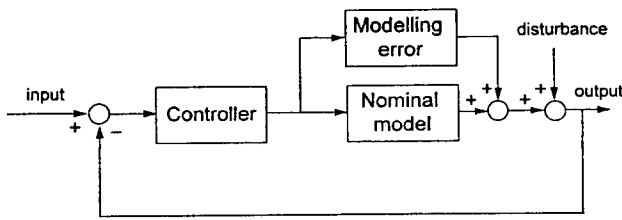


그림 5. H_{∞} 제어를 위한 페루우프 시스템의 한 예

$$\text{Minimize } \|T\|_{\infty} \quad (3)$$

와 같은 최소화문제를 만족시키는 제어기가 있다면, 그 제어기는 시스템의 외란효과를 최소화시키는 제어기라고 말할 수 있다. 식 (3)은 H_{∞} 최적화문제의 한가지 예로서, 감도함수의 최소화문제를 H_{∞} 최적화기법을 이용하여 풀 수 있음을 보여주고 있다.

H_{∞} 설계기법은 개루우프 시스템 대신 그림 5와 같은 페루우프 시스템을 직접적으로 다룬다. 그림 5의 시스템에서 외란입력 $d(t)$ 와 시스템출력 $y(t)$ 사이의 페루우프 전달함수는 출력측외란 감도함수에 해당하며, 이를 $S_o(s)$ 라 하자. 식 (3)에서 보았던 것처럼, 출력측외란 감도함수 $S_o(s)$ 의 H_{∞} -norm, 즉 $\|S_o\|_{\infty}$ 을 최소화함으로써 하나의 성능문제 - 감도함수의 최소화 - 를 고려할 수 있다.

그림 6은 H_{∞} 설계를 위한 표준 제어시스템 구성도를 나타내고 있는데, 그림 5는 물론 어떠한 형태의 제어시스템도 그림 6과 같은 구성도로 다시 그릴 수 있다.

그림 6의 구성도에서 exogenous inputs(w)은 플랜트에 들어가는 신호중에서 제어기에서 생성되어 나오는 control signal(u)을 제외한 모든 신호벡터를 나타낸다. Controlled outputs(z)은 제어대상 신호벡터를, 그리고 measured outputs(y)은 제어기에 정보를 제공할 수 있도록 측정가능한 출력신호벡터를 나타낸다. 그림 5의 기준입력과 외란입력은 그림 6의 w 에 해당한다. Generalized plant를 $P(s)$ 라 하고 그것을 적절히 분할한 전달함수들을 각각 $P_{11}(s), P_{12}(s), P_{21}(s), P_{22}(s)$ 라 하면, generalized plant의 입출력 관계를

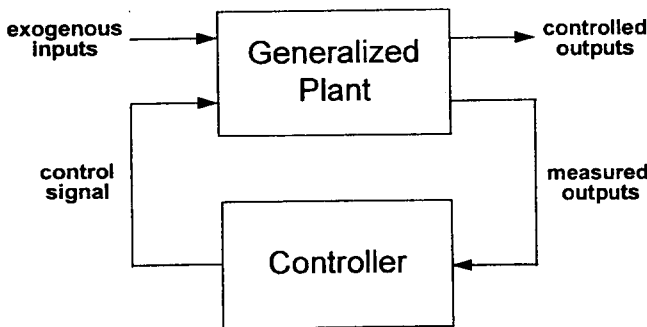


그림 6. H_{∞} 설계를 위한 표준 제어시스템 구성도

나타내는 식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad (4)$$

한편, Controller를 $K(s)$ 라 하고, w 와 z 사이의 페루우프 전달함수를 구하면

$$\frac{z}{w} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (5)$$

이 된다. 식(5)는 선형부분분수변환(LFT)이라 부른다. 모든 페루우프 전달함수는 LFT로 표현이 가능하므로 식(5)를 사용하여 H_{∞} 최적화문제를 정의하면,

$$\text{Min}_k \|P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}\|_{\infty} \quad (6)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $K(s)$ 는 제어대상 플랜트를 내부적으로 안정화시키는 모든 제어기의 집합중에서 선정된다.

그림 6에서 일반화 플랜트 $P(s)$ 의 상태변수벡터를 x 라 하고 $P(s)$ 를 상태공간표현법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 모든 계수 행렬들은 제어목적에 따라 선정되는 각종 변수들에 의해 결정되며, 현재 상용화되어 있는 H_{∞} 설계용 소프트웨어패키지들[1, 2]은 다행스럽게도 설계자가 이러한 계수행렬들만 결정지어 주면 그에 상응하는 H_{∞} 제어기를 출력으로 내놓는다. H_{∞} 최적화문제를 풀기 위해 연구자들의 많은 노력이 있었고, 현재의 상용 소프트웨어패키지들은 대부분 리카티방정식을 이용한 상태공간해법[3, 4]에 근거하고 있다.

플랜트의 상태공간행렬이 $[A_p, B_p, C_p, D_p]$ 라 하고, 감도함수의 최소화 문제를 생각해 보자(기준입력은 0으로 놓음). z 와 y 는 같으므로

$$\begin{aligned} w &= d \\ z &= y \\ \dot{x} &= A_p x + B_p u \\ z &= C_p x + D_p u + d \end{aligned}$$

와 같은 식이 성립하고, 따라서 식(7)에서 필요로 하는 계

수행렬들은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} A &= A_p, & B_1 &= 0, & B_2 &= B_p \\ C_1 &= C_p, & D_{11} &= I, & D_{12} &= D_p \\ C_2 &= C_p, & D_{21} &= I, & D_{22} &= D_p \end{aligned}$$

시스템에 가중함수가 포함되는 등 다소 복잡한 경우라도 위와 같은 방법으로 $P(s)$ 의 상태공간표현식을 구할 수 있다.

4.2 혼합감도함수(Mixed Sensitivity) 문제

성능문제의 하나로써 감도함수 최소화문제를 고려할 경우, 감도함수의 최대 이득이 가장 중요한 지표가 된다. 여기서 최대 이득은 전달함수의 최대 특이치를 말하며, 고전적 설계에서의 Bode 이득도와 같은 주파수 응답으로 나타낼 수 있다. 저주파수 외란을 퇴치하기 위해서는 -이득은 좋은 정상상태의 성능을 위해 필요함 - 감도함수의 최대 특이치가 저주파수 영역에서 작아야 한다(그림 7참조).

그것은 cross-over 주파수(혹은 대역폭) 근처의 0dB를 지나면서 증가한다. 이 주파수 아래의 외란은 어느 정도 감쇄하지만, 그 주파수 위의 외란은 감쇄없이 출력측에 그대로 전달될 것이다. 어떤 시스템의 대역폭이 어떤 값이어야 하는가는 시스템에 따라 다르다. 화학공정 플랜트제어 시스템의 경우, 변화가 일반적으로 대단히 느리기 때문에 대역폭은 상당히 낮다. 반면에, 콤팩트디스크 레이저 tracking 시스템은 수 백Hz 정도의 매우 높은 대역폭을 갖는다.

잘 아는 바와 같이, 감도함수의 주파수 응답은 시스템의 성능특성을 페루우프의 방식으로 나타낸 것이다. 이것은 결국 고전적 설계방식에서의 개루우프 주파수 응답에 해당한다고 볼 수 있다[6]. 적분기를 추가할 경우, 개루우프 주파수 응답의 저주파수 이득을 높이고, 이는 결국 저주파수에서 감도함수를 최소화시키는 효과를 갖는다.

견실안정성이 시스템의 목적을 구현하기 위한 한 수단이 되기 위해서는 시스템의 동적특성이 안고 있는 불확실성(모델링 오차)를 극복해낼 수 있는 설계를 달성할 수 있어야 한다. 시스템과 마찬가지로 불확실성도 다입력 다출력이 될 수 있으며, 견실성의 적정 수준을 나타내기 위해서는 우리

가 달성하려는 견실성의 최대 수준에 해당하는 최대허용 불확실성의 크기를 수량화할 수 있어야 한다. 이를 위해 최대허용 불확실성의 최대 이득(최대 특이치)를 이용한다.

고전적 설계기법에 익숙한 제어설계자는 성능과 견실안정성 사이에 항상 trade-off이 존재한다는 것을 잘 알고 있으며, 이러한 trade-off은 다변수 설계에서도 똑같이 나타난다. H_∞ 설계기법은 설계자로 하여금 어느 특정 수준의 성능을 특정 수준의 견실안정성과 함께 달성할 수 있도록 해준다. 그렇다고 H_∞ 설계기법이 어느 경우든 좋은 결과를 보장한다는 의미는 아니다. 왜냐하면, 그것이 현실적으로 가능하지 않은 경우에까지 아주 좋은 성능과 견실안정성을 달성시킬 수는 없기 때문이다. 여기에 설계자의 예지를 필요로 하는 이유가 있다. 설계자는 고려 대상 시스템의 한계를 잘 알고 있어야 하며, 이를 설계에 반영해야 한다. 다음에서는 설계상의 trade-off을 어떻게 극복하고, 설계과정에 어떻게 개입을 해야 하는지에 대해 검토한다.

H_∞ 설계과정은 최적화기법에 의존한다. 감도함수 S_o 와 최대허용 모델링 오차 Δ 의 역수인 $1/\Delta$ 를 혼합시켜, 두 함수의 최대 특이치를 동시에 최소화시키는 제어를 찾아내는 과정은 혼합감도기법의 한 예이다. 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{Min} \left\| \begin{pmatrix} S_o \\ 1/\Delta \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (8)$$

즉, 최대허용 모델링 오차와 감도함수 둘 다 제어기의 특성에 의존함을 명심해야 한다. 최대허용 모델링 오차의 역수를 최소화시킴으로써 우리는 최대허용 모델링 오차를 최대화시키고 있다는 의미가 있으며, 따라서 시스템을 보다 견실하게 만들고 있다는 점도 주목할 필요가 있다. 일반적으로 모델링 오차(혹은 불확실성)은 고주파수 영역에서 증가하며, 제어를 설계할 때 준용하는 일반적 원칙은 제어시스템이 고주파수 영역에서 큰 모델링 오차에도 견딜 수 있어야 한다는 것이다.

가중함수(Weighting functions)의 도입: 위 식(8)의 최소화는 그것만으로는 모든 주파수 영역에서 평평한(flat)

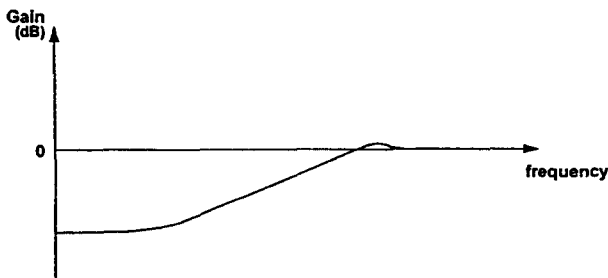


그림 7. 대표적인 출력측 외란 감도함수의 Bode 이득도

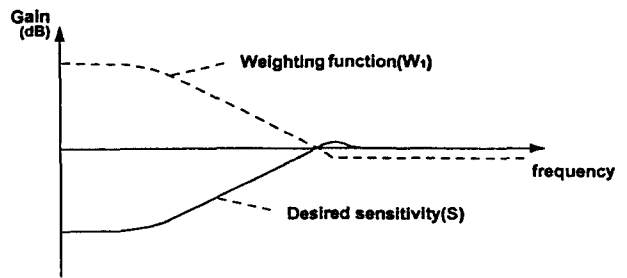


그림 8. 감도함수와 가중함수 $W_1(s)$ 의 주파수 응답

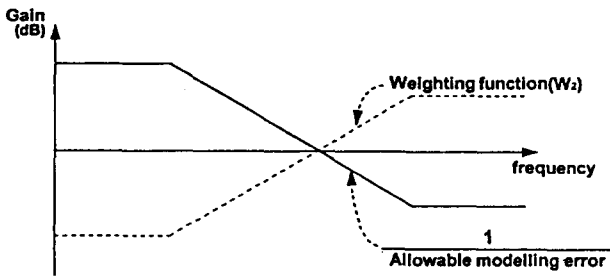


그림 9. 최대허용 모델링 오차의 여부와 $W_2(s)$ 의 파수 응답

감도함수를 유도하게 될 것이며, 앞에서 언급한 것처럼 이러한 결과는 성능면에서 볼 때 전혀 바람직하지 못하다. 따라서 설계자는 설계목표에 맞는 가중함수를 도입해야 한다. 여기가 H_∞ 설계과정에서 설계자가 관여하여 영향을 미치는 단계이다. 우리가 지금 검토하고 있는 형태의 H_∞ 설계문제에는 두 개의 가중함수, $W_1(s)$ 와 $W_2(s)$ 가 필요하다. 가중함수 $W_1(s)$ 은 성능개선을 위해 감도함수에 영향을 주고, $W_2(s)$ 는 견실안정성을 향상시키기 위해 최대허용 모델링 오차의 역수에 영향을 미친다. 설계자는 간단한 주파수 함수를 가중함수로 선택한다. 예를 들어, $W_1(s)$ 은 저주파수 영역에서 감도함수의 원하는 최대 이득의 mirror image가 되도록 선정한다. 이 가중함수가 0dB를 통과하는 점이 바로 시스템의 대역폭을 결정하게 되며(그림 8 참조), 저주파수 영역에서 가중함수 $W_1(s)$ 의 크기는 저주파수 영역에서 감도함수의 크기에 영향을 미친다.

비슷한 방법으로, $W_2(s)$ 는 최대허용 모델링 오차의 역수의 mirror image가 되도록, 바꿔 말하면 최대허용 모델링 오차와 같은 주파수 응답 특성을 갖도록 선정한다(그림 9 참조).

이제 H_∞ 최소화문제는 가중함수를 포함하여, 다음 식을 만족하는 제어를 찾아내는 문제에 해당한다.

$$\text{Min} \left\| \begin{pmatrix} W_1 S_o \\ W_2 / \Delta \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (9)$$

만일 모든 주파수 영역에서 최소값이 1로 구해지면, 얻어진 감도함수는 미리 선정했던 가중함수 $W_1(s)$ 의 mirror image인 셈이며(바로 설계자가 목표로 했던 것임), 고주파수 영역에서는 궤환시스템이 안정을 유지한 채 허용할 수 있는 최대허용 모델링 오차가 목표했던 값에 해당함을 의미하므로 성공적인 설계라 할 수 있다. 일반적으로 최소값이 1에 가깝게 구해지면, 그 설계는 만족할 만한 것이며, 만일 최소값으로 100 정도의 큰 값이 얻어지면 그 설계는 만족스럽지 못한 것으로 간주해야 한다. 후자의 경우, 설계자는 설계사양을 재검토해야 한다. 아마도 원하는 대역폭이 비현실적으로 높거나, 혹은 견실안정성을 위한 모델링 오차가 니

무 크게 선정되었을 것이다. 가중함수를 변경하는 방법으로 설계자는 설계사양을 변경, 재시도해 볼 수 있다.

혼합감도문제의 다른 예 : 어떤 시스템의 경우 설계자는 출력측 외란보다 입력측 외란을 더 중요하게 생각할 수 있다. 이러한 경우에는 입력측 외란 감도함수 $S_i(s)$ 를 식(9)의 최소화문제의 일부분으로 하여, 가중함수의 선정을 그에 걸맞게 변경해야 한다. 비행체 제어에서 돌풍을 만났을 경우, 이와 같은 특수한 외란도 H_∞ 최소화문제의 일부로 포함시켜 다룰 수 있다. 그러면 결과로서 얻어지는 제어시스템은 그러한 외란을 효과적으로 퇴치하게 된다.

H_∞ 설계과정(Design Procedure) : 앞에서 검토한 설계 과정을 단계별로 정리해 보면 다음과 같다.

1) 시스템에 존재하는 불확실성의 종류(예를 들어, 곱셈형, 가산형, 혹은 소인수분해 모델)와 구조를 결정하고, 최소화 하고자 하는 비용함수(예를 들어, 감도함수)를 선정한다.

2) 외란 모델과 측정잡음을 정하고, 앞서 선정한 비용함수가 실현가능할 것인지 확인해 본다. 만일 가능하지 않다면 비용함수를 조정한다.

3) 비용함수에 필요한 가중함수를 포함시킨다. 저주파수 영역에서는 적절한 성능 견실성, 외란퇴치, tracking을 얻기에 적절한 가중함수를 선정한다(오차 또는 감도함수 문제의 경우 등). 한편, 고주파수영역에서는 안정도 견실성과 센서잡음 감쇄의 목적이 달성될 수 있도록 이득을 증가시키는 방법으로 제어신호 및 제어감도함수를 포함시킨다.

4) 감도함수와 제어감도함수 사이의 주파수영역 trade-off이 이루어지면, 성능이 적당한 지를 확인하기 위해 transient response의 특성을 모의실험해 본다. 만일 정상상태 오차가 너무 크면, 저주파수영역에서의 감도함수와 오차에 얼마간의 손상을 감안하면서 이득을 올릴 수 있는 방향으로 가중함수를 조정한다.

소프트웨어(Design Software) : 앞서 설명을 간단히

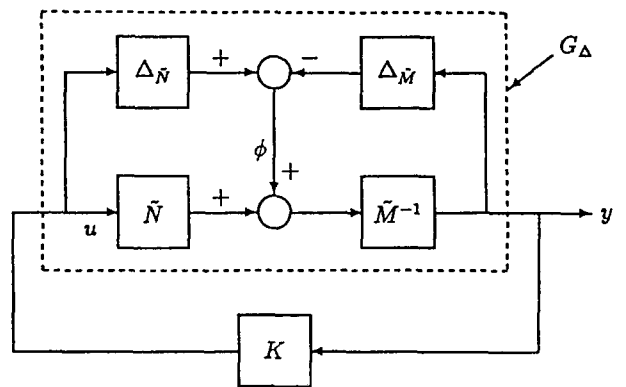


그림 10. Left coprime factor perturbations을 갖는 플랜트와 견실 안정화제어기로 연결된 페루우프 시스템

하려고 노력을 했지만, H_∞ 제어기법을 이용하여 설계를 하려면 상당히 복잡하고 많은 수학적 계산을 필요로 한다. 다변수 시스템에 대한 제어를 설계하는 경우에는 더욱 그러하다. 다행히도 H_∞ 제어기법을 사용하기 위해 아주 믿을 만한 상업적 소프트웨어패키지들이 나와 있다. 예를 들어, Matlab Toolboxes[1, 2], Program CC, Matrix 등이 있으며, 그 중에서 Matlab Toolboxes가 가장 광범위하게 사용되고 있다. 대부분의 소프트웨어패키지는 DGKF의 알고리즘[3, 4]을 근거로 하고 있다. 그 알고리즘의 각 단계를 상세히 이해하기는 쉬운 일이 아니다. 그러나, 이론보다는 설계가 주 목적인 경우, 설계자는 알고리즘의 각 단계를 상세히 이해할 필요없이 소프트웨어패키지만을 사용하여 응용사례에 대한 설계를 할 수 있다. 그러므로, H_∞ 제어이론에 대한 깊은 이해가 없는 제어기술자도, 사용이 간단한 소프트웨어와 고전적 주파수영역 설계기법에 대한 지식을 가지고 있다면 최신의 견실제어설계기법인 H_∞ 제어기법을 이용하여 H_∞ 견실제어를 설계할 수 있다.

4.3 루우프형상 설계기법(Loop Shaping Design Procedure)

앞에서 검토한 혼합감도기법의 경우, 가중함수의 선정이 제어기 설계에 예민하며, 플랜트와 제어기 사이에 극-영점 상쇄현상(pole-zero cancellations)이 있어 개루우프 플랜트의 안정한 극점들이 제어기에 의해 상쇄되고 페루우프 시스템의 극점은 플랜트의 불안정한 극점들의 mirror image positions를 포함하므로 바람직스럽지 못한 현상을 초래할 수 있다[8]. 같은 논문에서는 이러한 현상을 극복하기 위해 가중함수를 어떻게 선정해야 하는지에 대해서도 대안을 제시하고 있다. 그러나, 혼합감도기법의 경우, 페루우프 시스템의 설계목표와 가중함수와의 상관관계 설정이 어렵고 설계결과가 만족스럽지 않을 때 새로운 가중함수 선정을 위한 원칙설정이 어렵기 때문에, 가중함수 선정이 쉽지않은 문제로 남아 있다.

McFarlane/Glover[7]가 개발한 H_∞ 루우프형상 설계기법은 혼합감도기법의 이러한 결점들(극-영점 상쇄현상, 가중함수 선정의 어려움)을 상당부분 극복해 주는 기법이다. 특히, 동 설계기법에서는 극-영점 상쇄현상이 거의 나타나지 않는다. H_∞ 루우프형상 설계기법은 고전적 루우프형상 기법을 다변수 시스템으로 확장하여 H_∞ 최적화와 결합시킨 방법이다. 가중함수의 선정이 개루우프 플랜트의 주파수 응답 루우프형상을 만족시키는 방법으로 결정된다. 따라서, 페루우프 시스템의 루우프형상에 따라 가중함수를 선정해야 하는 혼합감도기법의 경우와 달리, 가중함수의 선정이 훨씬 용이하다.

또한, H_∞ 루우프형상 설계기법은 플랜트의 불확실성을 coprime factors로 모델링하여 넓은 범주의 perturbations

을 포용할 수 있으며(그림 10 참조), 더우기 normalized coprime factors를 사용함으로써 H_∞ -norm의 최소값을 반복없이 한번에 계산할 수 있어 컴퓨터의 계산부담도 적게하는 등 많은 장점을 갖고 있다(앞에서 검토했던 혼합감도합수문제의 경우처럼, 일반적인 H_∞ 최적화문제에서는 반복법을 통하여 최소의 H_∞ -norm을 계산한다). 동 기법의 설계 과정을 정리하면 다음과 같다.

(i) 고전적 루우프형상기법에 근거하여 개루우프의 특이치가 설계목적에 부합하도록 가중함수를 선정한다. 성능사양이 시간영역으로 주어질 경우는 그 사양을 주파수 영역에 걸맞도록 변환한 후 시행한다.

(ii) 선정된 가중함수를 플랜트와 결합한 후(이것을 shaped plant라 함), shaped plant에 대해 견실안정화 제어를 찾는다. 즉, 다음과 같은 H_∞ -norm 최소화문제를 만족시키는 제어를 구한다.

$$\text{Min} \left\| \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} (I - G_0 K)^{-1} \tilde{M}_0^{-1} \right\|_\infty \quad (10)$$

여기서, $G_0 = \tilde{M}_0^{-1} \tilde{N}_0$ 는 shaped plant이다. 이 단계에서 얻어지는 H_∞ -norm의 최소값은 작을수록 좋으며, 10정도의 값을 넘지 않도록 한다. 만일 이것이 성취되지 않으면 앞 단계의 가중함수 선정을 다시해야 하며, 여기서 컴퓨터에 의한 설계도중 설계자가 interface할 수 있는 단계이다.

(iii) 구해진 견실안정화 제어를 가중함수에 연결하여 최종제어기로 삼는다.

4.4 2-자유도 모델추종 기법(2-DOF Model Following)

앞서 검토한 혼합감도함수문제나 H_∞ 루우프형상기법은 모두 여러 형태의 주파수 형상에 근거하고 있으며, 따라서 시간영역 성능사양은 그 각각의 design framework에 곧바로 적용시킬 수가 없다는 한계를 안고 있다. 예를 들어, H_∞ 루우프형상기법은 개루우프 형상을 적절히 조정함으로써

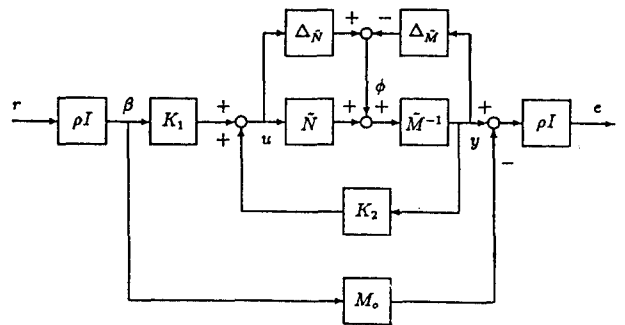


그림 11. H_∞ 2-자유도 모델추종기법 구성도

필요한 성능사양을 맞추는 간접적인 접근방법이라 할 수 있다. Limebeer와 그 동료들[5]은 시간영역 성능사양을 보다 직접적으로 design framework에 반영할 수 있는 H_∞ 2-자유도 모델추종기법을 고안하였다. 그림 11은 H_∞ 2-자유도 모델추종기법 구성도를 나타내며, $M_o(s)$ 는 추종모델, $K_f(s)$ 은 prefilter, $K_r(s)$ 는 H_∞ 제어기법에 의한 안정화 제어기, 그리고 ρ 는 모델추종을 위한 가중계수를 나타낸다.

그림 11에서 prefilter $K_f(s)$ 은 아래의 식(11)을 만족시키기 위해 포함되어 있다.

$$\|T_{y\beta} - M_o\|_\infty \leq \gamma \rho^{-2} \quad (11)$$

여기서, $T_{y\beta}(s)$ 는 $\beta(t)$ 에서 $y(t)$ 까지의 폐루프 전달함수이고, γ 는 시스템이 허용하는 perturbations의 크기이다. 이 방법은 H_∞ 루우프형상기법의 장점을 활용하면서 2-자유도 및 모델 추종의 기능을 추가하여 확장한 것으로, 성능에도 견실성을 어느 정도 보장할 수 있도록 향상된 기법이다. 그러나, 이 방법은 H_∞ -norm 계산에 있어 다시 반복법을 필요로 하는 단점이 있다.

H_∞ 2-자유도 모델추종기법의 설계과정은 다음과 같다.

(i) H_∞ 루우프형상기법에서와 같은 방법으로 가중함수를 선정한다.

(ii) 선정된 가중함수를 플랜트와 결합한 후, shaped plant에 대해 견실안정화 제어를 찾는 방식으로 H_∞ -norm의 최소값을 구한다(따라서, 이 단계의 계산은 반복법 필요 없음). H_∞ -norm의 최소값은 작을수록 좋으며, 10 정도의 값을 넘지 않도록 한다. 만일 이것이 성취되지 않으면 앞 단계의 가중함수 선정을 다시해야 한다.

(iii) 추종모델 $M_o(s)$ 을 선정한다.

(iv) 모델추종을 위한 가중계수 ρ 를 선정한다.

(v) 식(11)을 만족하는 제어기를 상용 소프트웨어에 의존하여 구한다.

(vi) 구해진 제어기를 가중함수에 연결하여 최종제어기로 삼는다.

5. 맺는말

지금까지 검토한 H_∞ 설계기법의 장단점을 정리해 보면 다음과 같다. 먼저, 장점으로는 시스템 모델이 불가피하게 갖고 있는 불확실성을 제어할 수 있는 강력한 수학적 기법이며, 주파수응답에 제한이 있는 공학문제의 경우 H_∞ -norm 최소화 문제로 변환하여 자연스럽게 해결할 수 있고, 제어기 설계과정을 formalising할 수 있으므로 컴퓨터를 이용하여 쉽게 제어기를 설계할 수 있다. 그리고, 제어기 설계과정에서 설계자가 주파수영역에 관한 지식을 가미할 수 있다는 점도 설계의 효율을 높이는 장점이라 할 수 있다. 한

편, H_∞ 관련이론이 복잡하여 제어 실무자에게 심적으로 부담을 줄 수 있고(실제로는 그럴 필요가 없지만), 제어기의 내부구조가 PID 제어기의 경우처럼 명료하지 않으며, 가중함수의 사용이 불가피하여 제어기의 차수가 높아질 수 있다는 단점도 있다.

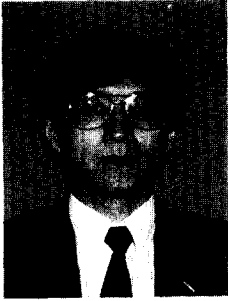
H_∞ 제어기법은 이론적인 연구와 함께 산업응用に 관한 연구도 활발하여, 자동차 제어, 항공우주 제어(고성능 헬리콥터의 비행제어, 비행체의 궤적추종 제어, 우주구조물체의 제어), 공정제어(발전소에서의 핵반응로 제어), 및 기계제어 등에 광범위하게 응용되고 있다.

H_∞ 제어기법은 여타의 다른 제어기 설계기법에 비해 많은 수학적 지식을 필요로 하고 제어이론 및 설계과정이 복잡한 것으로 인식돼 우리나라에서는 그다지 많은 관심을 끌지 못하고 있는 것 같다. 그러나, 응용사례에서 알 수 있는 것처럼 그 응용대상이 광범위 하고, 또한 고성능의 제어목적 달성을 위해 필요한 제어기법으로 자리잡아가고 있으므로 보다 더한 관심을 기울일 필요가 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

- [1] G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith, *μ -Analysis and Synthesis Toolbox for Matlab*, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1991.
- [2] R.Y. Chiang and M.G. Safonov, *The Robust Control Toolbox for Matlab*, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1992.
- [3] J. Doyle, K. Glover, K. Khargonekar, and B.A. Francis. "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.39, no.2, pp.819-999, 1989.
- [4] K. Glover and J.C. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity", *Systems and Control Letters*, vol.11, pp.167-172, 1988.
- [5] D.J.N. Limebeer, E.M. Kasenally, and J.D. Perkins, "On the design of robust two degree of freedom controllers", *Automatica*, vol.29, no.1, pp.157-168, 1993.
- [6] J.M. Maciejowski. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley, Workingham, U.K., 1989.
- [7] D.C. McFarlane and K. Glover. *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol.138, Springer-Verlag, 1990.
- [8] M.C. Tsai, E.J.M. Geddes, and I. Postlethwaite. "Pole-zero cancellations and closed-loop properties

저 자 소 개



최 병 옥

1978. 2 서울대학교 전기공학과 졸업

1978. 1~89. 8 현대건설(영국/독일 파견근무)

1989. 10~90. 9 영국 Imperial College(제어시스템 석사)

1990. 10~94. 7 영국 University of Leicester(제어공학 박사)

1993. 9~94. 12 영국 University of Leicester 연구원

1995. 3~현재 서울대학교 제어계측신기술연구센터 선임연구원

(151-742)서울 관악구 신림동 산56-1 서울대 제어계측신기술연구센터

TEL/(01)880-6485 교322 FAX/(02)888-4182